БИОМЕХАТРОННЫЕ СИСТЕМЫ

Лекция 1

Двойной маятник:
оптимальное управление раскачиванием и торможением

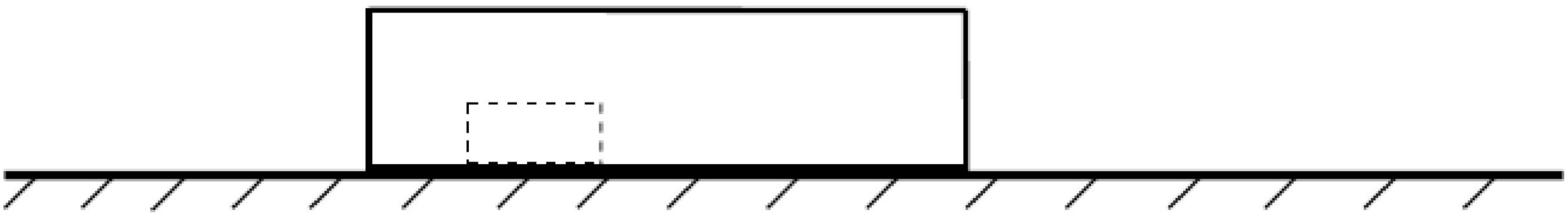
Гимнаст раскачивается на перекладине, управляя, в основном, углом в тазобедренном суставе; момент в запястном суставе при этом весьма мал.

Человек управляет колебаниями качелей вокруг точки подвеса, перемещаясь на них подходящим образом, в то время как в точке подвеса качелей отсутствует какой-либо «внешний» управляющий момент. В обоих последних случаях человек надлежащим образом использует силу тяжести.

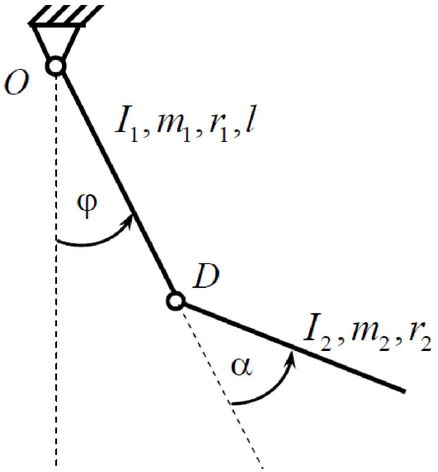
Животные, человек могут перемещать “звенья” своего тела только одно относительно другого. Однако делают они это так, чтобы внешние силы, возникающие при относительном движении, – силы взаимодействия с окружающей средой, гравитационные силы – осуществляли движение тела как целого желаемым образом.

Например, ходьба, бег животных, ползание пресмыкающихся происходит благодаря силам трения с опорной поверхностью. Животные “организуют” надлежащие воздействия этих внешних сил при относительном движении звеньев тела.

Другой пример



Уравнения движения двойного маятника



$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 \qquad T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \left(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\right)^2 \qquad \boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

$$I_2 = m_2 r_2^2 + I_C \qquad I_C = I_2 - m_2 r_2^2 \qquad T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2}\left(I_2 - m_2 r_2^2\right)\left(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\right)^2$$

$$x_C = l \sin\varphi + r_2 \sin(\varphi + \alpha) \qquad y_C = -l\cos\varphi - r_2\cos(\varphi + \alpha)$$

$$\dot{x}_C = l\cos\varphi\dot{\varphi} + r_2\cos(\varphi+\alpha)\left(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\right) \qquad \dot{y}_C = l\sin\varphi\dot{\varphi} + r_2\sin(\varphi+\alpha)\left(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\right)$$

$$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 = \left[l\cos\varphi\dot{\varphi} + r_2\cos(\varphi+\alpha)\left(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\right)\right]^2 + \left[l\sin\varphi\dot{\varphi} + r_2\sin(\varphi+\alpha)\left(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\right)\right]^2 =$$

$$= l^2\dot{\varphi}^2 + r_2^2\left(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\right)^2 + 2lr_2\dot{\varphi}\left(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\right)\left[\cos\varphi\cos(\varphi+\alpha) + \sin\varphi\sin(\varphi+\alpha)\right] =$$

$$= l^2\dot{\varphi}^2 + r_2^2\left(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\right)^2 + 2lr_2\dot{\varphi}\left(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\right)\cos\alpha$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}\left\{I_1\dot{\varphi}^2 + m_2\left[l^2\dot{\varphi}^2 + r_2^2\left(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\right)^2 + 2lr_2\dot{\varphi}\left(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\right)\cos\alpha\right] + \left(I_2 - m_2 r_2^2\right)\left(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{I_1\dot{\varphi}^2 + m_2\left[l^2\dot{\varphi}^2 + 2lr_2\dot{\varphi}\left(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\right)\cos\alpha\right] + I_2\left(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[a_{11}\dot{\varphi}^2 + 2a_{12}\dot{\varphi}\left(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\right)\cos\alpha + a_{22}\left(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\right)^2\right]$$

$$a_{11} = I_1 + m_2 l^2 \qquad a_{12} = m_2 l r_2 \qquad a_{22} = I_2$$

Кинетическая энергия: $$T = \frac{1}{2}\left[a_{11}\dot\varphi^2 + 2a_{12}\dot\varphi\left(\dot\varphi+\dot\alpha\right)\cos\alpha + a_{22}\left(\dot\varphi+\dot\alpha\right)^2 \right]$$

Потенциальная энергия: $$\Pi = -b_1\cos\varphi - b_2\cos\left(\varphi+\alpha\right)$$

$$b_1 = \left(m_1 r_1 + m_2 l\right) g \quad b_2 = m_2 r_2 g$$

Обобщенная работа: $$\delta W = L\delta\alpha$$

Уравнения Лагранжа: $$\frac{d}{dt}\left[\frac{d\left(T-\Pi\right)}{d\dot\varphi}\right] - \frac{d\left(T-\Pi\right)}{d\varphi} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{d\left(T-\Pi\right)}{d\dot\alpha}\right] - \frac{d\left(T-\Pi\right)}{d\alpha} = L$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = a_{11}\dot\varphi + 2a_{12}\dot\varphi\cos\alpha + a_{12}\dot\alpha\cos\alpha + a_{22}\left(\dot\varphi+\dot\alpha\right) = j_1(\alpha)\dot\varphi + j_2(\alpha)\dot\alpha$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\alpha} = a_{12}\dot\varphi\cos\alpha + a_{22}\left(\dot\varphi+\dot\alpha\right) = j_2(\alpha)\dot\varphi + a_{22}\dot\alpha$$

$$j_1(\alpha) = a_{11} + a_{22} + 2a_{12}\cos\alpha \quad j_2(\alpha) = a_{22} + a_{12}\cos\alpha$$

$$j_1(\alpha)\ddot\varphi + j_2(\alpha)\ddot\alpha - 2a_{12}\dot\varphi\dot\alpha\sin\alpha - a_{12}\dot\alpha^2\sin\alpha = -b_1\sin\varphi - b_2\sin\left(\varphi+\alpha\right)$$

$$j_2(\alpha)\ddot\varphi + a_{22}\ddot\alpha + a_{12}\dot\varphi^2\sin\alpha = -b_2\sin\left(\varphi+\alpha\right) + L$$

$j_1(\alpha) = a_{11} + a_{22} + 2a_{12}\cos\alpha$ - момент инерции жесткого двухзвенника

$$\dot{K} = -b_1 \sin\varphi - b_2 \sin\left(\varphi + \alpha\right) \qquad K = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = j_1(\alpha)\dot{\varphi} + j_2(\alpha)\dot{\alpha}$$

$$\dot{\varphi} + \frac{j_2(\alpha)}{j_1(\alpha)}\dot{\alpha} = \frac{K}{j_1(\alpha)} \qquad \frac{d\varphi}{dt} + \frac{j_2(\alpha)}{j_1(\alpha)}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\varphi + F\left(\alpha\right)\right]$$

$$F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{j_2(\zeta)}{j_1(\zeta)}\, d\zeta = \int_0^{\alpha} \frac{a_{22} + a_{12}\cos\zeta}{a_{11} + a_{22} + 2a_{12}\cos\zeta}\, d\zeta = \frac{\alpha}{2} - A\,\mathrm{arctg}\left[B\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right]$$

$$A = \frac{a_{11} - a_{22}}{\sqrt{\left(a_{11} + a_{22}\right)^2 - 4a_{12}^2}} \qquad B = \sqrt{\frac{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}}{a_{11} + a_{22} + 2a_{12}}}$$

$$\left(a_{11} + a_{22}\right)^2 - 4a_{12}^2 = \left(a_{11} + a_{22} + 2a_{12}\right)\left(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\right) \qquad a_{11} = I_1 + m_2 l^2 \quad a_{12} = m_2 l r_2 \quad a_{22} = I_2$$

$$a_{11} + a_{22} - 2a_{12} = I_1 + m_2 l^2 + I_2 - 2m_2 l r_2 = I_1 + m_2 l^2 + m_2\rho_2^2 - 2m_2 l r_2 \overset{?}{>} 0$$

$I_2 = m_2\rho_2^2 \qquad I_2 = m_2 r_2^2 + I_{C_2}$ - теорема Штейнера $\qquad m_2\rho_2^2 = m_2 r_2^2 + I_{C_2} \qquad \rho_2 > r_2$

$$I_1 + m_2 l^2 + m_2\rho_2^2 - 2m_2 l r_2 > I_1 + m_2 l^2 + m_2 r_2^2 - 2m_2 l r_2$$

$$I_1 + m_2\left(l^2 + r_2^2 - 2l r_2\right) = I_1 + m_2\left(l - r_2\right)^2 > 0$$

Вычисление интеграла

$$\frac{a_{22}+a_{12}\cos\zeta}{a_{11}+a_{22}+2a_{12}\cos\zeta}=\frac{1}{2}\left[\frac{2a_{22}+2a_{12}\cos\zeta}{a_{11}+a_{22}+2a_{12}\cos\zeta}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{a_{11}+a_{22}+2a_{12}\cos\zeta+a_{22}-a_{11}}{a_{11}+a_{22}+2a_{12}\cos\zeta}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{11}+a_{22}+2a_{12}\cos\zeta}\right]=\frac{1}{2}\left[1-\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{11}+a_{22}+2a_{12}\left(\cos^2\frac{\zeta}{2}-\sin^2\frac{\zeta}{2}\right)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{a_{11}-a_{22}}{(a_{11}+a_{22}+2a_{12})\cos^2\frac{\zeta}{2}+(a_{11}+a_{22}-2a_{12})\sin^2\frac{\zeta}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{a_{11}-a_{22}}{(a_{11}+a_{22}+2a_{12})\cos^2\frac{\zeta}{2}+(a_{11}+a_{22}+2a_{12})\frac{a_{11}+a_{22}-2a_{12}}{a_{11}+a_{22}+2a_{12}}\sin^2\frac{\zeta}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{11}+a_{22}+2a_{12}}\frac{1}{\cos^2\frac{\zeta}{2}+B^2\sin^2\frac{\zeta}{2}}\right]=\frac{1}{2}-\frac{AB}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{\zeta}{2}+B^2\sin^2\frac{\zeta}{2}}=$$

$$\left(A=\frac{a_{11}-a_{22}}{\sqrt{\left(a_{11}+a_{22}\right)^2-4a_{12}^2}},\ \ B=\sqrt{\frac{a_{11}+a_{22}-2a_{12}}{a_{11}+a_{22}+2a_{12}}},\ \ AB=\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{11}+a_{22}+2a_{12}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-AB\frac{1}{1+B^2\operatorname{tg}^2\frac{\zeta}{2}}\frac{1}{2\cos^2\frac{\zeta}{2}}=\frac{1}{2}-A\frac{1}{1+B^2\operatorname{tg}^2\frac{\zeta}{2}}B\frac{1}{2\cos^2\frac{\zeta}{2}}=$$

$$=\frac{d}{d\zeta}\left\{\frac{\zeta}{2}-A\operatorname{arctg}\left[B\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}\right]\right\}$$

$$\int_0^\alpha\frac{j_2(\zeta)}{j_1(\zeta)}d\zeta=\int_0^\alpha\frac{a_{22}+a_{12}\cos\zeta}{a_{11}+a_{22}+2a_{12}\cos\zeta}d\zeta=\frac{\alpha}{2}-A\operatorname{arctg}\left[B\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]=F\left(\alpha\right)\qquad F\left(0\right)=0$$

Приведённый угол

$$\dot{K} = -b_1 \sin\varphi - b_2 \sin\left(\varphi + \alpha\right) \qquad K = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = j_1(\alpha)\dot{\varphi} + j_2(\alpha)\dot{\alpha}$$

$$\dot{\varphi} + \frac{j_2(\alpha)}{j_1(\alpha)}\dot{\alpha} = \frac{K}{j_1(\alpha)} \qquad \frac{d\varphi}{dt} + \frac{j_2(\alpha)}{j_1(\alpha)}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\varphi + F\left(\alpha\right)\right]$$

Вместо угла ϕ введем новую переменную *p*: $p = \varphi + F\left(\alpha\right) \quad \Rightarrow \quad \varphi = p - F\left(\alpha\right)$

Если $\alpha = 0,$ то $\varphi = p,$ поскольку $F\left(0\right) = 0$

$$\dot{p} = \frac{K}{j_1(\alpha)}$$

$$\dot{K} = f\left(p,\alpha\right) \qquad f\left(p,\alpha\right) = -b_1 \sin\left[p - F\left(\alpha\right)\right] - b_2 \sin\left[p - F\left(\alpha\right) + \alpha\right]$$

$$\frac{dK}{dp} = \frac{f(p,\alpha)\, j_1(\alpha)}{K}$$

$$\alpha_{\min} \le \alpha \le \alpha_{\max} \qquad \alpha_{\min}, \alpha_{\max} = const \qquad \alpha_{\min}, \alpha_{\max} \in (-\pi,\ \pi)$$

Оптимальное управление, раскачивающее маятник

Начальное состояние: $-\pi < p(0) < 0, \quad K(0) = 0$

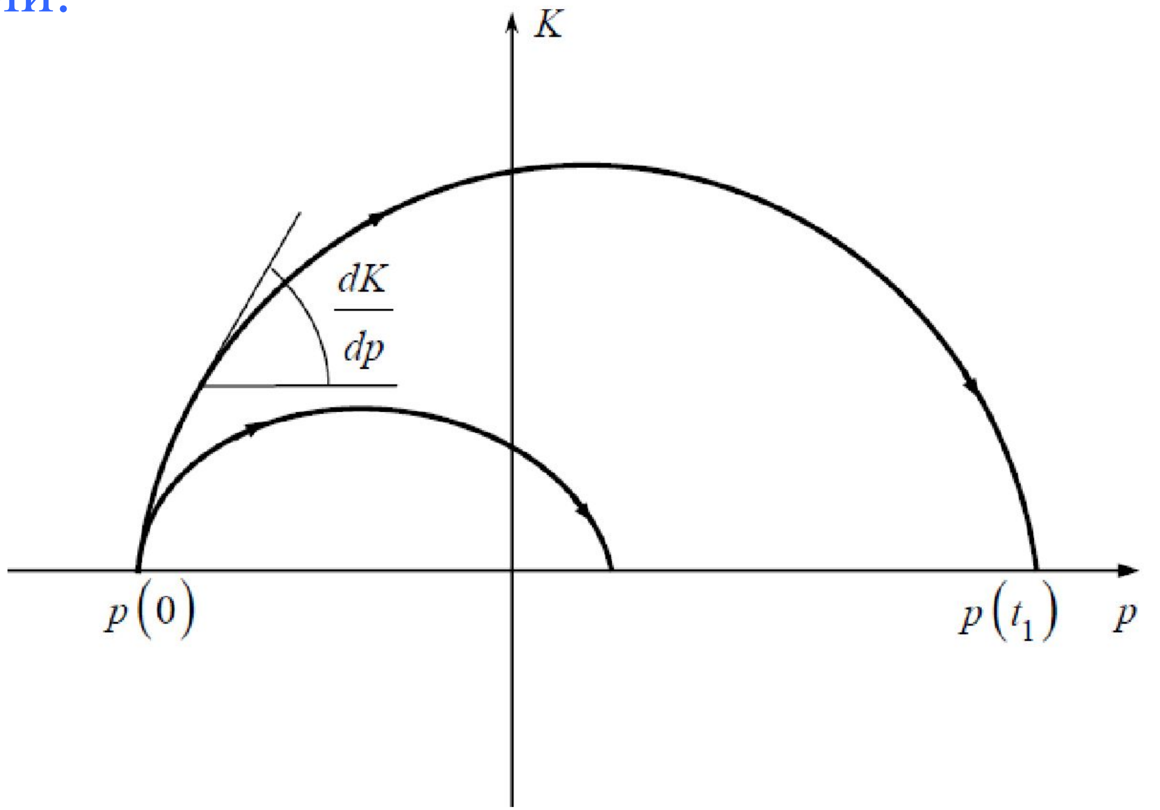
Если $\alpha(0) = 0,$ то $\varphi(0) = p(0)$

Постановка задачи:

$$\max_{\alpha_{\min} \le \alpha \le \alpha_{\max}} [p(t_1)] \qquad K(t_1) = 0 \qquad t_1 > 0$$

Если $\alpha \equiv 0,$ то $p(t) = \varphi(t)$ и $p(t_1) = -p(0) = -\varphi(0)$

Решение задачи:



$$\dot{p} = \frac{K}{j_1(\alpha)}$$

$$\dot{K} = f\left(p, \alpha\right)$$

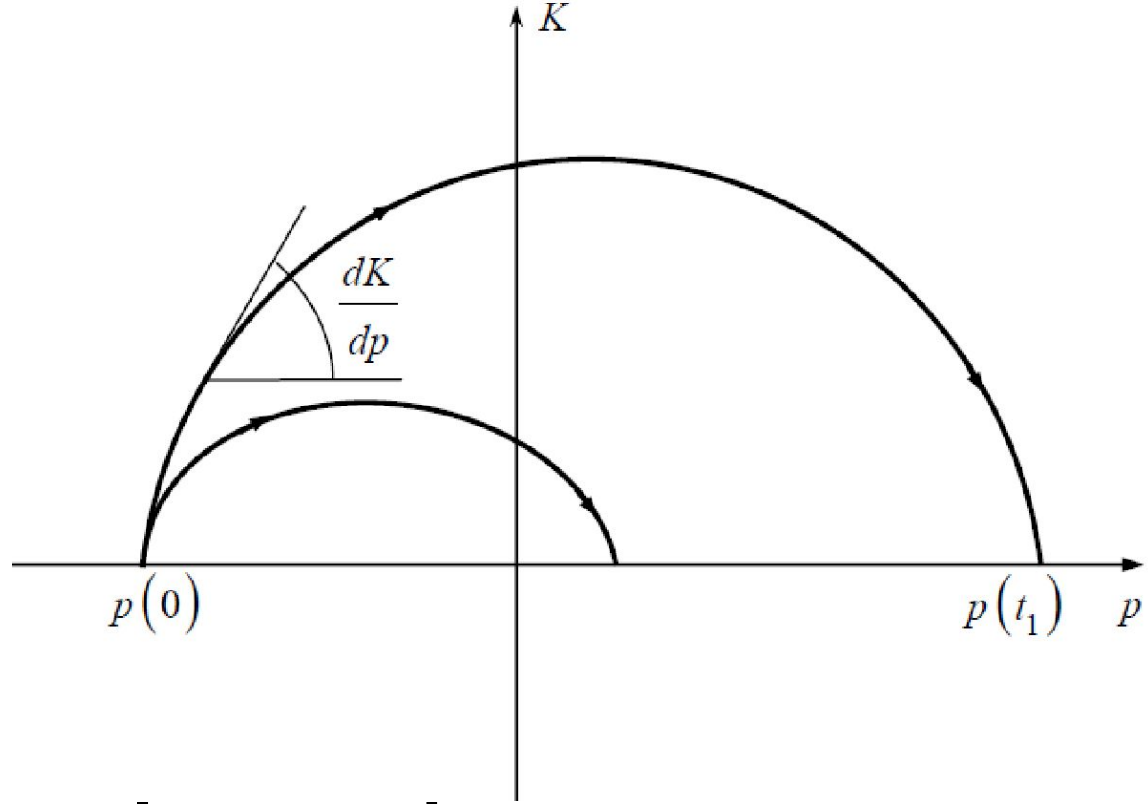
$$\frac{dK}{dp} = \frac{f(p,\alpha)\, j_1(\alpha)}{K}$$

$$\alpha(p) = \arg \max_{\alpha_{\min} \le \alpha \le \alpha_{\max}} \left[\frac{dK}{dp}\right] = \arg \max_{\alpha_{\min} \le \alpha \le \alpha_{\max}} \left[f(p,\alpha)\, j_1(\alpha)\right],$$ если $K > 0$

$$\varphi = p - F\left(\alpha\right) \qquad \varphi\left(t_1\right) = p\left(t_1\right) - F\left[\alpha\left(t_1\right)\right]$$

При $\alpha(t_1 + 0) = \alpha = \arg \min\limits_{\alpha_{\min} \le \alpha \le \alpha_{\max}} \left[F\left(\alpha\right)\right]$ достигается максимум угла φ при $t = t_1$

$$\min_{\alpha_{\min} \le \alpha \le \alpha_{\max}} [p(t_2)] \qquad K(t_2) = 0$$



$$\frac{dK}{dp} = \frac{f(p,\alpha)\, j_1(\alpha)}{K}$$

$$\alpha(p) = \arg \max_{\alpha_{\min} \le \alpha \le \alpha_{\max}} \left[\frac{dK}{dp}\right] = \arg \min_{\alpha_{\min} \le \alpha \le \alpha_{\max}} \left[f(p,\alpha)\, j_1(\alpha)\right],$$ если $K < 0$

Итак:

$$\alpha^*(p,K) = \begin{cases} \alpha(p) \text{ если} = \arg 0 \max\limits_{\alpha_{\min} \le \alpha \le \alpha_{\max}} \left[\frac{dK}{dp}\right] = \arg \max\limits_{\alpha_{\min} \le \alpha \le \alpha_{\max}} \left[f(p,\alpha)\, j_1(\alpha)\right], & K > \\ \alpha(p) \text{ если} = \arg 0 \max\limits_{\alpha_{\min} \le \alpha \le \alpha_{\max}} \left[\frac{dK}{dp}\right] = \arg \min\limits_{\alpha_{\min} \le \alpha \le \alpha_{\max}} \left[f(p,\alpha)\, j_1(\alpha)\right], & K < \end{cases}$$