Интерполяционный многочлен Ньютона

11

Пример 3.1. Построить интерполяционный полином Лагранжа, совпадающий с функцией $f(x)=3^x$, $x\in[-1,1]$ в точках $x_0=-1, x_1=0,$ $x_2=1$. Вычислить значение сеточной функции и оценить погрешность интерполяции в точке $x^*=0{,}5$.

Р е ш е н и е.

Составим сеточную функцию и занесем ее в таблицу. Поскольку $n=2$, то необходимо построить интерполяционный полином $L_2(x)$.

x_i	$x_0=-1$	$x_1=0$	$x_2=1$
y_i	$y_0=1/3$	$y_1=1$	$y_2=3$

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} =$$

$= \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$. Проверим условия интерполяции $L_2(-1) = 1/3$; $L_2(0) = 1$; $L_2(1) = 3$.

Значение сеточной функции в точке $x^* = 0{,}5$ вычислим по интерполяционному многочлену $y(0{,}5) \approx L_2(0{,}5) = 1{,}8333$.

Погрешностью интерполяции называется модуль разности значений аппроксимируемой функции и ее интерполяционного полинома

$$R_n(x) = \left| f(x) - L_n(x) \right|.$$

Применимость этой формулы ограничена. Действительно, если значение $f(x)$ известно точно, то необходимость в аппроксимации отпадает и вопрос о погрешности интерполяции беспредметен.

Вернёмся к примеру и посчитаем погрешность

Поскольку функция $f(x) = 3^x$ известна, то можно вычислить точное значение абсолютной погрешности в точке $x^* = 0{,}5$

$$\left|3^{x^*} - L_2(x^*)\right| = \left|3^{0,5} - \left(\frac{2}{3} \cdot 0{,}25 + \frac{4}{5} \cdot 0{,}5 + 1\right)\right| = 0{,}1012,$$

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Пусть на отрезке $[a,b]$ задано множество несовпадающих точек x_i (интерполяционных узлов), в которых известны значения функции $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

Приближающая функция $\varphi(x,a)$ такая, что выполняются равенства

$$\varphi(x_i, a_0, \ldots, a_n) = f(x_i) = f_i,\ i = 0, \ldots, n. \qquad (3.1)$$

называется интерполяционной.

Наиболее часто в качестве приближающей функции используют многочлены степени n.:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad (3.2)$$

Подставляя в (3.2) значения узлов интерполяции и используя условие $P_n(x_i) = f_i$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_i:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = f_k \,,\ k = 0, \ldots, n \,, \qquad (3.3)$$

которая, в случае несовпадения узлов интерполяции имеет единственное решение.

Для нахождения интерполяционного многочлена не обязательно решать систему (3.3). Произвольный многочлен может быть записан в виде:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \; l_i(x) \,. \qquad (3.4)$$

Здесь $l_i(x)$ – многочлены степени n, так называемые лагранжевы многочлены влияния, которые удовлетворяют условию $l_i(x_j) = \begin{cases} 1, \text{при } i = j, \\ 0, \text{при } i \neq j. \end{cases}$ и, соответственно, $l_i(x) = \prod\limits_{j=0,\ j\neq i}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_i - x_j)}$, а интерполяционный многочлен (3.4) запишется в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_i - x_j)}. \tag{3.5}$$

Интерполяционный многочлен, записанный в форме (3.5), называется интерполяционным многочленом Лагранжа.

Если ввести функцию $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n) = \prod\limits_{i=0}^{n}(x - x_i)$, то выражение для интерполяционного многочлена Лагранжа примет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\,\omega'_{n+1}(x_i)}. \tag{3.6}$$

Недостатком интерполяционного многочлена Лагранжа является необходимость полного пересчета всех коэффициентов в случае добавления дополнительных интерполяционных узлов. Чтобы избежать указанного недостатка используют интерполяционный многочлен в форме Ньютона.

Введем понятие разделенной разности. Разделенные разности нулевого порядка совпадают со значениями функции в узлах. Разделенные разности первого порядка обозначаются $f(x_i, x_j)$ и определяются через разделенные разности нулевого порядка:

$$f(x_i, x_j) = \frac{f_i - f_j}{x_i - x_j},$$

разделенные разности второго порядка определяются через разделенные разности первого порядка:

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_i, x_j) - f(x_j, x_k)}{x_i - x_k}.$$

Разделенная разность порядка $n-k+2$ определяется соотношениями

$$f(x_i, x_j, x_k, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_i, x_j, x_k, \ldots, x_{n-1}) - f(x_j, x_k, \ldots, x_n)}{x_i - x_n}. \quad (3.7)$$

Таким образом, для $(n+1)$-й точки могут быть построены разделенные разности до n-го порядка; разделенные разности более высоких порядков равны нулю.

Пусть известны значения аппроксимируемой функции $f(x)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Интерполяционный многочлен, значения которого в узлах интерполяции совпадают со значениями функции $f(x)$ может быть записан в виде:

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_1, x_0) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \ldots + \\ + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n) f(x_0, x_1, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Запись многочлена в формуле (3.8) есть так называемый интерполяционный многочлен Ньютона. Если функция $f(x)$ не есть многочлен n-й степени, то формула (3.8) для $P_n(x)$ приближает функцию $f(x)$ с некоторой погрешностью. Отметим, что при добавлении новых узлов первые члены многочлена Ньютона остаются неизменными.

Если функция задана в точках $x_0, x_1, ..., x_n$, то при построении интерполяционного многочлена Ньютона удобно пользоваться таблицей, называемой таблицей разделенных разностей, пример которой для $n = 4$ приведен в табл. 3.1.

Таблица 3.1

x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f(x_0, x_1)$			
x_2	$f(x_2)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_0, x_1, x_2)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$
x_3	$f(x_3)$	$f(x_2, x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	
x_4	$f(x_4)$	$f(x_3, x_4)$	$f(x_2, x_3, x_4)$		

Пример 4.4. Построить многочлен Ньютона третьей степени для сеточной функции, заданной табл. 4.7. Вычислить значение функции в точке $x_* = 2{,}5$. Решить задачу интерполяции при включении одного дополнительного значения сеточной функции: $f(1) = 5$.

Таблица 4.7

i	0	1	2	3
x_i	2	3	4	5
$f(x_i) = f_i$	7	5	8	7

$$N_n(x) = f_0 + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \tag{4.32}$$

$$+ f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}).$$

❑ Построим многочлен Ньютона (4.32), справедливый для произвольного расположения узлов. Для этого составим табл. 4.8, аналогичную табл. 4.5:

$$f(x_0,x_1)=\frac{5-7}{3-2}=-2;\qquad f(x_1,x_2)=\frac{8-5}{4-3}=3;\qquad f(x_2,x_3)=\frac{7-8}{5-4}=-1;$$

$$f(x_0,x_1,x_2)=\frac{3-(-2)}{4-2}=\frac{5}{2};\quad f(x_1,x_2,x_3)=\frac{-1-3}{5-3}=-2;\quad f(x_0,x_1,x_2,x_3)=\frac{-2-\frac{5}{2}}{5-2}=-\frac{3}{2}.$$

Таблица 4.8

x_i	f_i	$f(x_j,x_{j+1})$	$f(x_j,x_{j+1},x_{j+2})$	$f(x_j,x_{j+1},x_{j+2},x_{j+3})$
2	7			
		-2		
			$\frac{5}{2}$	
3	5			$-\frac{3}{2}$
		3		
			-2	
4	8			
		-1		
5	7			

По формуле (4.32) для $n = 3$ имеем

$$N_3(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)\, f(x_0, x_1, x_2) +$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\, f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 7 + (x-2)\cdot(-2) + (x-2)\cdot(x-3)\cdot\frac{5}{2} +$$

$$+ (x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}x^3 + 16x^2 - \frac{107}{2}x + 62.$$