

# Лекция. Дифференциальные Уравнения

Лектор : Сандаков Евгений Борисович - доцент кафедры №30 Высшей  
математики «НИЯУ МИФИ»

ОДУ. Лекция 23 сентября 2020 года

Док-во Теоремы (ТСЕ)

1-ый шаг Докажем, что решение задачи Коши ①-② эквивалентно решению интегрального уравнения

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t [A(\tau)\vec{y}(\tau) + \vec{f}(\tau)] d\tau \quad \text{③}$$

(Опр. Решением интегрального уравнения ③ называется функция  $\vec{y}(t) \in C[a, b]$  и при подстановке в ③ получается тождество по  $t \in [a, b]$ .)

Вернёмся к доказательству эквивалентности задач Коши ①-② и интегрального уравнения ③.

а) Покажем, что из ③ следует ①-②.

Пусть  $\vec{y}(t)$  — решение уравнения ③. Следовательно,  $\vec{y}(t) \in C^1[a, b]$ . Тогда

$$\int_{t_0}^t [A(\tau)\vec{y}(\tau) + \vec{f}(\tau)] d\tau \in C^1[a, b].$$

Поскольку  $\vec{y}_0 = \text{const}$  и  $\int_{t_0}^t [A(\tau)\vec{y}(\tau) + \vec{f}(\tau)] d\tau \in C^1[a, b]$

то  $\vec{y}(t) \in C^1[a, b]$ . Тогда дифференцируя равенство ③, получим.

$$\vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t) + \vec{f}(t) \quad \text{①}$$

Подставив в (3)  $t=t_0$ , получим

$$\vec{y}'(t_0) = \vec{y}_0 \quad (2)$$

Обратно. Пусть  $\vec{y}'(t)$  решение задачи Коши (1)-(2)

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}'(t) + \vec{f}'(t) & (1) \\ \vec{y}'(t_0) = \vec{y}_0 & (2) \end{cases}$$

Интегрируем (1) по  $\tau \in [t_0, t]$ , получим

$$\vec{y}'(t) = \int_{t_0}^t [A(\tau)\vec{y}'(\tau) + \vec{f}'(\tau)] d\tau + \vec{C} \quad (*)$$

Для нахождения  $\vec{C}$ , подставим в (\*)  $t=t_0$ . В результате получим  $\vec{C} = \vec{y}_0$ .

Подставив это в (\*), получим (3).  
2-ой шаг Докажем существование решения уравнения (3).

$$\vec{y}'(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t [A(\tau)\vec{y}'(\tau) + \vec{f}'(\tau)] d\tau \quad (3)$$

Введем в рассмотрение последовательность функций:

$$\vec{y}_0'(t) = \vec{y}_0, \quad \vec{y}_1' = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t [A(\tau)\vec{y}_0' + \vec{f}'(\tau)] d\tau,$$

$$\vec{y}_2'(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t [A(\tau)\vec{y}_1'(\tau) + \vec{f}'(\tau)] d\tau,$$

$$\vec{y}_n'(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t [A(\tau)\vec{y}_{n-1}'(\tau) + \vec{f}'(\tau)] d\tau, \dots$$

Докажем, что  $\vec{y}_n(t) \xrightarrow{[a,b]}$

Рассмотрим

$$\|\vec{y}_1 - \vec{y}_0\| = \left\| \int_a^t [A(\tau)\vec{y}_0 + \vec{f}(\tau)] d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \max_{t \in [a,b]} \left| \int_a^t \|A(\tau)\vec{y}_0 + \vec{f}(\tau)\| d\tau \right| = M$$

Рассмотрим  $\|\vec{y}_2(t) - \vec{y}_1(t)\| = \left\| \int_a^t [A(\tau)(\vec{y}_1(\tau) - \vec{y}_0(\tau))] d\tau \right\| \leq$

$$\leq \int_a^t \|A(\tau)\| \cdot \|\vec{y}_1 - \vec{y}_0\| d\tau \leq \max_{t \in [a,b]} \|A(\tau)\| \cdot \|\vec{y}_1 - \vec{y}_0\| \cdot \int_a^t d\tau \leq$$

$$\leq \alpha \cdot M \int_a^t d\tau = \frac{\alpha M (t - a)}{1!}, \text{ где } \alpha = \max_{t \in [a,b]} \|A(\tau)\|$$

Методом математической индукции нетрудно доказать, что

$$\|\vec{y}_{n+1}(t) - \vec{y}_n(t)\| \leq \frac{M[\alpha(t-a)]^n}{n!} \quad (*)$$

Рассмотрим функциональный ряд

$$\vec{y}_0 + (\vec{y}_1 - \vec{y}_0) + (\vec{y}_2 - \vec{y}_1) + \dots + (\vec{y}_{n+1} - \vec{y}_n) + \dots =$$
$$= \vec{y}_1(t) + \vec{y}_2(t) + \dots + \vec{y}_n(t) + \dots \quad (**)$$

где  $\vec{\psi}_k(t) = \vec{y}_{k+1}(t) - \vec{y}_k(t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$

Легко заметить, что частичные суммы  $S_{n+1}(t)$  ряда  $(**)$  равны:  $S_{n+1}(t) = \vec{y}_{n+1}(t)$

В силу  $(*)$  имеем  $\|\vec{\psi}_n(t)\| \leq \max_{t \in [a,b]} \|\vec{y}_{n+1}(t) - \vec{y}_n(t)\| \leq$

$$\leq \frac{M[\alpha(b-a)]^n}{n!}$$

Тогда в силу Теоремы Вейерштрасса о равномерной сходимости функционального ряда получаем, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{\varphi}_n(t)$  сходится равномерно на отрезке  $[a; b]$

Приведем формулировку Теоремы Вейерштрасса.

Теорема (Вейерштрасса) Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится равномерно на множестве  $X$ , если существует сходящийся числовой ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$  такой, что  $|u_n(x)| \leq C_n$  при  $x \in X$  для  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

В нашем случае ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{\varphi}_n(t)$  сходится равномерно на  $[a; b]$ , так как существует сходящийся числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ , где

$$C_n = \frac{M[d(b-a)]^n}{n!} \text{ такой, что } \|\vec{\varphi}_n(t)\|_C \leq C_n$$

(Сходимость ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$  следует из того, что  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M[d(b-a)]^n}{n!} = M \cdot e^{d(b-a)}$ ).

Так как  $\vec{y}_{n+1}(t) = \vec{y}_n'(t)$  и ряд  $(**)$  сходится равномерно на  $[a; b]$  следует, что существует функция  $\vec{y}^*(t)$  такая, что  $\vec{y}_n'(t) \xrightarrow{[a; b]} \vec{y}^*(t)$

-5-

Тогда согласно Теореме из математического анализа (Теорема Эем функции наименьшей последовательности непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций  $u_n(x)$  ( $u_n(x) \in C[a, b]$  где  $\forall n \in \mathbb{N}$ ) сходится равномерно на  $[a, b]$  к функции  $u(x)$ , то  $u(x)$  также непрерывна на  $[a, b]$ , т.е.  $u(x) \in C[a, b]$ ) следует, что  $\vec{y}^*(t) \in \vec{C}[a, b]$ .

Перейдем в равенстве

$$\vec{y}_n^*(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t [A(\tau) \vec{y}_{n-1}^*(\tau) + \vec{f}(\tau)] d\tau$$

к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим

$$\vec{y}^*(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t [A(\tau) \vec{y}^*(\tau) + \vec{f}(\tau)] d\tau \quad (4)$$

где  $\vec{y}^*(t) \in \vec{C}[a, b]$ .

Из равенства (4) следует, что  $\vec{y}^*(t)$  — решение уравнения (3).

3-й шаг. Докажем единственность решения уравнения (4). Будем доказывать это методом "от противного".

Предположим, что существует другое решение  $\vec{z}(t)$  уравнения (4), то есв.

$$\vec{z}(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t [A(\tau) \vec{z}(\tau) + \vec{f}(\tau)] d\tau \quad (5)$$

Докажем, что  $\vec{z}(t) \equiv \vec{y}^*(t)$   
 Для этого из (5) выведем (6) и получим  

$$\|\vec{z} - \vec{y}_{n+1}^*(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t A(\tau) [\vec{z}(\tau) - \vec{y}_n^*(\tau)] d\tau \right\|. \quad (6)$$

Из этого равенства при  $n=0$ , получим  

$$\|\vec{z}(t) - \vec{y}_1^*(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t A(\tau) [\vec{z}(\tau) - \vec{y}_0^*] d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \max_{t \in [a, b]} \left| \int_{t_0}^t \|A(\tau) [\vec{z}(\tau) - \vec{y}_0^*]\| d\tau \right| = M_1$$

при  $n=1$  получим  

$$\|\vec{z} - \vec{y}_2^*(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t A(\tau) [\vec{z} - \vec{y}_1^*(\tau)] d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \max_{t \in [a, b]} \|A(\tau)\| \cdot M_1 \left| \int_{t_0}^t 1 \cdot d\tau \right| = \frac{M_1 \cdot \alpha (t - t_0)}{1!}$$

при  $n=2$  получим  

$$\|\vec{z} - \vec{y}_3^*(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t A(\tau) [\vec{z} - \vec{y}_2^*(\tau)] d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \alpha \cdot \alpha M_1 \int_{t_0}^t (\tau - t_0) d\tau = \frac{M_1 [\alpha (t - t_0)]^2}{2!}$$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$\|\vec{z}(t) - \vec{y}_{n+1}^*(t)\| \leq \frac{M_1 [\alpha (t - t_0)]^n}{n!} \leq \frac{M_1 [\alpha (b - a)]^n}{n!} \quad (7)$$

Переходя в (7) к пределу при  $n \rightarrow \infty$ ,  
 получим  $\|\vec{z}(t) - \vec{y}^*(t)\| \leq 0$ , так как

$$\frac{M_1 [\alpha (b - a)]^n}{n!} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ (в силу)}$$

сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1 [\lambda(b-a)]^n}{n!} = M_1 e^{\lambda(b-a)}$

4-ый шаг Оценка погрешности приближенного решения следует из неравенства (7).

Б. Однородные системы

$$\vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t) \quad (1_0)$$

Обозначим через  $H$  множество решений однородной системы (1<sub>0</sub>). Очевидно, это множество не пусто, так как  $\vec{y}(t) \equiv \vec{0}$  принадлежит  $H$ .  
Утв. 1 Множество  $H$  является линейным пространством.

Док-во Пусть  $\vec{y}_1(t) \in H$  и  $\vec{y}_2(t) \in H$ . Тогда для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  рассмотрим  $\vec{z}(t) = \alpha \vec{y}_1(t) + \beta \vec{y}_2(t)$ . Тогда

$$\begin{aligned} A\vec{z} &= A(\alpha \vec{y}_1 + \beta \vec{y}_2) = \alpha A\vec{y}_1 + \beta A\vec{y}_2 = \\ &= \alpha \cdot \vec{y}_1' + \beta \cdot \vec{y}_2' = [\alpha \vec{y}_1(t) + \beta \vec{y}_2(t)]' = \vec{z}'(t) \end{aligned}$$

Следовательно,  $\vec{z}(t) \in H$ .

Далее, так как для любого фиксированного  $t$ ,  $\vec{y}_k(t) \in \mathbb{R}^n$ , то  $H \subset \mathbb{R}^n$ , то есть  $H$  — подпространство  $\mathbb{R}^n$ . Следовательно,  $H$  — само является пространством.  $\#$

Упр. 2.  $\dim H \leq n$ .

Док-во: Докажем, что любые  $k$  решений  $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_k(t)$  при  $k > n$  линейно за-

висимы. Пусть  $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_k(t)$ , где  $k > n$

являются решениями системы (10). Возьмем  $t = t_0 \in [a, b]$  и рассмотрим вектора  $\vec{y}_1(t_0), \vec{y}_2(t_0), \dots, \vec{y}_k(t_0)$ ,  $k > n$

Тогда, как известно из линейной алгебры эти вектора линейно зависимы.

Следовательно, существуют числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  не все равные нулю одновременно ( $\sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \neq 0$ ) такие, что

$$\alpha_1 \vec{y}_1(t_0) + \alpha_2 \vec{y}_2(t_0) + \dots + \alpha_k \vec{y}_k(t_0) = \vec{0} \quad (*)$$

Рассмотрим функцию

$$\vec{y}(t) = \alpha_1 \vec{y}_1(t) + \alpha_2 \vec{y}_2(t) + \dots + \alpha_k \vec{y}_k(t) \quad (**)$$

(с постоянными  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  из  $(*)$ )

Тогда  $\vec{y}(t)$  есть решение уравнения (10) и удовлетворяет условию  $(*)$ , но есть  $\vec{y}(t)$  есть решение задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t) & (10) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{0} & (*) \end{cases}$$

Из ТСЕ решения задачи Коши для линейной системы следует, что  $\vec{y}'(t) \equiv \vec{0}$ .

Следовательно,  $\alpha_1 \vec{y}_1(t) + \alpha_2 \vec{y}_2(t) + \dots + \alpha_k \vec{y}_k(t) \equiv \vec{0}$  при  $\sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \neq 0$ . Таким образом, решения  $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_k(t), (k > n)$  уравнения (1) линейно зависимы.  $\#$

Утв. 3.  $\dim H = n$

Док-во. Возьмем в пространстве  $R^n$  произвольный базис  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  и рассмотрим  $n$  задач Коши

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t) & (1_k) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{e}_k, k = \overline{1, n} & (2_k) \end{cases}$$

При  $k=1$  существует единственное решение  $\vec{y}_1(t)$  задачи Коши (1) - (2) при  $k=2$  существует единственное решение  $\vec{y}_2(t)$  задачи Коши (1) - (2) и так далее, и, наконец, при  $k=n$  существует единственное решение  $\vec{y}_n(t)$  задачи Коши (1) - (2).

Таким образом, мы получили  $n$ -решений  $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$  уравнения (1)

Докажем, что они линейно независимы.

Будем доказывать это утверждение

методом «от противного».

Пусть  $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$  — линейно  
зависимы. Тогда существуют числа  
 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \neq 0 \right)$ .

$$\alpha_1 \vec{y}_1(t) + \alpha_2 \vec{y}_2(t) + \dots + \alpha_n \vec{y}_n(t) \equiv \vec{0}$$

Подставляя  $t = t_0$  в последнее равенство  
получим

$$\alpha_1 \vec{y}_1(t_0) + \alpha_2 \vec{y}_2(t_0) + \dots + \alpha_n \vec{y}_n(t_0) = \vec{0}$$

или в силу условия  $(2_k)$  последнее  
равенство примет вид

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0}$$

причем  $\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \neq 0$ .

Последнее равенство означает, что векто-  
ра  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  линейно зависимы, а  
это противоречит условию, что  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots,$   
 $\dots, \vec{e}_n$  являются базисом.

Следовательно, так построенные реше-  
ния  $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$  линейно неза-  
висимы, а любые  $k$  решений, где  $(k > n)$   
линейно зависимы в силу утв. 2.

Следовательно,  $\dim H = n$ . #

Опр! Любые  $n$ -линейно независимых  
решений системы  $(1_0)$  называются  
фундаментальной системой решений  
(ФСР) системы  $(1_0)$

Следствие ФСР — есть базис в  $H$ , что  
следует из утв. 3.

Теорема (о общем решении системы (1))  
Пусть  $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$  — есть ФСР  
системы (1). Тогда

$$\vec{y}_{00}(t) = C_1 \vec{y}_1(t) + C_2 \vec{y}_2(t) + \dots + C_n \vec{y}_n(t)$$

есть общее решение системы (1),  
где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — произвольные постоян-  
ные.

Док-во 1) Для любых чисел  $C_1, C_2, \dots, C_n$

$\vec{y}(t) = \sum_{k=1}^n C_k \vec{y}_k(t)$  является решением  
системы (1), что следует из утв. 1

2) Пусть  $\vec{y}(t)$  — произвольное решение  
системы (1). Так как  $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots,$   
 $\dots, \vec{y}_n(t)$  — ФСР системы (1), то есть  
 $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$  — базис в  $H$ . Тогда  
из определения базиса следует, что  
существуют числа  $C_1, C_2, \dots, C_n$  такие  
что  $\vec{y}(t) = C_1 \vec{y}_1(t) + C_2 \vec{y}_2(t) + \dots + C_n \vec{y}_n(t) =$

$$= \sum_{k=1}^n C_k \vec{y}_k(t)$$

Таким образом, из 1) и 2) следует, что

$$\vec{y}_{00}(t) = \sum_{k=1}^n C_k \vec{y}_k(t) \text{ — общее решение}$$

системы  $(I_0)$  -12-

Опр.) Пусть  $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$  — ФСР системы  $(I_0)$ . Тогда матрица  $Y(t) = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n] =$   
$$= \begin{bmatrix} y_{11}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & \dots & y_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{bmatrix}$$
 называется фундаментальной матрицей системы  $(I_0)$

где  $\vec{y}_k(t) = \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{nk} \end{bmatrix}, k = \overline{1, n}$

§ Свойства фундаментальной матрицы.

1)  $\det Y(t) \neq 0$  для  $\forall t \in \langle a, b \rangle$ , то есть  
 $\exists Y^{-1}(t)$  для  $\forall t \in \langle a, b \rangle$ .

2) Матрица  $Y(t)$  удовлетворяет уравнению  $Y'(t) = A(t)Y(t)$

3) Общее решение системы  $(I_0)$  можно записать в виде  
$$\vec{y}_{\text{об}}(t) = Y(t)\vec{C}, \text{ где } \vec{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} - \text{произвольный вектор.}$$

Док-во: 1) Докажем это утверждение методом "от противного".

Пусть существует  $t_0 \in [a, b]$  такое, что  $\det Y(t_0) = 0$ . Тогда вектора

$\vec{y}_1(t_0), \vec{y}_2(t_0), \dots, \vec{y}_n(t_0)$  — линейно зависимы.

-13-

Следовательно, существуют числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$   
Такие что  $\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \neq 0$  и такие что

$$\lambda_1 \vec{y}_1(t_0) + \lambda_2 \vec{y}_2(t_0) + \dots + \lambda_n \vec{y}_n(t_0) = \vec{0} \quad (*)$$

Рассмотрим функцию

$$\vec{y}(t) = \lambda_1 \vec{y}_1(t) + \lambda_2 \vec{y}_2(t) + \dots + \lambda_n \vec{y}_n(t)$$

(где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  найденные выше числа).

Тогда  $\vec{y}(t)$  является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = A(t) \vec{y}(t) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{0} \end{cases}$$

Из ТСЕ решения задачи Коши для линейной системы следует, что  $\vec{y}(t) \equiv \vec{0}$

$$\text{То есть } \lambda_1 \vec{y}_1(t) + \lambda_2 \vec{y}_2(t) + \dots + \lambda_n \vec{y}_n(t) \equiv \vec{0}$$

$$\text{причем } \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \neq 0.$$

Следовательно,  $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$

линейно зависимы, что противоречит

тому, что  $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$  — ФСР

системы  $(*)$ . Полученное противоречие и доказывает справедливость 1).

2) и 3) очевидны #