

Практическое занятие  
Формула полной  
вероятности и формула  
Байеса

# Разминка

Один студент выучил 20 из 25 вопросов программы, а второй — только 15. Каждому из них задают по одному вопросу. Найти вероятность того, что правильно ответят:

а) оба студента;

б) только первый студент;

в) только один из них;

г) хотя бы один из студентов.

В группе 8 человек, говорящих только на немецком языке, и 6 человек — только на финском. Какова вероятность того, что из двух наудачу выбранных людей оба говорят на одном языке?

В одной комнате находятся 4 девушки и 7 юношей, в другой 10 девушек и 5 юношей. Наудачу выбирают по одному человеку из каждой комнаты. Найти вероятность того, что оба они окажутся юношами или оба — девушками.

Найдите вероятность того, что сумма очков случайно выбранной кости домино равна шести.

Из группы, содержащей 6 юношей и 9 девушек, выбрали 5 человек. Найдите вероятность того, что юношей выбрано больше, чем девушек.

**Теорема 6.5.** Пусть событие  $A$  может произойти только с одним из событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , образующих полную группу попарно несовместных событий, т. е.  $H_i \cdot H_j = \emptyset, i \neq j$  и  $\sum_{i=1}^n H_i = \Omega$ .

Тогда вероятность события  $A$  вычисляется по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A | H_i). \quad (5.1)$$

При этом события  $H_1, H_2, \dots, H_n$  обычно называют гипотезами, а числа  $P(H_i)$  — вероятностями гипотез.

45% телевизоров, имеющих в магазине, изготовлены на 1-м заводе, 15% — на 2-м, остальные — на 3-м заводе. Вероятности того, что телевизоры, изготовленные на этих заводах, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока, равны 0,96, 0,84, 0,90 соответственно. Найти вероятность того, что купленный наудачу телевизор выдержит гарантийный срок работы.

○ Пусть событие:  $A = \{\text{телевизор выдержит гарантийный срок работы}\}$ , а гипотезы  $H_1 = \{\text{телевизор изготовлен на 1-м заводе}\}$ ,  $H_2 = \{\text{телевизор изготовлен на 2-м заводе}\}$ ,  $H_3 = \{\text{телевизор изготовлен на 3-м заводе}\}$ .

События  $H_1, H_2, H_3$  образуют полную группу несовместных событий, при этом:  $P(H_1) = 0,45$ ;  $P(H_2) = 0,15$ ;  $P(H_3) = 0,40$ . (Для контроля можно найти сумму вероятностей гипотез; она должна равняться единице:  $\sum_{i=1}^n P(H_i) = 0,45 + 0,15 + 0,40 = 1$ ).

По условию  $P(A | H_1) = 0,96$ ,  $P(A | H_2) = 0,84$ ,  $P(A | H_3) = 0,90$ . Отсюда по формуле полной вероятности имеем

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) + P(H_3) \cdot P(A | H_3) = \\ &= 0,45 \cdot 0,96 + 0,15 \cdot 0,84 + 0,40 \cdot 0,90 = 0,918. \quad \bullet \end{aligned}$$

Имеются две одинаковые урны с шарами. В 1-й находится 3 белых и 4 черных шара, во 2-й — 2 белых и 3 черных. Из наудачу выбранной урны вынимают один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

На рисунке 70 изображена схема дорог. Туристы выходят из пункта  $A$ , выбирая наугад на развилке дорог один из возможных путей. Какова вероятность того, что они попадут в пункт  $B$ ?

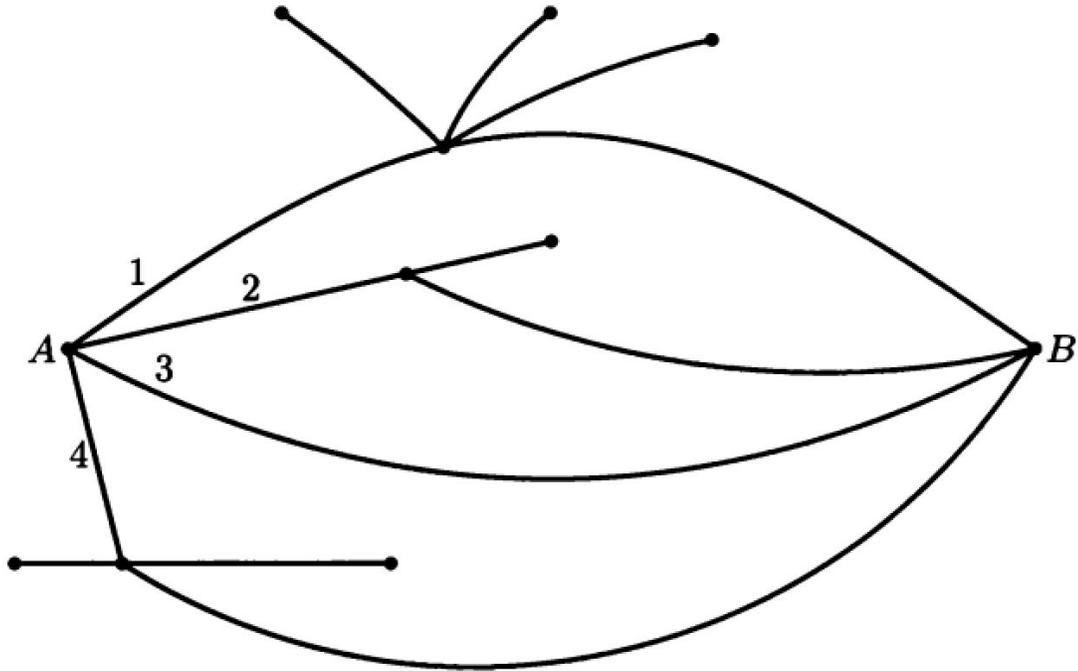


Рис. 70

Предположим, что 5% мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Считая, что мужчин и женщин одинаковое количество, найти вероятность того, что этот человек:

а) мужчина,

б) женщина.

○ Пусть событие  $A = \{\text{выбранный человек оказался дальтоником}\}$ . Тогда в качестве гипотез примем события  $H_1 = \{\text{выбранный человек — мужчина}\}$  и  $H_2 = \{\text{выбранный человек — женщина}\}$ . Очевидно,

$$H_1 + H_2 = \Omega, \quad H_1 \cdot H_2 = \emptyset \quad \text{и} \quad P(H_1) = P(H_2) = 0,5.$$

Для нахождения искомых вероятностей, т. е. условных вероятностей  $P(H_1 | A)$  и  $P(H_2 | A)$ , воспользуемся формулой Бейеса. Сначала по формуле полной вероятности найдем  $P(A)$ : т. к. по условию  $P(A | H_1) = 0,05$  и  $P(A | H_2) = 0,0025$ , то  $P(A) = 0,5 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,0025 = 0,02625$ . Следовательно:

$$\text{а) } P(H_1 | A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A | H_1)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,05}{0,02625} = \frac{20}{21};$$

$$\text{б) } P(H_2 | A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A | H_2)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,0025}{0,02625} = \frac{1}{21}.$$

Отметим, что сумма условных вероятностей гипотез (т. е. апостериорных вероятностей) также равна единице ( $\frac{20}{21} + \frac{1}{21} = 1$ ). ●

В студенческой группе 70% — юноши. 20% юношей и 40% девушек имеют сотовый телефон. После занятий в аудитории был найден кем-то забытый телефон. Какова вероятность того, что он принадлежал

а) юноше?

б) девушке?

В 1-й урне находится 7 белых и 5 черных шаров, а во 2-й — 4 белых и 8 черных. Из первой урны наудачу перекладывают во вторую 2 шара, а затем из 2-й урны извлекают один шар. Какова вероятность того, что он окажется белым?