

Интерполяционный многочлен Ньютона

11



Пример 3.1. Построить интерполяционный полином Лагранжа, совпадающий с функцией $f(x) = 3^x$, $x \in [-1, 1]$ в точках $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$. Вычислить значение сеточной функции и оценить погрешность интерполяции в точке $x^* = 0,5$.

Решение.

Составим сеточную функцию и занесем ее в таблицу. Поскольку $n = 2$, то необходимо построить интерполяционный полином $L_2(x)$.

x_i	$x_0 = -1$	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$
y_i	$y_0 = 1/3$	$y_1 = 1$	$y_2 = 3$

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1. \text{ Проверим условия интерполяции } L_2(-1) = 1/3; L_2(0) = 1; L_2(1) = 3.$$

Значение сеточной функции в точке $x^* = 0,5$ вычислим по интерполяционному многочлену $y(0,5) \approx L_2(0,5) = 1,8333$.

Погрешностью интерполяции называется модуль разности значений аппроксимируемой функции и ее интерполяционного полинома

$$R_n(x) = |f(x) - L_n(x)|.$$

Применимость этой формулы ограничена. Действительно, если значение $f(x)$ известно точно, то необходимость в аппроксимации отпадает и вопрос о погрешности интерполяции беспредметен.

Вернёмся к примеру и посчитаем погрешность

Поскольку функция $f(x) = 3^x$ известна, то можно вычислить точное значение абсолютной погрешности в точке $x^* = 0,5$

$$\left| 3^{x^*} - L_2(x^*) \right| = \left| 3^{0,5} - \left(\frac{2}{3} \cdot 0,25 + \frac{4}{5} \cdot 0,5 + 1 \right) \right| = 0,1012,$$

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Пусть на отрезке $[a, b]$ задано множество несовпадающих точек x_i (интерполяционных узлов), в которых известны значения функции $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$.

Приближающая функция $\varphi(x, a)$ такая, что выполняются равенства

$$\varphi(x_i, a_0, \dots, a_n) = f(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n. \quad (3.1)$$

называется интерполяционной.

Наиболее часто в качестве приближающей функции используют многочлены степени n :

$$P_n(x) = \sum_{l=0}^n a_l x^l \quad (3.2)$$

Подставляя в (3.2) значения узлов интерполяции и используя условие $P_n(x_i) = f_i$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_i :

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = f_k, \quad k = 0, \dots, n, \quad (3.3)$$

которая, в случае несовпадения узлов интерполяции имеет единственное решение.

Для нахождения интерполяционного многочлена не обязательно решать систему (3.3). Произвольный многочлен может быть записан в виде:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x). \quad (3.4)$$

Здесь $l_i(x)$ – многочлены степени n , так называемые лагранжевы многочлены влияния, которые удовлетворяют условию $l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases}$ и, соответственно,

$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$, а интерполяционный многочлен (3.4) запишется в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}. \quad (3.5)$$

Интерполяционный многочлен, записанный в форме (3.5), называется интерполяционным многочленом Лагранжа.

Если ввести функцию $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, то выражение

для интерполяционного многочлена Лагранжа примет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i) \omega'_{n+1}(x_i)}. \quad (3.6)$$

Недостатком интерполяционного многочлена Лагранжа является необходимость полного пересчета всех коэффициентов в случае добавления дополнительных интерполяционных узлов. Чтобы избежать указанного недостатка используют интерполяционный многочлен в форме Ньютона.

Введем понятие разделенной разности. Разделенные разности нулевого порядка совпадают со значениями функции в узлах. Разделенные разности первого порядка обозначаются $f(x_i, x_j)$ и определяются через разделенные разности нулевого порядка:

$$f(x_i, x_j) = \frac{f_i - f_j}{x_i - x_j},$$

разделенные разности второго порядка определяются через разделенные разности первого порядка:

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_i, x_j) - f(x_j, x_k)}{x_i - x_k}.$$

Разделенная разность порядка $n - k + 2$ определяется соотношениями

$$f(x_i, x_j, x_k, \dots, x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_i, x_j, x_k, \dots, x_{n-1}) - f(x_j, x_k, \dots, x_n)}{x_i - x_n}. \quad (3.7)$$

Таким образом, для $(n + 1)$ -й точки могут быть построены разделенные разности до n -го порядка; разделенные разности более высоких порядков равны нулю.

Пусть известны значения аппроксимируемой функции $f(x)$ в точках x_0, x_1, \dots, x_n .

Интерполяционный многочлен, значения которого в узлах интерполяции совпадают со значениями функции $f(x)$ может быть записан в виде:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_1, x_0) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n). \quad (3.8)$$

Запись многочлена в формуле (3.8) есть так называемый интерполяционный многочлен Ньютона. Если функция $f(x)$ не есть многочлен n -й степени, то формула (3.8) для $P_n(x)$ приближает функцию $f(x)$ с некоторой погрешностью. Отметим, что при добавлении новых узлов первые члены многочлена Ньютона остаются неизменными.

Если функция задана в точках x_0, x_1, \dots, x_n , то при построении интерполяционного многочлена Ньютона удобно пользоваться таблицей, называемой таблицей разделенных разностей, пример которой для $n = 4$ приведен в табл. 3.1.

Таблица 3.1

x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f(x_0, x_1)$			
x_2	$f(x_2)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_0, x_1, x_2)$		
x_3	$f(x_3)$	$f(x_2, x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$	
x_4	$f(x_4)$	$f(x_3, x_4)$	$f(x_2, x_3, x_4)$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$

Пример 4.4. Построить многочлен Ньютона третьей степени для сеточной функции, заданной табл. 4.7. Вычислить значение функции в точке $x_* = 2,5$. Решить задачу интерполяции при включении одного дополнительного значения сеточной функции: $f(1) = 5$.

Таблица 4.7

i	0	1	2	3
x_i	2	3	4	5
$f(x_i) = f_i$	7	5	8	7

$$\begin{aligned}
 N_n(x) = & f_0 + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\
 & + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}).
 \end{aligned}
 \tag{4.32}$$

□ Построим многочлен Ньютона (4.32), справедливый для произвольного расположения узлов. Для этого составим табл. 4.8, аналогичную табл. 4.5:

$$f(x_0, x_1) = \frac{5-7}{3-2} = -2; \quad f(x_1, x_2) = \frac{8-5}{4-3} = 3; \quad f(x_2, x_3) = \frac{7-8}{5-4} = -1;$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{3 - (-2)}{4 - 2} = \frac{5}{2}; \quad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{-1 - 3}{5 - 3} = -2; \quad f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{-2 - \frac{5}{2}}{5 - 2} = -\frac{3}{2}.$$

Таблица 4.8

x_i	f_i	$f(x_j, x_{j+1})$	$f(x_j, x_{j+1}, x_{j+2})$	$f(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3})$
<u>2</u>	7			
3	5	-2		
<u>4</u>	8	3	$\frac{5}{2}$	
<u>5</u>	7	-1	-2	$-\frac{3}{2}$

По формуле (4.32) для $n = 3$ имеем

$$\begin{aligned} N_3(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 7 + (x - 2) \cdot (-2) + (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot \frac{5}{2} + \\ &+ (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}x^3 + 16x^2 - \frac{107}{2}x + 62. \end{aligned}$$