

Логарифмы.
Свойства
логарифмов.



- **Определение**

- Логарифм числа N по основанию a ($\log_a N$) определяется как показатель степени, в которую надо возвести число a (основание логарифма), чтобы получить число N (Логарифм существует только у положительных чисел, для основания логарифма существуют ограничения: $a > 0, a \neq 1$)
- $\log_a N = b$ означает, что $a^b = N$
- Объединяя эти две формы записи, получаем основное логарифмическое тождество; $a^{\log_a N} = N$

Обозначения .

- $\log_a N = b$

\log -знак логарифма

a -основание логарифма ($a > 0, a \neq 1$)

N -логарифмируемое число ($N > 0$)

b -значение логарифма (показатель степени)

Примеры вычисления логарифмов

$$\log_2 8 = 3, \text{ так как } 2^3 = 8;$$

$$\log_7 49 = 2, \text{ так как } 7^2 = 49;$$

$$\log_5 \frac{1}{5} = -1, \text{ так как } 5^{-1} = \frac{1}{5};$$

$$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}, \text{ так как } 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$



Примеры нахождения логарифмов

пример 1.

вычислить $\log_2 8$.

пусть $\log_2 8 = x$, тогда

$$2^x = 8$$

$$2^x = 2^3$$

$$x = 3$$

Ответ: $\log_2 8 = 3$.

пример 2.

вычислить $\log_{64} 128$.

пусть $\log_{64} 128 = x$, тогда

$$64^x = 128$$

$$2^{6x} = 2^7$$

$$6x = 7$$

$$x = \frac{7}{6}$$

Ответ: $\log_{64} 128 = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$.

Вычислите логарифмы

$$\log_5 5$$

$$\log_5 1$$

$$\log_3 3^2$$

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}$$

$$\log_6 1$$

$$\log_5 5^3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$$

$$\log_{\sqrt{3}} 1$$

$$\log_4 4^{-2}$$

Десятичные логарифмы

- Если основание логарифма равно 10, то логарифм называется десятичным:

$$\lg 10 = 1$$

$$\lg 100 = 2$$

$$\lg 1000 = 3$$

$$\lg 10000 = 4$$

$$\log_{10} b = \lg b$$

$$\lg 0,1 = -1$$

$$\lg 0,01 = -2$$

$$\lg 0,001 = -3$$

$$\lg 0,0001 = -4$$

Натуральные логарифмы

- Если основание логарифма e , то логарифм называется натуральным:

$$\log_e b = \ln b, \quad e \approx 2,7$$

Свойства логарифмов.

$$1) \log_a a = 1$$

$$2) \log_a 1 = 0$$

$$3) \log_a b + \log_a c = \log_a b * c$$

$$4) \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

$$5) \log_{a^x} b^y = \frac{y}{x} \log_a b$$

$$6) \log_{a^x} b = \frac{1}{x} \log_a b$$

$$7) \log_a b^y = y \log_a b$$

$$8) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ — переход к новому основанию}$$

$$9) a^{\log_a b} = b \text{ — представление числа через другое число}$$

$$10) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$11) a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

$$12) \log_a b \log_c d = \log_c b \log_a d$$

$$13) \log_{f(x)} g(x) = 0$$

$$(f(x) - 1)(g(x) - 1) = 0$$

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b$$

$$8^{2 \log_8 3} = (8^{\log_8 3})^2 = 3^2 = 9$$

Логарифм произведения — это сумма логарифмов

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_3 8,1 + \log_3 10 = \log_3 (8,1 \cdot 10) = \log_3 81 = 4$$

Логарифм частного — это разность логарифмов

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\frac{9^{\log_9 50}}{9^{\log_9 2}} = 9^{\log_9 50 - \log_9 2} = 9^{\log_9 25} = 9^2 = 81$$

Свойства степени логарифмируемого числа и основания логарифма

Показатель степени логарифмируемого числа $\log_a b^m = m \log_a b$

Показатель степени основания логарифма $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$

$\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$, в частности если $m = n$, мы получаем

формулу: $\log_{a^n} b^n = \log_a b$, например: $\log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \log_2 3$

Переход к новому основанию

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, в частности, если $c = b$, то $\log_b b = 1$, и тогда:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1,25 = \log_{0,8} 3 \cdot \frac{\log_{0,8} 1,25}{\log_{0,8} 3} = \log_{0,8} 1,25 = \log_{\frac{4}{5}} \frac{5}{4} = -1$$

Самостоятельная работа.

- Выполните задания своего варианта, прикрепите полученные ответы на платформу ДО в виде таблицы.

Вопрос	Ответ
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Самостоятельная работа.

2) Вычислить:

1	$\log_4 16$	$\log_3 27$	$\log_5 125$	$\log_2 32$	$\log_3 9$	$\log_2 8$	$\log_3 81$	$\log_2 16$
2	$\log_8 2$	$\log_{49} 7$	$\log_{16} 2$	$\log_{27} 3$	$\log_{25} 5$	$\log_{64} 4$	$\log_{32} 2$	$\log_{81} 3$
3	$\log_{25} 125$	$\log_4 8$	$\log_{27} 9$	$\log_8 16$	$\log_{81} 27$	$\log_{32} 4$	$\log_8 128$	$\log_{16} 8$
4	$\log_{\frac{1}{7}} 49$	$\log_{\frac{1}{27}} 3$	$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$	$\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{2}$	$\log_{\frac{1}{125}} 5$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$	$\log_{\frac{1}{64}} \frac{1}{4}$	$\log_{\frac{1}{8}} 2$
5	$\log_6 \sqrt{6}$	$\log_5 \sqrt[3]{5}$	$\log_4 \sqrt{2}$	$\log_{\sqrt{5}} \sqrt{125}$	$\log_{\sqrt{9}} 9$	$\log_{\sqrt{3}} 9$	$\log_{\sqrt{7}} 7$	$\log_{\sqrt{27}} \sqrt{3}$
6	$3^{2 \log_3 7}$	$27^{\log_3 2}$	$9^{-\log_3 4}$	$4^{3 \log_4 3}$	$81^{-\log_3 2}$	$2^{3 \log_2 15}$	$16^{-\log_2 3}$	$4^{-\log_2 9}$
7	$\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2}$	$\log_{\sqrt{27}} 9$	$\log_{16} \sqrt{2}$	$\log_{\frac{1}{64}} \sqrt{32}$	$\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}$	$\log_{\sqrt{8}} 32$	$\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}$	$\log_{81} \sqrt{27}$
8	$\log_9 \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (2\sqrt{2})$	$\log_4 \frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\log_{\frac{1}{\sqrt{27}}} \frac{1}{\sqrt{243}}$	$\log_{27} \frac{1}{3\sqrt{3}}$	$\log_{125} \frac{1}{\sqrt{5}}$	$\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} (3\sqrt{3})$	$\log_{\frac{1}{\sqrt{32}}} \frac{1}{\sqrt{8}}$
	a	b	c	d	e	f	g	h

Опережающее задание:

3) Упростить:

1	$\log_6 7 + \log_6 8$	$\log_2 3 + \log_2 9$	$\log_5 6 + \log_5 7$	$\log_4 8 + \log_4 9$	$\log_3 7 + \log_3 4$	$\log_5 9 + \log_5 6$	$\log_9 6 + \log_9 8$	$\log_5 3 + \log_5 8$
2	$\log_5 24$ $-\log_5 4$	$\log_3 40$ $-\log_3 8$	$\log_7 45$ $-\log_7 8$	$\log_3 30$ $-\log_3 5$	$\log_2 35$ $-\log_2 7$	$\log_8 63$ $-\log_8 7$	$\log_3 32$ $-\log_3 4$	$\log_7 36$ $-\log_7 9$
3	$2 \log_3 2$ $+\log_3 5$	$\log_5 3$ $+2 \log_5 9$	$2 \log_3 4$ $-\log_3 8$	$\log_9 4$ $+3 \log_9 2$	$\log_7 2$ $+3 \log_7 3$	$2 \log_3 6$ $-\log_3 4$	$\log_7 4$ $+2 \log_7 5$	$\log_3 12$ $-2 \log_3 2$
4	$\lg 18 - 2 \lg \sqrt{6}$	$\lg 2 + \frac{1}{2} \lg 36$	$\frac{1}{2} \ln 9 + \ln 2$	$2 \ln \sqrt{14} - \ln 4$	$\frac{1}{2} \lg 64 - \lg 4$	$\ln 3 + \frac{1}{2} \ln 49$	$2 \ln \sqrt{10} - \ln 5$	$\lg 3 + 2 \lg \sqrt{5}$
5	$\log_{25} 54$ $-\log_5 \sqrt{6}$	$\log_9 8$ $-\log_3 \sqrt{2}$	$\log_{\sqrt{8}} 6$ $-\log_8 4$	$\log_{\sqrt{10}} 4$ $-\lg 8$	$\log_{\sqrt{5}} 2$ $+\log_5 3$	$\ln 5 +$ $\log_{\sqrt{e}} 3$	$\log_{36} 8$ $-\log_6 \sqrt{2}$	$\log_7 \sqrt{2}$ $+\log_{49} 18$
6	$\frac{\log_3 7}{\log_3 4} + \log_4 5$	$\frac{\log_4 2^7}{\lg 4} - \frac{\lg 9}{\lg 4}$	$\frac{\lg 54}{\lg 5} - \frac{\lg 6}{\lg 5}$	$\frac{\log_2 5 + \frac{1}{\lg 2}}{\lg 2}$	$\log_2 3 - \log_3 2$	$\frac{\lg 30}{\lg 3} - \frac{\lg 2}{\lg 3}$	$\frac{1}{\lg 4^e} + \ln 8$	$\log_9 5 \cdot \log_5 3$
7	$\frac{\log_5 4 \cdot \log_3 5}{\log_3 4}$	$\frac{\log_2 9}{\log_2 5 \cdot \log_5 3}$	$\frac{\log_7 25 \cdot \log_5 7}{\log_3 2}$	$\frac{\log_3 8 \cdot \log_2 3}{\log_5 16 \cdot \log_4 5}$	$\frac{\log_3 7 \cdot \log_7 6}{\log_3 6}$	$\frac{\log_5 8}{\log_3 2 \cdot \log_2 27}$	$\frac{\log_5 8}{\log_7 2 \cdot \log_5 7}$	$\frac{\log_2 7 \cdot \log_3 5}{\log_3 7 \cdot \log_2 5}$
8	$\frac{\log_3 8 + \log_3 2}{\log_2 36 - \log_2 9}$	$\frac{\log_3 4 + \log_3 5}{\log_9 2}$	$\frac{\log_5 4}{\log_{25} 14 - \log_{25} 9}$	$\frac{\log_3 32 - \log_3 2}{\log_3 2 + \log_3 5}$	$\frac{\log_5 15 - \log_5 3}{2 \log_6 3}$	$\frac{\log_3 16 + \log_3 4}{\log_3 24 - \log_3 6}$	$\frac{3 \log_2 3}{\log_4 20 + \log_4 5}$	$\frac{\log_3 21 - \log_3 7}{\log_9 25 + \log_9 4}$
	a	b	c	d	e	f	g	h