Лекция № 12
Механические колебания и волны

Алексей Викторович
Гуденко

10/05/2018

План лекции

- Свободные незатухающие гармонические колебания:
  1. Пружинный маятник
  2. Математический маятник
  3. Крутильный маятник
  4. Физический маятник
- Затухающие колебания с вязким трением.
- Вынужденные колебания. Резонанс.
- Параметрический резонанс.
- Решение задач
- Волны в упругих средах

Демонстрации

- Автоколебания
- Резонанс камертонов
- Параметрический резонанс
- Маятник Капицы
- Волна в массивной пружине

Колебательные процессы

- **Колебание – изменение состояния системы по периодическому или почти периодическому закону**: маятник часов, груз на пружине, гитарная струна, давление воздуха в звуковой волне.
- **Свободные (или собственные) колебания**: колебания в системе, предоставленной самой себе: шарик в лунке, груз на нити.
- **Вынужденные колебания –** колебания под действием **внешней** периодической силы: вибрации моста, качели.
- Автоколебания, параметрические колебания (часы, качели)

Свободные незатухающие гармонические колебания. Пружинный маятник

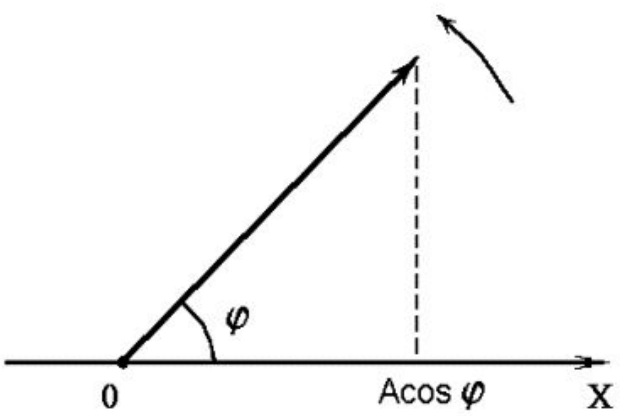
- $mx'' = -kx \Rightarrow mx'' + kx = 0 \Rightarrow$
- $x'' + \omega_0^2 x = 0$ – дифференциальное уравнение гармонических колебаний ($\omega_0^2 = k/m$)
- $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ – гармоническое колебание
  A – амплитуда колебаний
  ω_0 – циклическая частота
  φ_0 – начальная фаза
  $\omega_0 t + \varphi_0$ – фаза колебаний
- $T = 2\pi/\omega_0$ – период колебаний
- **Изохронность:** ω_0, T – определяются только свойствами системы и не зависит от амплитуды.
- $F = -kx$ – **квазиупругая возвращающая** сила

Скорость и ускорение при гармонических колебаниях

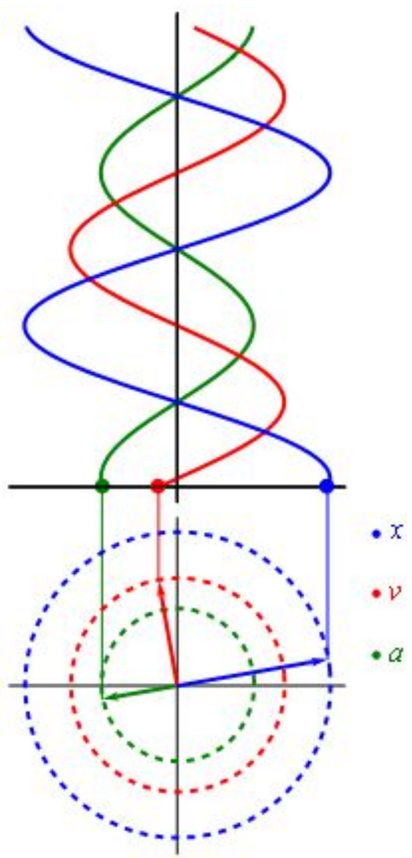
- Смещение:
  $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$
- Скорость:
  $v = x' = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2)$;
  $v_0 = \omega_0 A$ – амплитуда скорости;
  скорость опережает смещение x по фазе на π/2.
- Ускорение
  $a = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$
  $a_0 = \omega_0^2 A$ – амплитуда ускорения;
  ускорение в противофазе со смещением

Векторная диаграмма

- Векторная диаграмма:
  $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ - проекция на ось OX вектора длиной A, вращающегося против часовой стрелки с угловой скоростью ω от начального положения φ_0



Векторная диаграмма гармонических колебаний (картинка)



- Смещение: $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$
- Скорость: $v = x' = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2)$; *опережает смещение x по фазе на π/2.*
- $a = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$ *ускорение в противофазе со смещением*

Энергия гармонических колебаний

- **Потенциальная энергия**:
  $\Pi = kx^2/2 = ½kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$
- **Кинетическая энергия:**
  $K = mv^2/2 = ½m\omega_0^2A^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$
  $½kA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$
- **Полная энергия:**
  $E = \Pi + K = const = ½kA^2 = ½mv_0^2$
- Для гармонических колебаний:
  $\langle K \rangle = \langle \Pi \rangle = ½E$

Задача 10.1
Фазовая траектория – эллипс: $x^2/A^2 + v^2/v_0^2 = 1$

- **Задача 10.1.** Нарисуйте характерный график зависимости координаты x тела, совершающего гармонические колебания без затухания от его скорости x' (фазовая траектория) для нескольких значений энергии системы. То же самое для осциллятора с затуханием.

  Решение:

  $x = A\cos\omega t$; $v = x' = -\omega A\sin\omega t \rightarrow kx^2/2 + mx'^2/2 = E \rightarrow$
  $\mathbf{x^2/(2E/k) + x'^2/(2E/m) = 1}$ – эллипс с п/осями $a = (2E/k)^{1/2}$; $b = (2E/m)^{1/2}$

  Затухание $A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$; $2\gamma = \beta/m$; β – коэффициент вязкого трения: $f_{тр} = -\beta v$

Период колебаний: энергетический метод для колебательных систем с одной степенью свободы

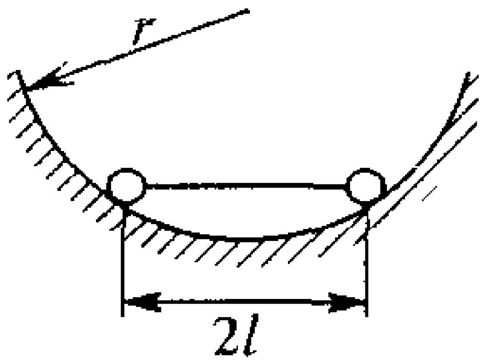
- q – обобщённая координата (смещение, угол поворота, заряд на конденсаторе)
  q' – обобщённая скорость (скорость смещения, угловая скорость, электрический ток)
- Уравнение энергии: $\frac{1}{2}\alpha q^2 + \frac{1}{2}\beta q'^2 = const$
  $П = \frac{1}{2}\alpha q^2$ – потенциальная энергия
  $K = \frac{1}{2}\beta q'^2$ – кинетическая энергия
  $\omega^2 = \alpha/\beta$ – циклическая частота
  α – эффективная жёсткость системы
  β – инерционность системы

Математический маятник

- Математический маятник – материальная точка на нерастяжимой лёгкой нити в поле тяжести Земли.
- Энергетический метод:
  θ – угол отклонения нити от вертикали (обобщённая координата).
  1. Потенциальная энергия:
     $П = mgL(1 – \cos\theta) \approx ½\ mgL\theta^2 = ½\ к\theta^2$
     $k = mgL$ – эффективная жёсткость
  2. Кинетическая энергия:
     $K = ½\ m(L\theta')^2 = ½\ mL^2\,\theta'^2 = ½\ \mu\theta'^2$
     $\mu = mL^2$ – инерционность системы
  3. Уравнение колебаний: $½к\theta^2 + ½\ \mu\theta'^2 = const$
  4. $\omega_0^2 = к/\mu = g/L$; $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi(L/g)^{1/2}$

Задача 10.5

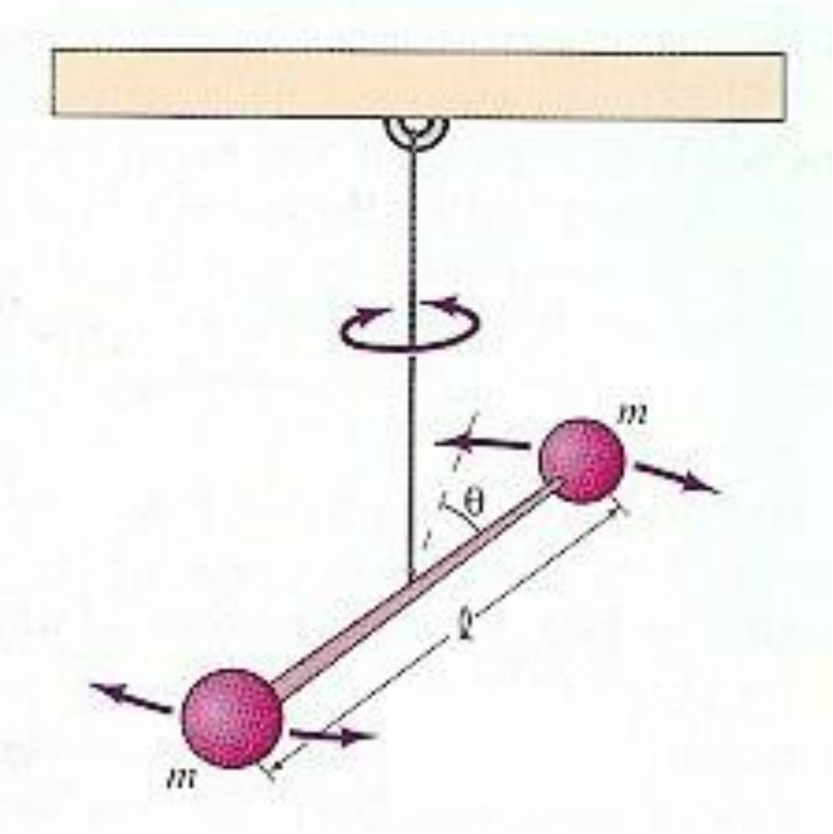
- Гантель длины 2ℓ скользит без трения по сферической поверхности радиуса R. Гантель представляет собой две точечные массы, соединённые невесомым стержнем. Вычислить период малых колебаний при движении:
  а) в перпендикулярном плоскости рисунка направлении;
  б) в плоскости рисунка.



Решение

- *Решение:*
  b) $П = 2mgr(1 – \cos\alpha) = ½ (2mgr\varphi^2) = ½(2mg\varphi^2(R^2 - \ell^2)^{1/2;}$
  $K = 2mR^2\varphi'^2/2 \rightarrow$ жёсткость $\alpha = 2mg(R^2 - \ell^2)^{1/2}$;
  инерционность $\beta = 2mR^2 \rightarrow$
  $\omega^2 = \alpha/\beta = g(R^2 - \ell^2)^{1/2}/R^2$ //ответ
- a) $r = (R^2 - \ell^2)^{1/2} \rightarrow$
  потенциальная энергия: $П = ½ (2mgr\varphi^2) \rightarrow$
  жёсткость $\alpha = 2mgr$;
  кинетическая энергия $K = ½ (2mr^2\varphi'^2) \rightarrow$
  инерционность $\beta = 2mr^2 \rightarrow$
  $\omega_0^2 = \alpha/\beta = g/r = g/(R^2 - \ell^2)^{1/2}$ //ответ

Крутильный маятник



Крутильные колебания

- Диск на упругой нити:
  Момент упругих сил $M_z = - k\theta$, k – коэффициент “крутильной” жёсткости
- $I_0\theta'' = - k\theta \Rightarrow \theta'' + (k/I_0)\theta = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = k/I_0$

Физический маятник

- Физический маятник - твёрдое тело, совершающее колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси.
- Энергетический метод:

1. Потенциальная энергия:
   $П = mga(1 – \cos\theta) \approx ½\ mga\theta^2$
2. Кинетическая энергия:
   $K = ½I\theta'^2$, $I = I_c + ma^2$ - момент инерции относительно оси О
3. Уравнение колебаний: $½mga\theta^2 + ½\ I\theta'^2 = const$
4. $\omega_0^2 = mga/I$; $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi(I/mga)^{1/2}$

Приведённая длина. Центр качания. Теорема Гюйгенса. Оборотный маятник и измерение g

- $L_{пр} = I/ma$ – длина математического маятника с тем же периодом колебаний
- $L_{пр} = I/ma = (I_c + ma^2)/ma = a + I_c/ma$
- Центр качания O’ расположен на прямой OC расстоянии $L_{пр}$ от точки подвеса O
- **Теорема Гюйгенса**
  Точка подвеса и центр качания являются “сопряжёнными” точками: если маятник подвесить за центр качания, то его период не изменится.
  Доказательство: $L_{пр} = a + I_c/ma \Rightarrow a^2 - L_{пр}a + I_c/m = 0 \Rightarrow$
  $a_1 + a_2 = L_{пр}$
- Оборотный маятник и измерение g: экспериментально определяют расстояние между сопряжёнными точками $OO' = L_{пр}$ и рассчитывают g по формуле: $g = L_{пр}\omega_0^2$

Задача 10.3

- **10.3**. Найти период колебаний однородного стержня длины $\ell = 50$ см, если ось вращения проходит через точку, находящуюся на расстоянии $d = 10$ см от его верхнего конца.
- *Решение:*
  $a = \frac{1}{2}\ell - d = 15$ см
  $T = 2\pi(I/mа)^{1/2} = 2\pi((I_c + ma^2)/mag)^{1/2} =$
  $2\pi((I_c/ma + a)/g)^{1/2} \rightarrow$
  $\ell_{пр} = I_c/ma + a = \ell^2/12a + a \approx 14 + 15 = 29$ см. $\rightarrow$
  $T = 2\pi(\ell_{пр}/g)^{1/2} = 1{,}08$ с //ответ

Затухающие колебания

- Сила вязкого трения $F_{тр} = -\beta v$
- $mx'' = - kx - \beta v \Rightarrow mx'' + \beta v + kx = 0 \Rightarrow$
  $x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0$ - дифференциальное уравнение колебаний с затуханием;
  $\gamma = \beta/2m$ – коэффициент затухания
  $\omega_0^2 = k/m$ – собственная частота
- если $\gamma < \omega_0$, то
  $x = a_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi_0)$,
  $\omega = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$ – частота затухающих колебаний;
  $a_0 e^{-\gamma t}$ – амплитуда затухающих колебаний

Характеристики затухающих колебаний

- Время релаксации τ – это время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в е раз:
  $\tau = 1/\gamma$
- Логарифмический декремент затухания:
  $\lambda = \ln[a(t)/a(t+T)] = \gamma T = T/\tau$
- Число колебаний, за которое амплитуда уменьшается в е раз
  $N_e = \tau/T = 1/\lambda$
- Слабое затухание $N_e = \tau/T = \omega/2\pi\gamma >> 1 \Rightarrow$
  $\gamma << \omega \approx \omega_0$

Диссипация энергии. Добротность

- $dE/dt = -\beta v^2$ - мощность силы трения
- $dE/dt = -\beta v^2 = -(2\beta/m)(mv^2/2) = -4\gamma K$
- Слабое затухание: $\gamma \ll \omega_0 \Rightarrow \langle K\rangle = \frac{1}{2} E \Rightarrow$ $d\langle E\rangle/dt = -2\gamma\langle E\rangle \Rightarrow E = E_0 e^{-2\gamma t}$
- Убыль энергии за период $\Delta E_T = 2\gamma T E$
- Убыль энергии при изменении фазы на 1 рад: $\Delta E = \Delta E_T/2\pi = (2\gamma/\omega)E_0$
- Добротность: $Q = E/\Delta E = \omega/2\gamma = \pi N_e$

Задача 10.2

- Зная период колебаний T и время уменьшения амплитуды колебаний в 2 раза τ, найдите добротность колебательной системы.

  Решение:

  $A = A_0 e^{-\gamma t} \rightarrow \gamma = \ell n2/\tau \rightarrow$

  $Q = \omega_0/2\gamma = \pi\tau/T\ell n2$ //ответ

Задача 10.4

- Свободные колебания математического маятника массы m, длиной ℓ испытывают затухание из-за трения о воздух. Сила трения пропорциональна скорости с коэффициентом пропорциональности β. Для поддержания колебаний маятник раскачивают периодическими толчками — один раз за период в момент максимального отклонения маятника ему сообщают дополнительную скорость u. Найдите значение u, при котором амплитуда колебаний A маятника будет стационарна, и нарисуйте фазовую траекторию для этого случая.

Решение 10.4

- $A = A_0 e^{-\gamma t} \rightarrow \Delta A = A_0\gamma T \rightarrow \Delta E = kA_0\Delta A = mu^2/2 \rightarrow u^2 = 2\omega_0{}^2 A_0 \Delta A = 2\omega_0{}^2 A_0{}^2 \gamma T = 4\pi\gamma\omega_0 A_0{}^2 = 2\pi\beta\omega_0 A_0{}^2/m \rightarrow$
  $u = A_0(2\pi\ \omega_0\ \beta/m)$ $(\omega_0 = (g/\ell)^{1/2})$ //ответ
- Энергетический подход:
  $\Delta W = 2\pi W/Q = 2\pi k A^2 2\gamma/\omega_0 = 2\pi k A^2 \beta/m\omega_0 = 2\pi\omega_0 A^2\beta = mu^2/2 \rightarrow$
  $u = A_0(2\pi\ \omega_0\ \beta/m)$ //ответ
- Фазовая траектория: $\Delta A/A_0 = 2\gamma T \rightarrow u/v_0 = (2{*}2\gamma T)^{1/2} \rightarrow u = A_0(2\pi\ \omega_0\ \beta/m)$ //ответ

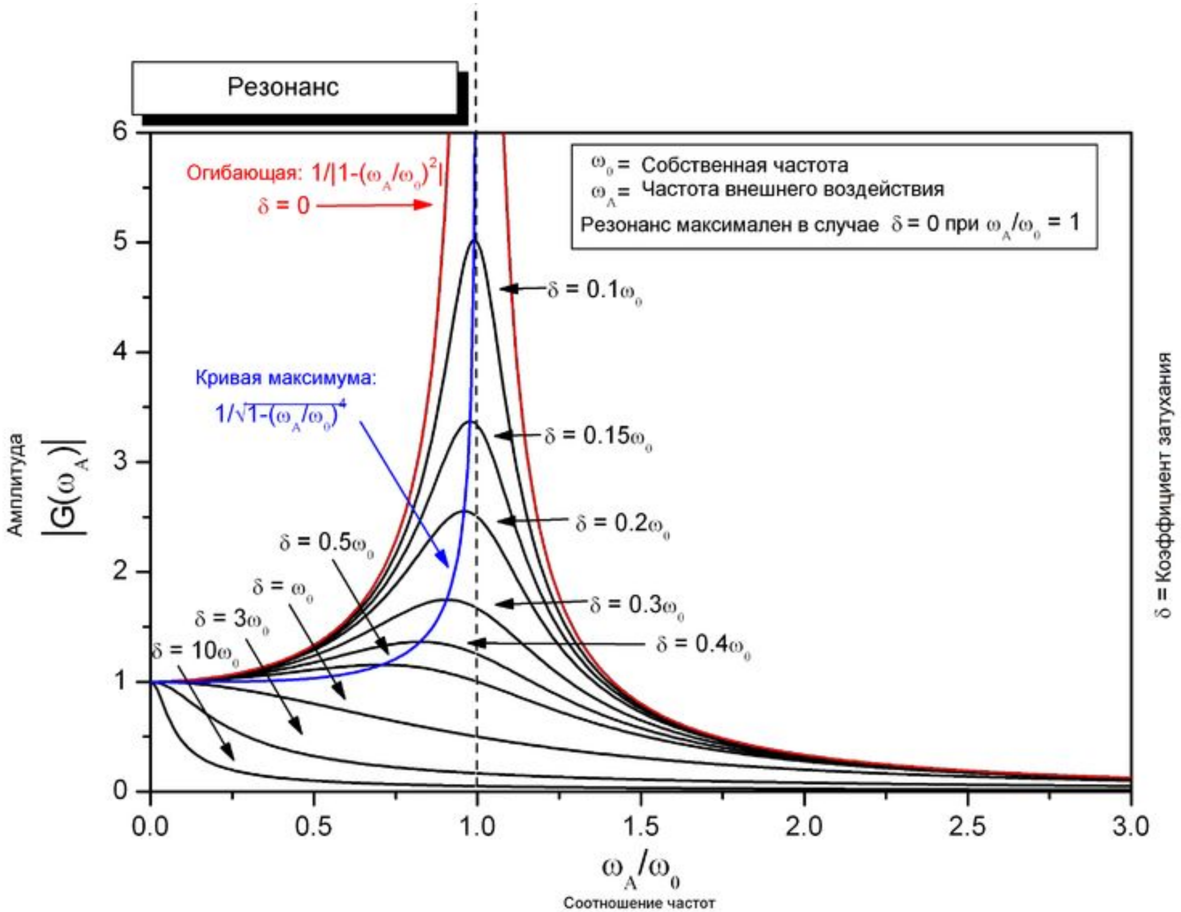
Вынужденные колебания. Векторные диаграммы. Резонанс

- $mx'' + \beta v + kx = F\cos\omega t$ ⇨
- $x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = f\cos\omega t$, $f = F/m$
- Вынужденные колебания ищем в виде:
  $x = B\cos(\omega t + \varphi)$
- Векторная диаграмма:
  $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ проекция на ось OX радиус-вектора длиной A, вращающегося против часовой стрелки с угловой скоростью ω от начального положения φ_0

Вынужденные колебания. Векторные диаграммы. Резонанс

- Из векторной диаграммы:
  - амплитуда
    $B = f/((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2)^{1/2}$
  - Фаза
    $\mathrm{tg}\,\varphi = 2\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$
- В резонансе (при малых γ)
  $B_{max} \approx B(\omega_0) = f/2\gamma\omega_0 \Rightarrow B_{max}/B_{стат} = \omega_0/2\gamma = Q$
- Вблизи резонанса:
  $B = B_{max}\gamma/((\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2)^{1/2} \Rightarrow$ ширина резонансной кривой $\Delta\Omega = 2\gamma$

Резонансная кривая
$B = B_{max}\gamma/((\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2)^{1/2}$



Параметрический резонанс

- Параметрический резонанс - возбуждение незатухающих колебаний периодическим изменением параметров колебательной системы
- Пример: маятник с изменяющейся длиной (качели)

1. Работа против тяжести:
   $A_1 = mg\Delta h(1 - \cos\varphi_0) \approx \frac{1}{2} mg\Delta h\varphi_0^2 = \frac{1}{2} mv_0^2\,\Delta h/L$
2. Работа против центробежной силы:
   $A_2 = mv_0^2\Delta h/L$
3. приращение энергии за период:
   $\Delta E = 2(A_1 + A_2) = 6\,\Delta h/L\;mv_0^2/2$
4. $dE/dt = 6\,\Delta h/L\;E/T = E/\tau \Rightarrow E = E_0 e^{t/\tau}$

Ангармонический математический маятник

- $\frac{1}{2}\kappa\theta^2 + \frac{1}{2}\mu\theta'^2 = const \Rightarrow \theta'' + \omega_0^2\theta = 0$ – линеаризованное уравнение
- $\theta'' + \omega_0^2\sin\theta = 0$ – нелинеаризованное **ангармоническое** уравнение;
  $T = T_0(1 + \theta_0^2/16 + 9\theta_0^4/64 + \ldots)$ – период зависит от амплитуды θ_0

Волновое уравнение. Скорость упругих волн в тонком стержне

- $\partial^2 x/\partial t^2 = v^2\, \partial^2 x/\partial z^2$
  общее решение волнового уравнения:
  $x = x(t - z/v) + x(t + z/v)$
- Относительная деформация $\varepsilon = \partial x/\partial z$
- Закон Гука $\sigma = E\varepsilon \Rightarrow$
- Закон Ньютона для участка стержня Δz:
  $\Delta m \partial^2 x/\partial t^2 = F \Rightarrow$
  $\rho S \Delta z\, \partial^2 x/\partial t^2 = (\sigma(z + \Delta z) - \sigma(z))S = ES\partial\varepsilon/\partial z$
  $\Rightarrow$
- $\partial^2 x/\partial t^2 = (E/\rho)\, \partial^2 x/\partial z^2 \Rightarrow v = (E/\rho)^{1/2}$

Численные примеры (сталь)

- Модуль Юнга: $E_0 = 2\ 10^{11}$ Н/м^2 = 2 Мбар; коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$; плотность $\rho = 7{,}8$ г/см^3
  ⇨ $v = (E_0/\rho)^{1/2} = 5064$ м/с (табл. $v = 5150$ м/с)
- В <u>толстом</u> стержне:
  Модуль одностороннего сжатия
  $E = E_0(1 – \mu)/(1 + \mu)(1 - 2\mu) = 1{,}35E_0$ ⇨
  $v_{||} = (E/\rho)^{1/2} = (1{,}35)^{1/2}v = 5884$ м/с (табл. $v = 5900$ м/с)
- Поперечный звук: $v_\perp = (G/\rho)^{1/2}$,
  $G = E_0/2(1 + \mu) = E_0/2{,}6$ – модуль сдвига ⇨
  $v_\perp = v/(2{,}6)^{1/2} = 3140$ м/с (табл. $v_\perp = 3100$ м/с)

Численные примеры (алюминий)

- Модуль Юнга: $E_0 = 0{,}705\ 10^{11}$ Н/м^2 = 0,705 Мбар; коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}345$; плотность $\rho = 2{,}7$ г/см^3
- скорость звука в тонком стержне $v = (E_0/\rho)^{1/2} = 5110$ м/с (табл. $v = 5240$ м/с (2,5%))
- В <u>толстом</u> стержне: Модуль одностороннего сжатия $E = E_0(1 – \mu)/(1 + \mu)(1 - 2\mu) = 1{,}57E_0$ ⇨ $v_{||} = (E/\rho)^{1/2} = (1{,}57)^{1/2}v = 6403$ м/с (табл. $v = 6400$ м/с)
- Поперечный звук: $v_\perp = (G/\rho)^{1/2}$, $G = E_0/2(1 + \mu) = E_0/2{,}69$ – модуль сдвига ⇨ $v_\perp = v/(2{,}69)^{1/2} = 3115$ м/с (табл. $v_\perp = 3100$ м/с)

Скорость звука в жидкостях и газах

- В газе $\Delta z/z = \Delta V/V = \Delta p/E$ ⇨ модуль упругости в жидкости
  $E = dp/(dV/V) = dp/(d\rho/\rho)$ коэффициент всестороннего сжатия.
- Скорость звука в жидкости
  $v = (dp/d\rho)^{1/2}$
- Избыточное давление
  $\Delta p = E\varepsilon = E\varepsilon\rho/\rho = \rho u v$

Численные примеры (вода, воздух)

- $v = (dp/d\rho)^{1/2}$
- Вода:
  $v = (K/\rho)^{1/2}$ $K = Vdp/dV$ - модуль всестороннего сжатия воды:
  $K = dp/(dV/V) = 2{,}14 \cdot 10^4$ Н/м^2
  $v = (K/\rho)^{1/2} = 1463$ м/с (табл. $v = 1484$ м/с (1,3%))
- Воздух:
  изотермический звук:
  $v_T = (dp/d\rho)_T^{1/2} = (p/\rho)^{1/2} = 280$ м/с
- Адиабатический звук:
  $v_s = (dp/d\rho)_s^{1/2} = (\gamma p/\rho)^{1/2} = (1{,}4)^{1/2} v_T = 330$ м/с

Скорость волны в гибком шнуре. Струна

- $v = (T/\rho_l)^{1/2}$ – скорость распространения упругих волн небольшой амплитуды в натянутой струне;
  T – натяжение струны
  ρ_l – погонная плотность
- Вывод:
  $\rho_l \Delta z\, \partial^2 x/\partial t^2 = T(\sin\alpha(z+\Delta z) - (\sin\alpha(z))$ ⇨
  $\partial^2 x/\partial t^2 = (T/\rho_l)\partial^2 x/\partial z^2$

Энергия упругой волны. Амплитуда давления в звуковой волне.

- Плотность кинетическая энергии:
  $w_k = \rho u^2/2 = \rho x'^2/2 = ½\ \rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t - kz)$
- Плотность упругой энергии:
  $w_П = E\varepsilon^2/2 = ½\ \rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t - kz)$
- Полная энергия
  $w = w_k + w_П = \rho x'^2/2 + E\varepsilon^2/2 = \rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t - kz)$
- Для гармонической волны: $\langle w\rangle = ½\ \rho A^2\omega^2 =$
- Поток энергии, или интенсивность:
  $I = ½\ \rho A^2\omega^2 v$
- $I = 2\langle w_П\rangle v = (E\varepsilon_m{}^2/2)\ v = (\Delta p)^2/2v\rho$ ⇨
  $\boldsymbol{\Delta p = (2I\rho v)^{1/2}}$

Порог слышимости. Болевой порог. Кавитация

- Порог слышимости: $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2
  $\Delta p = (2I_0\rho v)^{1/2} = 3\ 10^{-5}$ Па – избыточное давление на пороге слышимости
- Болевой порог: $I = 10^{12}I_0$ (120 децибелл)
  $\Delta p = (2I\rho v)^{1/2} = 30$ Па = 0,3 г/см^2
- Кавитация:
  ультразвук f = 5 Мгц
  $I = 10$ Вт/см^2
  $\Delta p = (2I\rho v)^{1/2} = (2\ 10^5\ 10^3\ 1{,}5\ 10^3)^{1/2} = 6$ атм.
  Градиенты давления: $\Delta p/(\frac{1}{2}\lambda) = 400$ атм/см (λ = 0,3 мм)