Лекция. Дифференциальные Уравнения

Лектор : Сандаков Евгений Борисович – доцент кафедры №30 Высшей математики «НИЯУ МИФИ»

ОДУ Лекция 23 сентября 2020 года

Док-во Теоремы (TCE)

1-ый шаг Докажем, что решение задачи Коши ①–② эквивалентно решению интегрального уравнения

$$\vec{y}(t)=\vec{y}_0+\int_{t_0}^{t}[A(\tau)\vec{y}(\tau)+\vec{f}(\tau)]\,d\tau \quad (3)$$

(Опр: Решением интегрального уравнения ③ называется функция $\vec{\varphi}(t)\in C[a,b]$ и при подстановке в ③ получаем тождество по $t\in[a,b]$)

Вернёмся к доказательству эквивалентности задачи Коши ①–② и интегрального уравнения ③.

а) Покажем, что из ③ следует ①–②.

Пусть $\vec{y}(t)$ – решение уравнения ③. Тогда следовательно, $\vec{y}(t)\in\vec{C}[a,b]$. Тогда

$$\int_{t_0}^{t}[A(\tau)\vec{y}(\tau)+\vec{f}(\tau)]\,d\tau\in\vec{C}^{(1)}[a;b].$$

Так как $\vec{y}_0=\text{const}$ и $\int_{t_0}^{t}[A(\tau)\vec{y}(\tau)+\vec{f}(\tau)]\,d\tau\in\vec{C}^{(1)}[a,b]$

то $\vec{y}(t)\in\vec{C}^{(1)}[a,b]$. Тогда дифференцируя равенство ③, получим

$$\vec{y}\,'(t)=A(t)\vec{y}(t)+\vec{f}(t) \quad (1)$$

Подставив в $\textcircled{3}$ $t=t_0$, получим
$$\vec{y}(t_0)=\vec{y}_0 \quad \textcircled{2}$$
Обратно. Пусть $\vec{y}(t)$ решение задачи Коши $\textcircled{1}$–$\textcircled{2}$
$$\begin{cases}\vec{y}\,'(t)=A(t)\vec{y}(t)+\vec{f}(t) & \textcircled{1}\\ \vec{y}(t_0)=\vec{y}_0 & \textcircled{2}\end{cases}$$
Проинтегрируем $\textcircled{1}$ по $\tau\in[t_0,t]$, получим
$$\vec{y}(t)=\int_{t_0}^{t}[A(\tau)\vec{y}(\tau)+\vec{f}(\tau)]d\tau+\vec{C} \quad \textcircled{*}$$
Для нахождения $\vec{C}$, подставим в $\textcircled{*}$ $t=t_0$. В результате получим $\vec{C}=\vec{y}_0$.
Подставим это в $\textcircled{*}$, получим $\textcircled{3}$

2-ой шаг Докажем существование решения уравнения $\textcircled{3}$.
$$\vec{y}(t)=\vec{y}_0+\int_{t_0}^{t}[A(\tau)\vec{y}(\tau)+\vec{f}(\tau)]d\tau \quad \textcircled{3}$$
Введем в рассмотрение последовательность функций
$$\vec{y}_0(t)=\vec{y}_0,\quad \vec{y}_1=\vec{y}_0+\int_{t_0}^{t}[A(\tau)\vec{y}_0+\vec{f}(\tau)]d\tau,$$
$$\vec{y}_2(t)=\vec{y}_0+\int_{t_0}^{t}[A(\tau)\vec{y}_1(\tau)+\vec{f}(\tau)]d\tau,$$
$$\vdots$$
$$\vec{y}_n(t)=\vec{y}_0+\int_{t_0}^{t}[A(\tau)\vec{y}_{n-1}(\tau)+\vec{f}(\tau)]d\tau,\ \ldots$$

Докажем, что $\exists\, \vec{y}_n(t) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$

Рассмотрим

$$\|\vec{y}_1-\vec{y}_0\| = \|\int_a^b [A(\tau)\vec{y}_0+\vec{f}(\tau)]d\tau\| \le$$

$$\le \max_{t\in[a,b]} |\int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\vec{y}_0+\vec{f}(\tau)\|d\tau| = M$$

Рассмотрим $\|\vec{y}_2(t)-\vec{y}_1(t)\| = \|\int_{t_0}^{t}[A(\tau)(\vec{y}_1(\tau)-\vec{y}_0)]d\tau \le$

$$\le |\int_{t_0}^{t}\|A(\tau)\|\cdot\|\vec{y}_1-\vec{y}_0\|d\tau\| \le \max_{t\in[a,b]} \|A(\tau)\|\cdot\|\vec{y}_1-\vec{y}_0\|\cdot|\int_{t_0}^{t}d\tau| \le$$

$$\le \alpha\cdot M|\int_{t_0}^{t}d\tau| = \frac{\alpha M(t-t_0)}{1!}, \text{ где } \alpha = \max_{t\in[a,b]}\|A(\tau)\|$$

Методом математической индукции нетрудно доказать, что

$$\|\vec{y}_{n+1}(t)-\vec{y}_n(t)\| \le \frac{M[\alpha(t-t_0)]^n}{n!} \qquad (*)$$

Рассмотрим функциональный ряд

$$\vec{y}_0+(\vec{y}_1-\vec{y}_0)+(\vec{y}_2(t)-\vec{y}_1(t))+\dots+(\vec{y}_{n+1}(t)-\vec{y}_n(t))+\dots =$$

$$=\vec{\varphi}_1(t)+\vec{\varphi}_2(t)+\dots+\vec{\varphi}_n(t)+\dots \qquad (**)$$

где $\vec{\varphi}_k(t) = \vec{y}_{k+1}(t)-\vec{y}_k(t)$, $k=0,1,2,\dots,n,\dots$

Легко заметить, что частичные суммы $S_{n+1}(t)$ ряда $(**)$ равны $\vec{S}_{n+1}(t) = \vec{y}_n(t)$

В силу $(*)$ имеем $\|\vec{\varphi}_n(t)\|_C = \max_{t\in[a,b]}\|\vec{y}_{n+1}(t)-\vec{y}_n(t)\| \le$

$$\le \frac{M[\alpha(b-a)]^n}{n!}$$

Тогда в силу теоремы Вейерштрасса о равномерной сходимости функционального ряда получаем, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \vec{\varphi}_n(t)$ сходится равномерно на отрезке $[a;b]$

Приведём формулировку теоремы Вейерштрасса.

<u>Теорема (Вейерштрасса)</u> Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве X, если существует сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k$ такой, что $|u_n(x)| \le C_n$ при $x \in X$ для $\forall n \in \mathbb{N}$.

В нашем случае ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \vec{\varphi}_n(t)$ сходится равномерно на $[a;b]$, так как существует сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n$, где

$C_n = \dfrac{M[\alpha(b-a)]^n}{n!}$ такой, что $\|\vec{\varphi}_n(t)\|_C \le C_n$

(Сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n$ следует из того, что

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{M[\alpha(b-a)]^n}{n!} = M \cdot e^{\alpha(b-a)}$).

Так как $\vec{S}_{n+1}(t) = \vec{y}_n(t)$ и ряд (**) сходится равномерно на $[a;b]$ следует, что существует функция $\vec{y}^{\,*}(t)$ такая, что $\vec{y}_n(t) \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} \vec{y}^{\,*}(t)$

Тогда согласно теореме из математического анализа (Теорема Если функциональная последовательность непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $u_n(x)$ ($u_n(x) \in C[a,b]$ для $\forall n \in N$) сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $u(x)$, то $u(x)$ также непрерывна на $[a, b]$, т.е $u(x) \in C[a,b]$) следует, что $\vec{y}^*(t) \in \vec{C}[a,b]$

Перейдём в равенстве

$$\vec{y}_n(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} [A(\tau)\vec{y}_{n-1}(\tau) + \vec{f}(\tau)]d\tau$$

к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\vec{y}^*(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} [A(\tau)\vec{y}^*(\tau) + \vec{f}(\tau)]d\tau \quad (4)$$

где $\vec{y}^*(t) \in \vec{C}[a,b]$

Из равенства (4) следует, что $\vec{y}^*(t)$ – решение уравнения (3).

3-й шаг. Докажем единственность решения уравнения (4). Будем доказывать это методом „от противного".

Предположим, что существует другое решение $\vec{z}(t)$ уравнения (4), то есть

$$\vec{z}(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} [A(\tau)\vec{z}(\tau) + \vec{f}(\tau)]d\tau \quad (5)$$

Докажем, что $\vec{z}(t) \equiv \vec{y}^*(t)$

Для этого из (5) вычтем (A) и получим

$$\|\vec{z} - \vec{y}_{n+1}(t)\| = \left\|\int_{t_0}^{t} A(\tau)[\vec{z}(\tau) - \vec{y}_n(\tau)]d\tau\right\| \qquad (6)$$

Из этого равенства при $n=0$, получим

$$\|\vec{z}(t) - \vec{y}_1(t)\| = \left\|\int_{t_0}^{t} A(\tau)[\vec{z}(\tau) - \vec{y}_0]d\tau\right\| \le$$

$$\le \max_{t\in[a,b]} \left|\int_{t_0}^{t} \|A(\tau)[\vec{z}(t) - \vec{y}_0]\| d\tau\right| = M_1$$

при $n=1$ получим

$$\|\vec{z} - \vec{y}_2(t)\| = \left\|\int_{t_0}^{t} A(\tau)[\vec{z} - \vec{y}_1(\tau)]d\tau\right\| \le$$

$$\le \max_{t\in[a,b]} \|A(\tau)\| \cdot M_1 \left|\int_{t_0}^{t} 1\cdot d\tau\right| = \frac{M_1 \alpha (t - t_0)}{1!}$$

при $n=2$ получим

$$\|\vec{z} - \vec{y}_3(t)\| = \left\|\int_{t_0}^{t} A(\tau)[\vec{z} - \vec{y}_2(\tau)]d\tau\right\| \le$$

$$\le \alpha \cdot \alpha M_1 \cdot \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0) d\tau = \frac{M_1 [\alpha (t - t_0)]^2}{2!}$$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$\|\vec{z}(t) - \vec{y}_{n+1}(t)\| \le \frac{M_1 [\alpha (t - t_0)]^n}{n!} \le \frac{M_1 [\alpha (b - a)]^n}{n!} \qquad (7)$$

Переходя в (7) к пределу при $n \to \infty$, получим $\|\vec{z}(t) - \vec{y}^*(t)\| \le 0$, так как

$\frac{M_1 [\alpha (b-a)]^n}{n!} \to 0$ при $n \to \infty$ (в силу сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1[\alpha(b-a)]^n}{n!} = M_1 e^{\alpha(b-a)}$)

4-ый шаг Оценка погрешности приближенного решения следует из неравенства (7).

§ Однородные системы

$$\vec{y}\,'(t) = A(t)\vec{y}(t) \qquad (1_0)$$

Обозначим через H множество решений однородной системы (1_0). Очевидно, что это множество не пусто, так как $\vec{y}(t) \equiv \vec{0}$ принадлежит H.

Утв. 1 Множество H является линейным пространством.

Док-во Пусть $\vec{y}_1(t) \in H$ и $\vec{y}_2(t) \in H$. Тогда для любых $\alpha, \beta \in R$ рассмотрим $\vec{z}(t) = \alpha\vec{y}_1(t) + \beta\vec{y}_2(t)$. Тогда

$$A\vec{z} = A(\alpha\vec{y}_1 + \beta\vec{y}_2) = \alpha A\vec{y}_1 + \beta A\vec{y}_2 =$$

$$= \alpha\cdot\vec{y}_1\,' + \beta\cdot\vec{y}_2\,' = [\alpha\vec{y}_1(t) + \beta\vec{y}_2(t)]' = \vec{z}\,'(t)$$

Следовательно, $\vec{z}(t) \in H$.

Далее, так как для любого фиксированного t, $\vec{y}_k(t) \in R^n$, то $H \subset R^n$, то есть H — подпространство R^n. Следовательно, H — само является пространством. #

Утв. 2. $\dim H \le n$

Док-во: Докажем, что любые k решений $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \ldots, \vec{y}_k(t)$ при $k>n$ линейно зависимы.

Пусть $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \ldots, \vec{y}_k(t)$, где $k>n$ являются решениями системы (1₀)

Возьмем $t=t_0 \in [a,b]$ и рассмотрим вектора $\vec{y}_1(t_0), \vec{y}_2(t_0), \ldots, \vec{y}_k(t_0)$, $k>n$

Тогда, как известно из линейной алгебры эти вектора линейно зависимы. Следовательно, существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ не все равные нулю одновременно $\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \neq 0\right)$ такие, что

$$\alpha_1 \vec{y}_1(t_0) + \alpha_2 \vec{y}_2(t_0) + \ldots + \alpha_k \vec{y}_k(t_0) = \vec{\theta} \quad (*)$$

Рассмотрим функцию

$$\vec{y}(t) = \alpha_1 \vec{y}_1(t) + \alpha_2 \vec{y}_2(t) + \ldots + \alpha_k \vec{y}_k(t) \quad (**)$$

(с постоянными $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ из $(*)$)

Тогда $\vec{y}(t)$ есть решение уравнения (1₀) и удовлетворяет условию $(*)$, то есть $\vec{y}(t)$ есть решение задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y}\,'(t) = A(t)\vec{y}(t) & (1_0) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{\theta} & (*) \end{cases}$$

Из ТСЕ решения задачи Коши для линейной системы следует, что $\vec{y}(t) \equiv \vec{\theta}$.

Следовательно, $\alpha_1 \vec{y}_1(t) + \alpha_2 \vec{y}_2(t) + \dots + \alpha_k \vec{y}_k(t) \equiv \vec{\theta}$ причём $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \neq 0$. Таким образом, решения $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_k(t), (k > n)$ уравнения (1₀) линейно зависимы #

Утв. 3. $\dim H = n$

Док-во. Возьмем в пространстве R^n произвольный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ и рассмотрим n задач Коши

$$\begin{cases} \vec{y}\,'(t) = A(t)\vec{y}(t) & (1_0) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{e}_k,\ k = \overline{1,n} & (2_k) \end{cases}$$

При $k=1$ существует единственное решение $\vec{y}_1(t)$ задачи Коши (1_0)-(2_1), при $k=2$ существует единственное решение $\vec{y}_2(t)$ задачи Коши (1_0)-(2_2) и так далее, и, наконец, при $k=n$ существует единственное решение $\vec{y}_n(t)$ задачи Коши (1_0)-(2_n).

Таким образом, мы получаем n-решений $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ уравнения (1_0). Докажем, что они линейно независимы.

Будем доказывать это утверждение

методом „от противного".

Пусть $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ — линейно зависимы. Тогда существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R: \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \neq 0\right)$

$$\alpha_1 \vec{y}_1(t) + \alpha_2 \vec{y}_2(t) + \dots + \alpha_n \vec{y}_n(t) \equiv \vec{\theta}$$

Подставляя $t = t_0$ в последнее равенство получим

$$\alpha_1 \vec{y}_1(t_0) + \alpha_2 \vec{y}_2(t_0) + \dots + \alpha_n \vec{y}_n(t_0) = \vec{\theta}$$

или в силу условия (2*) последнее равенство примет вид

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{\theta}$$

причем $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \neq 0$.

Последнее равенство означает, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ линейно зависимы, а это противоречит условию, что $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ являются базисом.

Следовательно, так построенные решения $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ линейно независимы, а любые k решений, где $(k > n)$ линейно зависимы в силу утв. 2.

Следовательно, $\dim H = n$. #

Опр! Любые n-линейно независимых решений системы (1₀) называются фундаментальной системой решений (ФСР) системы (1₀)

Следствие ФСР — есть базис в H, что следует из утв. 3.

Теорема (о общем решении системы (1o))

Пусть $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \ldots, \vec{y}_n(t)$ — есть ФСР системы (1o). Тогда

$$\vec{y}_{oo}(t) = C_1\vec{y}_1(t) + C_2\vec{y}_2(t) + \ldots + C_n\vec{y}_n(t)$$

есть общее решение системы (1o), где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Док-во. 1) Для любых чисел $C_1, C_2, \ldots, C_n$

$\vec{y}(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \vec{y}_k(t)$ является решением системы (1o), что следует из утв. 1

2) Пусть $\vec{y}(t)$ — произвольное решение системы (1o). Так как $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \ldots, \vec{y}_n(t)$ — ФСР системы (1o), то есть $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \ldots, \vec{y}_n(t)$ — базис в H. Тогда из определения базиса следует, что существуют числа $C_1, C_2, \ldots, C_n$ такие что

$$\vec{y}(t) = C_1\vec{y}_1(t) + C_2\vec{y}_2(t) + \ldots + C_n\vec{y}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k\vec{y}_k(t)$$

Таким образом, из 1) и 2) следует, что

$$\vec{y}_{oo}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k\vec{y}_k(t) \text{ — общее решение}$$

системы (1о).

Опр.) Пусть $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \ldots, \vec{y}_n(t)$ — ФСР системы (1о). Тогда матрица $Y(t)=[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n]=$

$$=\begin{bmatrix} y_{11}(t) & \cdots & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & \cdots & y_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(t) & \cdots & y_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

называется фундаментальной матрицей системы (1о)

где $\vec{y}_k(t)=\begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{nk} \end{bmatrix}$, $k=\overline{1,n}$

§ Свойства фундаментальной матрицы

1) $\det Y(t)\neq 0$ для $\forall t\in\langle a,b\rangle$, то есть $\exists\ Y^{-1}(t)$ для $\forall t\in\langle a,b\rangle$.

2) Матрица $Y(t)$ удовлетворяет уравнению $Y'(t)=A(t)Y(t)$

3) Общее решение системы (1о) можно записать в виде
$$\vec{y}_{oo}(t)=Y(t)\vec{C},\ \text{где}\ \vec{C}=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$ — произвольный вектор.

Док-во. 1) Докажем это утверждение методом „от противного".
Пусть существует $t_0\in[a,b]$ такое, что $\det Y(t_0)=0$. Тогда вектора $\vec{y}_1(t_0), \vec{y}_2(t_0), \ldots, \vec{y}_n(t_0)$ — линейно зависимы

Следовательно, существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такие что $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \neq 0$ и такие что

$$\alpha_1 \vec{y}_1(t_0) + \alpha_2 \vec{y}_2(t_0) + \dots + \alpha_n \vec{y}_n(t_0) = \vec{\theta} \quad (*)$$

Рассмотрим функцию

$$\vec{y}(t) = \alpha_1 \vec{y}_1(t) + \alpha_2 \vec{y}_2(t) + \dots + \alpha_n \vec{y}_n(t)$$

(где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ найденные выше числа).

Тогда $\vec{y}(t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y}\,'(t) = A(t)\vec{y}(t) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{\theta} \end{cases}$$

Из ТСЕ решения задачи Коши для линейной системы следует, что $\vec{y}(t) \equiv \vec{\theta}$

то есть $\alpha_1 \vec{y}_1(t) + \alpha_2 \vec{y}_2(t) + \dots + \alpha_n \vec{y}_n(t) \equiv \vec{\theta}$

причём $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \neq 0$.

Следовательно, $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ линейно зависимы, что противоречит тому, что $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ — ФСР системы (1₀). Полученное противоречие и доказывает справедливость 1).

2) и 3) очевидны #