Практическое занятие Формула полной вероятности и формула Байеса

Разминка

Один студент выучил 20 из 25 вопросов программы, а второй — только 15. Каждому из них задают по одному вопросу. Найти вероятность того, что правильно ответят:

а) оба студента;
б) только первый студент;
в) только один из них;
г) хотя бы один из студентов.

В группе 8 человек, говорящих только на немецком языке, и 6 человек — только на финском. Какова вероятность того, что из двух наудачу выбранных людей оба говорят на одном языке?

В одной комнате находятся 4 девушки и 7 юношей, в другой 10 девушек и 5 юношей. Наудачу выбирают по одному человеку из каждой комнаты. Найти вероятность того, что оба они окажутся юношами или оба — девушками.

Найдите вероятность того, что сумма очков случайно выбранной кости домино равна шести.

Из группы, содержащей 6 юношей и 9 девушек, выбрали 5 человек. Найдите вероятность того, что юношей выбрано больше, чем девушек.

Теорема 6.5. Пусть событие A может произойти только с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, т. е. $H_i \cdot H_j = \varnothing$, $i \neq j$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

Тогда вероятность события A вычисляется по *формуле полной вероятности*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i). \tag{5.1}$$

При этом события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ обычно называют *гипотезами*, а числа $P(H_i)$ — *вероятностями гипотез*.

45% телевизоров, имеющихся в магазине, изготовлены на 1-м заводе, 15% — на 2-м, остальные — на 3-м заводе. Вероятности того, что телевизоры, изготовленные на этих заводах, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока, равны 0,96, 0,84, 0,90 соответственно. Найти вероятность того, что купленный наудачу телевизор выдержит гарантийный срок работы.

наудачу телевизор выдержит гарантийный срок работы.

Пусть событие: $A = \{$телевизор выдержит гарантийный срок работы$\}$, а гипотезы $H_1 = \{$телевизор изготовлен на 1-м заводе$\}$, $H_2 = \{$телевизор изготовлен на 2-м заводе$\}$, $H_3 = \{$телевизор изготовлен на 3-м заводе$\}$.

События H_1, H_2, H_3 образуют полную группу несовместных событий, при этом: $P(H_1) = 0{,}45$; $P(H_2) = 0{,}15$; $P(H_3) = 0{,}40$. (Для контроля можно найти сумму вероятностей гипотез; она должна равняться единице: $\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) = 0{,}45 + 0{,}15 + 0{,}40 = 1$).

По условию $P(A \mid H_1) = 0{,}96$, $P(A \mid H_2) = 0{,}84$, $P(A \mid H_3) = 0{,}90$. Отсюда по формуле полной вероятности имеем

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3) =$$
$$= 0{,}45 \cdot 0{,}96 + 0{,}15 \cdot 0{,}84 + 0{,}40 \cdot 0{,}90 = 0{,}918.$$

Имеются две одинаковые урны с шарами. В 1-й находится 3 белых и 4 черных шара, во 2-й — 2 белых и 3 черных. Из наудачу выбранной урны вынимают один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

На рисунке 70 изображена схема дорог. Туристы выходят из пункта A, выбирая наугад на развилке дорог один из возможных путей. Какова вероятность того, что они попадут в пункт B?

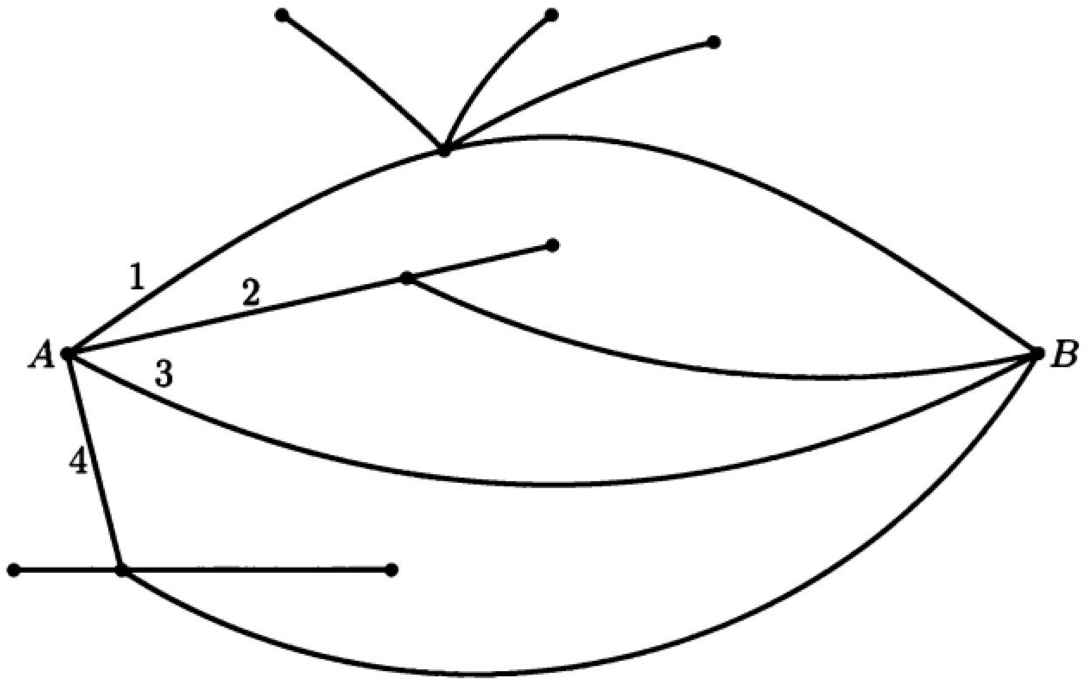

Рис. 70

Предположим, что 5% мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Считая, что мужчин и женщин одинаковое количество, найти вероятность того, что этот человек:

а) мужчина, **б)** женщина.

Пусть событие $A = \{$выбранный человек оказался дальтоником$\}$. Тогда в качестве гипотез примем события $H_1 = \{$выбранный человек — мужчина$\}$ и $H_2 = \{$выбранный человек — женщина$\}$. Очевидно,

$$H_1 + H_2 = \Omega, \quad H_1 \cdot H_2 = \varnothing \quad \text{и} \quad P(H_1) = P(H_2) = 0{,}5.$$

Для нахождения искомых вероятностей, т. е. условных вероятностей $P(H_1 \mid A)$ и $P(H_2 \mid A)$, воспользуемся формулой Бейеса. Сначала по формуле полной вероятности найдем $P(A)$: т. к. по условию $P(A \mid H_1) = 0{,}05$ и $P(A \mid H_2) = 0{,}0025$, то $P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}05 + 0{,}5 \cdot 0{,}0025 = 0{,}02625$. Следовательно:

а) $P(H_1 \mid A) = \dfrac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{P(A)} = \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}05}{0{,}02625} = \dfrac{20}{21}$;

б) $P(H_2 \mid A) = \dfrac{P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)}{P(A)} = \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}0025}{0{,}02625} = \dfrac{1}{21}$.

Отметим, что сумма условных вероятностей гипотез (т. е. апостериорных вероятностей) также равна единице ($\frac{20}{21} + \frac{1}{21} = 1$).

В студенческой группе 70% — юноши. 20% юношей и 40% девушек имеют сотовый телефон. После занятий в аудитории был найден кем-то забытый телефон. Какова вероятность того, что он принадлежал

а) юноше? **б)** девушке?

В 1-й урне находится 7 белых и 5 черных шаров, а во 2-й — 4 белых и 8 черных. Из первой урны наудачу перекладывают во вторую 2 шара, а затем из 2-й урны извлекают один шар. Какова вероятность того, что он окажется белым?