

# Теория управления

## *Устойчивость*

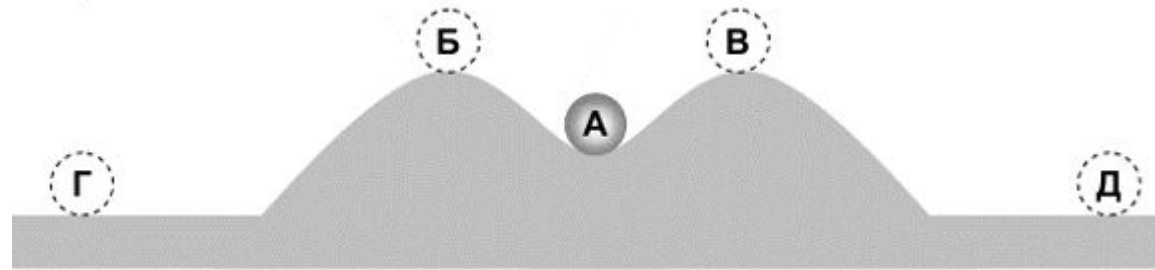
# Понятие устойчивости

Термин «устойчивость» используется в численных методах, механике, экономике, социологии, психологии. Во всех этих науках под *устойчивостью* понимают *способность динамической системы возвращаться в исходное состояние (положение равновесия) после окончания действия внешних факторов.*



# Равновесие и устойчивость

Шарик на рисунке находится в **устойчивом равновесии** в положении **А** - если немного сдвинуть его с места, он скатится обратно в ямку.



Если шарик сильно отклонить от равновесия, он может свалиться через горку вбок, то есть **устойчивость нарушится**.

В положениях **Б** и **В** шарик также находится в положении равновесия, но оно **неустойчиво**, так как при малейшем сдвиге в сторону шарик скатывается с вершины.

В положениях **Г** и **Д** **равновесие** шарика **нейтральное** - при небольшом смещении он остаётся в новом положении. При этом говорят, что система **нейтрально устойчива**, то есть находится на границе устойчивости.



# Устойчивость системы

Система «шарик-горка» - нелинейная. Для неё

- **устойчивость** - не свойство системы, а **свойство** некоторого **положения равновесия**;
- может быть **несколько положений равновесия**, из них некоторые - устойчивые, а некоторые - нет;
- положение равновесия может быть устойчиво при малых отклонениях (система **устойчива «в малом»**) и неустойчиво при больших (**«в большом»**)



# Устойчивость системы

При исследовании устойчивости стационарных систем следует учитывать следующее:

а) рассматривается движение *автономной системы*, описываемой уравнением

$$a(p)y(t) = 0,$$

где  $a(p)$  – операторный полином;

б) поведение системы анализируется при *ненулевых начальных условиях*:  $y(0) \neq 0$  или  $x(0) \neq 0$  соответственно;

в) под *равновесным состоянием* понимают установившееся состояние автономной системы  $y = y^*$  или  $x = x^*$ . Равновесное состояние находится из условия  $\dot{x} = 0$  или  $y^{(i)} = 0, i = (\overline{0, n})$ . Для линейной модели при  $a_n \neq 0$  получаем значение  $y^* = 0$ .



# Виды устойчивости

Известно несколько определений устойчивости, которые отличаются некоторыми деталями.

Если рассматривать только *выход* системы при различных ограниченных *входах*, то говорят об **устойчивости «ВХОД-ВЫХОД»**.

Часто изучают *устойчивость автономной системы*, на которую не действуют внешние сигналы (все входы нулевые). Предполагается, что систему вывели из положения равновесия (задали ненулевые начальные условия) и «отпустили». Система, которая сама возвращается в исходное положение равновесия, *называется устойчивой*. Если при этом рассматривается только выход системы (а не ее внутренние сигналы), говорят о **«технической устойчивости» (или устойчивости по выходу)**.



# Виды устойчивости (1)

**Внутренняя или математическая устойчивость** означает, что не только выход, но и все внутренние переменные (переменные состояния) приближаются к своим значениям в положении равновесия.



## Устойчивость «ВХОД-ВЫХОД»

Обычно для инженеров в первую очередь важно, чтобы система не «пошла вразнос», то есть, чтобы *управляемая величина не росла неограниченно* при всех допустимых входных сигналах. Если это так, говорят, что система обладает устойчивостью «ВХОД-ВЫХОД» (при ограниченном входе выход также ограничен). Заметим, что при этом нас не интересует, как меняются внутренние переменные объекта, **важен только вход и выход**.

Рассмотрим ванну, которая наполняется водой из крана. Модель этой системы - интегрирующее звено. При постоянном (ограниченном по величине!) входном потоке уровень воды в ванне будет неограниченно увеличиваться (пока вода не польётся через край), поэтому такая системе не обладает устойчивостью «ВХОД-ВЫХОД».

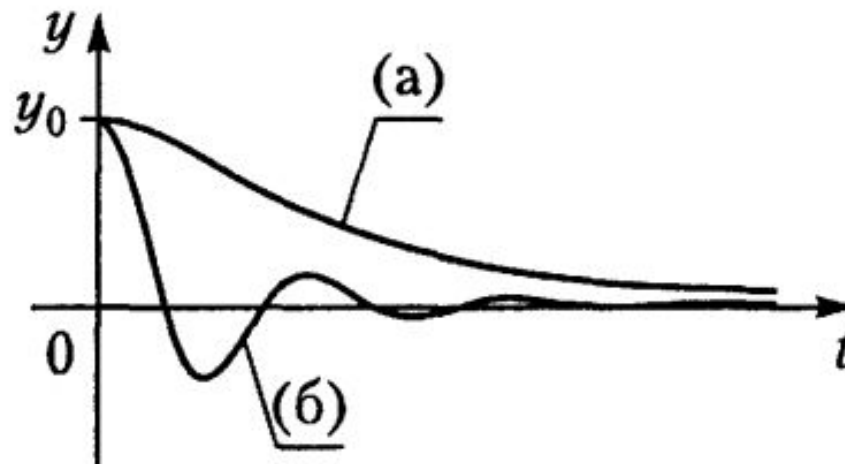




# «Техническая» устойчивость

Понятие «техническая устойчивость» относится к автономной системе, у которой все входные сигналы равны нулю.

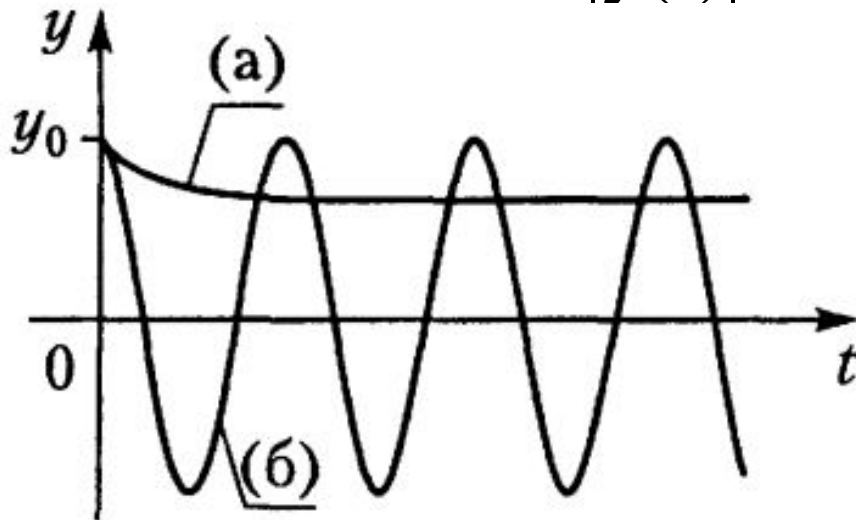
**Определение 1.** Система (или движение системы относительно положения равновесия  $y^* = 0$ ) называется устойчивой, если с течением времени (при  $t \rightarrow \infty$ ) она возвращается в положение равновесия, т. е.  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$



# «Техническая» устойчивость (1)

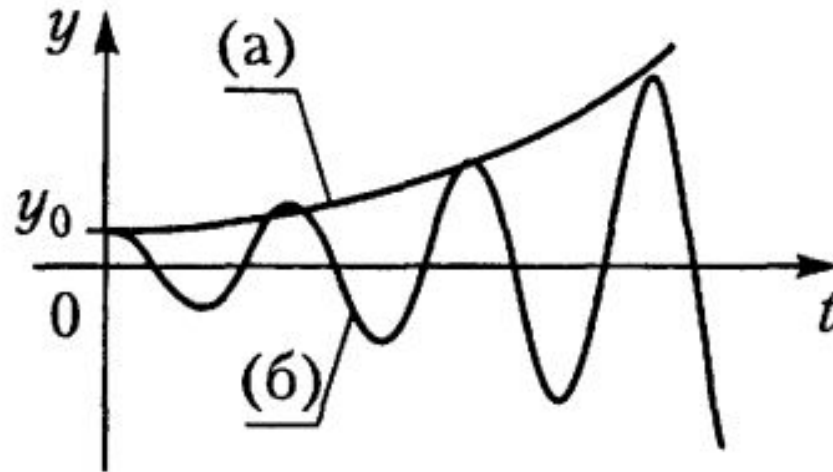
**Определение 2.** Система (или движение системы относительно положения равновесия  $y^* = 0$ ) называется нейтрально устойчивой, если для любых  $t > 0$  она остается в некоторой окрестности положения равновесия (рис.), т. е. найдётся число  $\varepsilon > 0$  такое, что для любых  $t \geq 0$  выполняется

$$|y(t)| < \varepsilon$$



## «Техническая» устойчивость (2)

**Определение 3.** Система (или движение системы относительно положения равновесия  $y^* = 0$ ) называется неустойчивой, если с течением времени она покидает любую наперёд заданную  $\varepsilon$  - окрестность положения равновесия (рис.), т. е. для любых  $\varepsilon > 0$  найдётся  $t^* > 0$  такое, что при  $t > t^*$  имеет место  $|y(t)| > \varepsilon$



Апериодический (а) и колебательный (б) процессы неустойчивой системы



# Внутренняя устойчивость

Говоря о внутренней устойчивости, рассматривают не только выход, но и все переменные, описывающие состояние системы. В математической теории систем вектор состояния обозначают через  $x(t)$ , а уравнение движения системы записывают в виде

$$(*) \quad \frac{dx(t)}{dt} = f(x, t)$$

Если вектор состояния  $x(t)$  состоит из двух компонентов,  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , это уравнение можно записать в развёрнутой форме

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x, t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x, t) \end{cases}$$

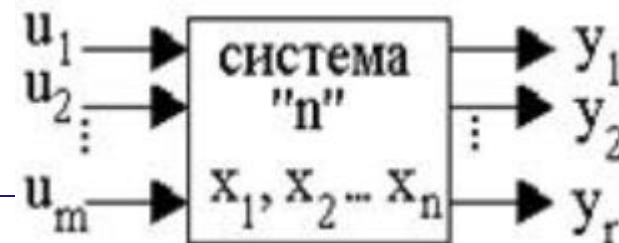
где функции  $f_1(x, t)$  и  $f_2(x, t)$  зависят от вектора состояния и времени.

# Внутренняя устойчивость. Состояние системы

Говоря о внутренней устойчивости, рассматривают не только выход, но и все переменные, описывающие состояние системы.

Под состоянием системы понимается минимально-необходимый набор переменных величин системы  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , способных однозначно и единственным образом определить положение системы в любой момент времени  $t$ . Совокупность переменных величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  образует  $n$ -мерное пространство состояний. Вектор с компонентами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется **вектором состояния**.

Рассмотрим систему (рис.) с  $m$  входами  $(u_1, u_2, \dots, u_m)$ ,  $r$  выходами  $(y_1, y_2, \dots, y_r)$  и  $n$  переменными координатами  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .



# Фазовое пространство

При рассмотрении устойчивости полезным оказалось введение некоторых наглядных геометрических понятий и представлений. Основным из них является *понятие фазового пространства*.

**Фазовым пространством** называется пространство, в котором декартовыми координатами точки являются величины, определяющие мгновенное состояние системы. Их называют *фазовыми координатами*. Точка фазового пространства, соответствующая состоянию системы в данный момент времени  $t$ , называется *изображающей точкой*.

Изменение состояния системы во времени соответствует движению изображающей точки в этом пространстве по определённой траектории, которая *называется фазовой*. Траекторию движения систем второго порядка обычно изображают на фазовой плоскости, где по одной оси откладывается  $y_1(t)$ , а по другой –  $y_2(t)$ .



# Фазовый портрет типа устойчивый фокус

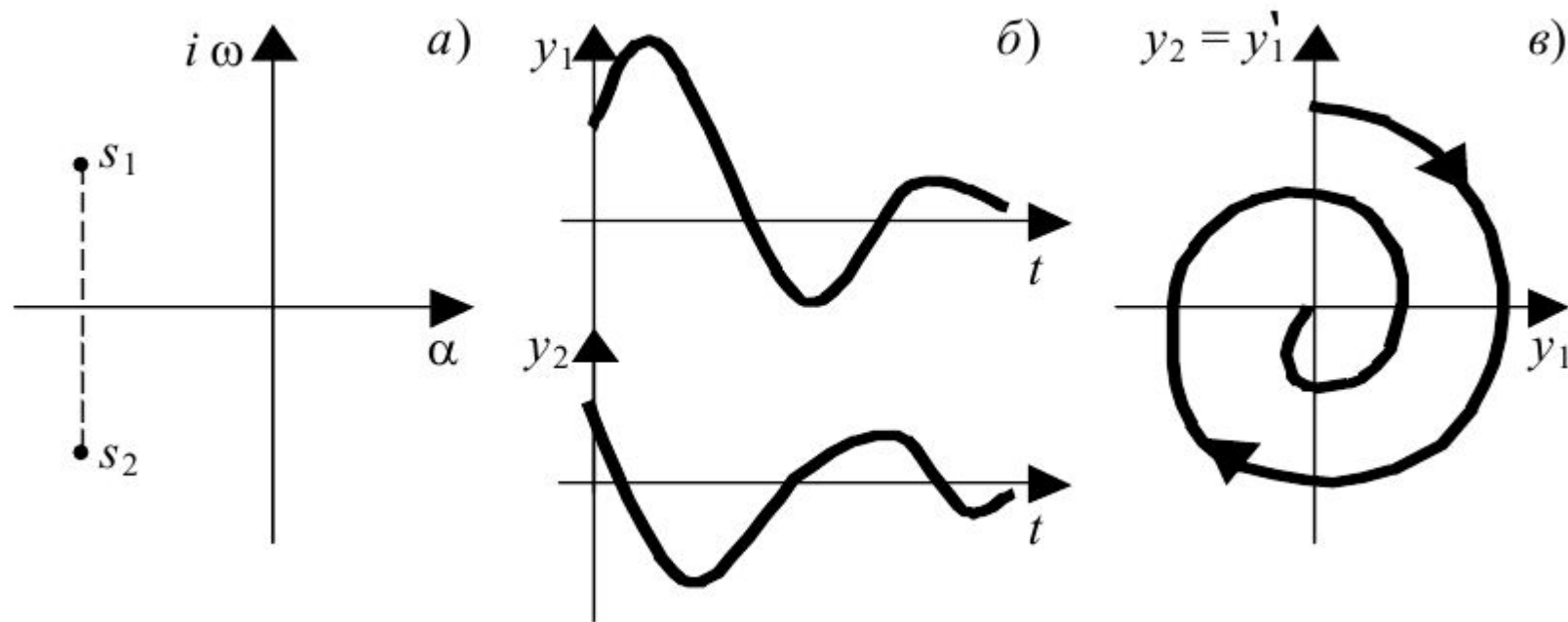


Рис. Фазовый портрет

а) расположение корней характеристического уравнения

б) - переходный процесс; в) - фазовый портрет

# Устойчивость движения

Движение называется *невозмущённым*, если оно получено в результате рассмотрения идеализированной системы.

Движение с учётом возмущений, возникающих в реальной системе, называется *возмущённым*.

Невозмущённое движение называется *устойчивым*, если достаточно *малые возмущения* сколь угодно *мало отклоняют возмущённое движение* от невозмущённого.

Если же возмущённое движение заметно отклоняется от невозмущённого при сколь угодно *слабых возмущениях*, то оно называется *неустойчивым*.



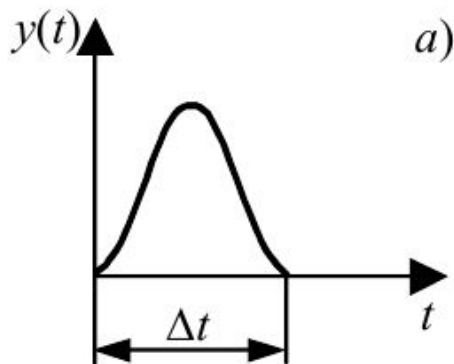


# Малые возмущения

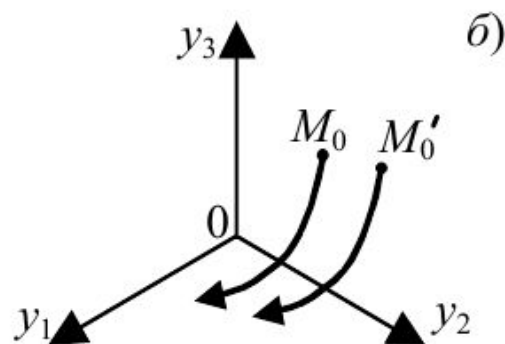
Уточним, что понимается под малыми возмущениями. Любые возмущения можно разделить на два типа: импульсные и непрерывно действующие.

## *Импульсные возмущения.*

Возмущение называется **импульсным**, если оно действует в течение короткого промежутка времени  $\Delta t$  (рис. а). Импульс считают мгновенным, если за время  $\Delta t$  координата не успеваает заметно измениться. В этом случае его влияние заключается в мгновенном сдвиге изображающей точки  $M_0$  системы из начального положения  $M_0$  в некоторое другое положение  $M'_0$ . Траектория невозмущённого движения исходит из точки  $M$ , а возмущённого - из  $M'_0$  и отличается от первой (рис. б). Влияние импульса сказывается на всем движении системы, хотя он действовал только при времени  $\Delta t$ .



а)



б)

## **Действие импульсного возмущения:**

а) импульсное возмущение; б - движение в фазовом пространстве



# Малые возмущения (1)

Обозначим через  $y_{i0}$  координаты точки  $M_{i0}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ; через  $y'_{i0}$ ,  $i = \overline{1, N}$  - координаты  $M'_{i0}$ . При малом сдвиге разность удовлетворяет условию

$$|y_{i0} - y'_{i0}| < \eta,$$

где  $\eta$  - некоторое достаточно малое положительное число.

**Малым возмущением называется такое импульсное возмущение, которое вызывает малый сдвиг начального положения изображающей точки системы.**

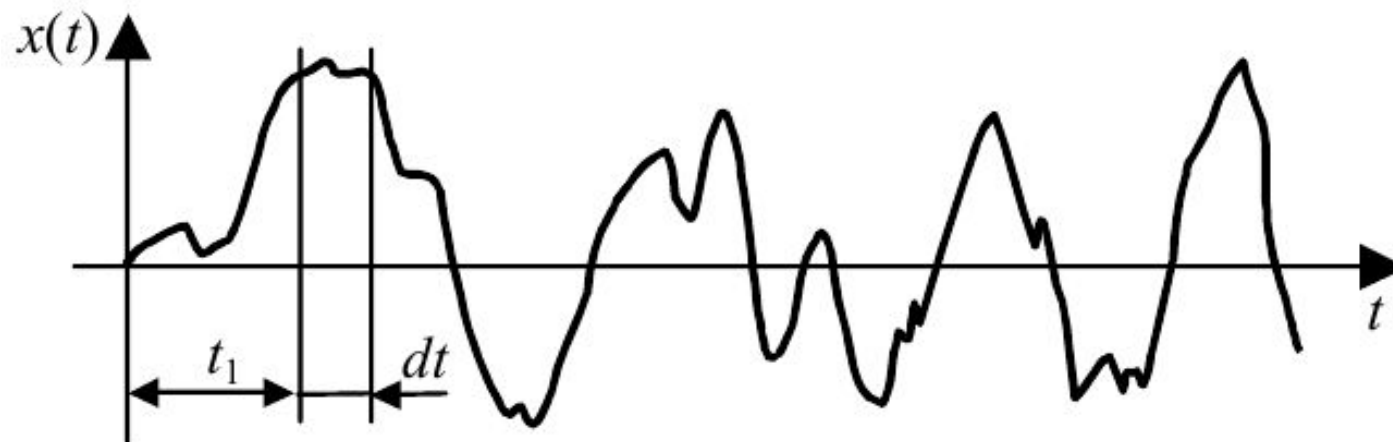
Малым возмущениям соответствуют малые  $\eta$ .



# Непрерывно действующие возмущения

Такие возмущения действуют на систему постоянно (рис.). Непрерывное возмущение можно представить в виде последовательности импульсов, т.е. разрезать весь график  $x(t)$  на импульсы длительностью  $dt$ , поэтому для анализа достаточно рассматривать лишь импульсные возмущения.

Системы, устойчивые при импульсных возмущениях, устойчивы и при непрерывных; неустойчивые при первом типе - неустойчивы и при втором.

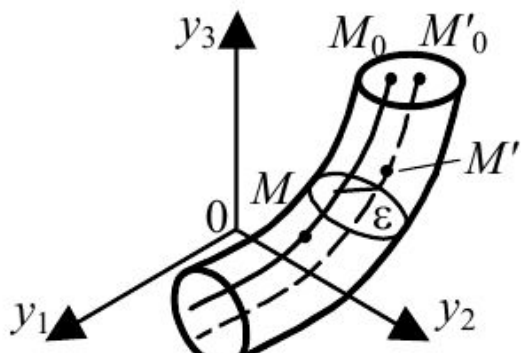


# $\varepsilon$ -окрестность движения

При анализе устойчивости вводится понятие  $\varepsilon$ -окрестности невозмущённого движения. С этой целью рассматривается траектория невозмущённого движения  $M_0M$  и строится криволинейный цилиндр радиусом  $\varepsilon$ , осью которого является эта траектория. Считается, что траектория возмущённого движения мало отклоняется от траектории невозмущённого движения, если она целиком лежит в  $\varepsilon$ -окрестности невозмущённого движения ( $\varepsilon$  - мало).

Возмущённое движение исходит из точки  $M'_0$  (рис.)

*Устойчивость - это свойство движения, имеющее качественный, а не количественный характер.* поэтому при формулировке этого понятия важна принципиальная возможность подобрать столь малое  $\varepsilon$ , чтобы кривая возмущённого движения не вышла из  $\varepsilon$ -окрестности невозмущённого движения при любом значении  $\varepsilon$ . **Если такая возможность существует, то движение устойчиво, если она отсутствует, то неустойчиво.**



# Определение устойчивости по Ляпунову

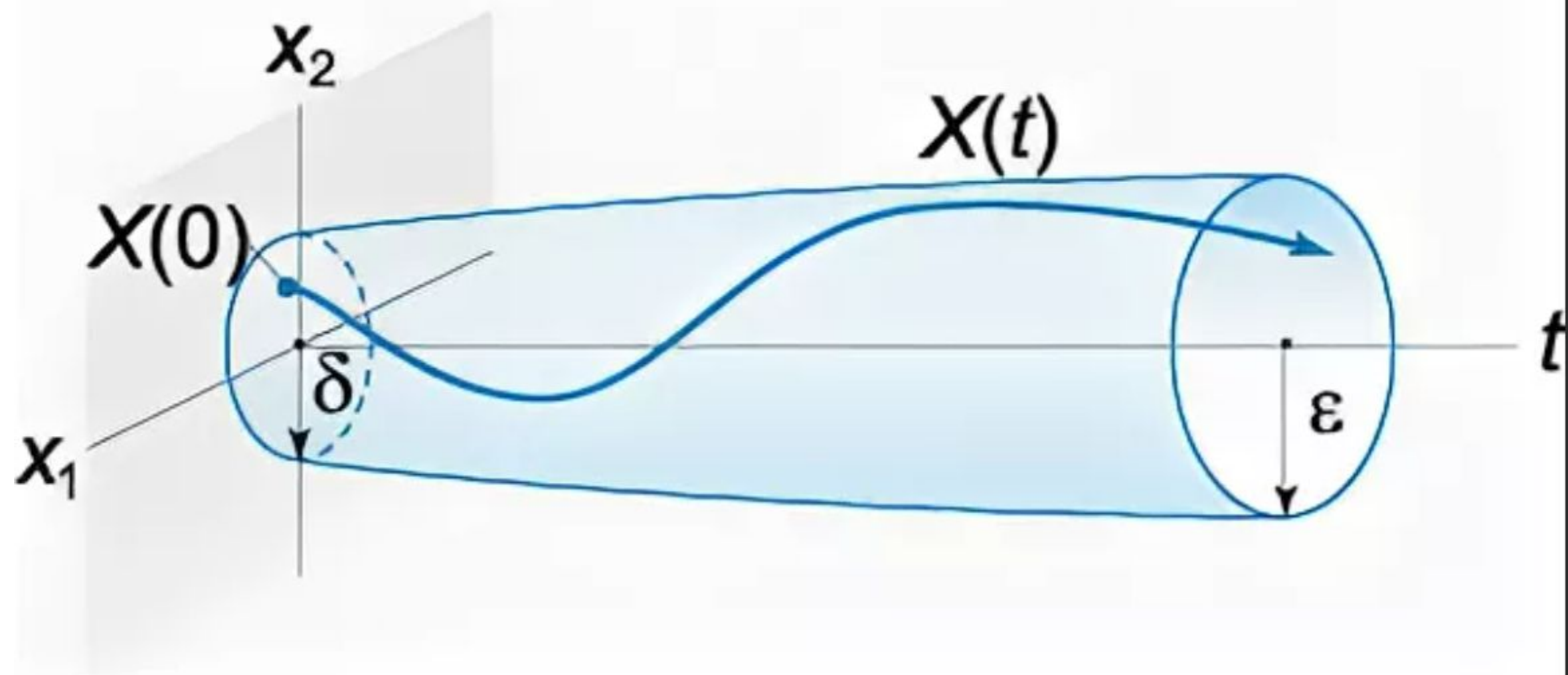
*Формальное определение внутренней устойчивости* было введено в работах А.М. Ляпунова, поэтому такое понятие устойчивости *принято называть устойчивостью по Ляпунову*.

Для простоты рассмотрим систему первого порядка, с одной переменной состояния  $x(t)$ . Система называется устойчивой по Ляпунову в положении равновесия  $x^*$ , если при начальном отклонении  $x_0$  от положения равновесия  $x^*$  не более, чем на  $\delta$ , траектория движения отклоняется от  $x^*$  не более, чем на  $\varepsilon$ , причём для каждого  $\varepsilon$  можно найти соответствующее ему  $\delta(\varepsilon)$ :

$$\left| x_0 - x^* \right| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| x(t) - x^* \right| < \varepsilon \quad \text{при всех } t > 0.$$



# Устойчивость по Ляпунову




# Устойчивость по Ляпунову

**Фактически это означает, что чем меньше начальное отклонение, тем меньше траектория движения отклоняется от положения равновесия.**

Если, кроме того, вектор состояния стремится к положению равновесия, т.е.

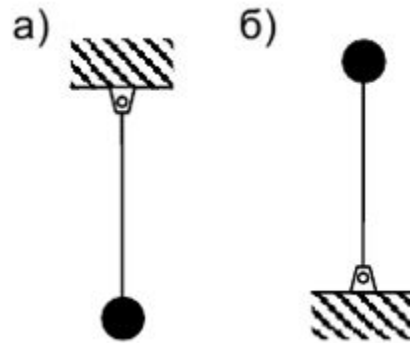
$$|x(t) - x^*| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty$$

система называется *асимптотически устойчивой в положении равновесия*  $x^*$ . Выполнение условия сходимости (\*\*\*) не гарантирует устойчивость по Ляпунову. Существуют примеры достаточно сложных нелинейных систем, в которых даже при очень малых отклонениях от положения равновесия сначала наблюдается большой «выброс», а затем траектория сходится к точке равновесия.

**Асимптотическая устойчивость - более сильное требование.** Положения равновесия, которые устойчивы по Ляпунову, но не асимптотически устойчивы, называются **нейтрально устойчивыми** (маятник без трения). 

# Пример устойчивой системы

Рассмотрим маятник на рисунке ниже (а), состоящий из подвешенного металлического стержня и шарика. Здесь положение равновесия - шарик в нижней точке. Если не учитывать трение, маятник, выведенный из положения равновесия, будет качаться бесконечно долго, причём амплитуда колебаний не будет увеличиваться, то есть, система **нейтрально устойчива**



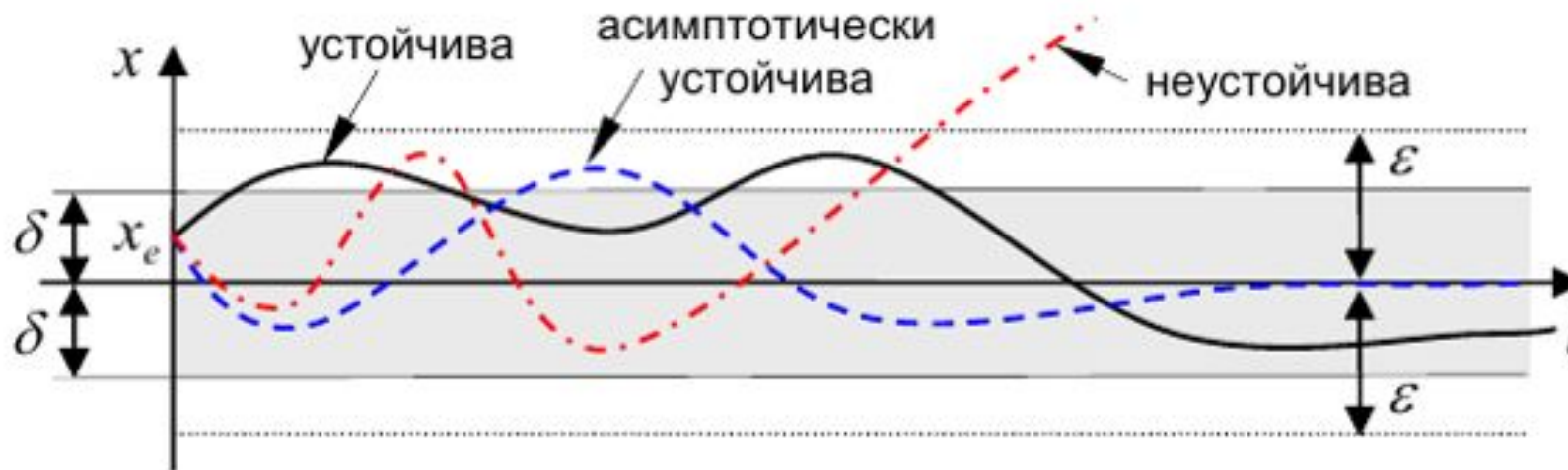
В реальности трение, конечно, есть, поэтому колебания маятника будут постепенно затухать (амплитуда уменьшается), и система в конце концов возвращается в положение равновесия. Это значит, что маятник с трением - **асимптотически устойчивая система**. Маятник на рисунке б) тоже находится в положении равновесия, но оно **неустойчиво**: при малейшем отклонении маятник упадёт вниз.



# Устойчивость по Ляпунову (1)

Положение равновесия неустойчиво, если для него не выполняется условие устойчивости Ляпунова. Это значит, что существует такое  $\varepsilon > 0$ , что траектория  $x(t)$  выходит за границы области  $|x(t) - x^*| < \varepsilon$  при сколь угодно малом отклонении начального состояния  $x_0$  от положения равновесия  $x^*$ . Например, система переходит в другое положение равновесия, или  $x(t)$  неограниченно возрастает.

На рисунке показаны движения *устойчивой*, *асимптотически устойчивой* и *неустойчивой* систем первого порядка (с одной координатой  $x(t)$ ).



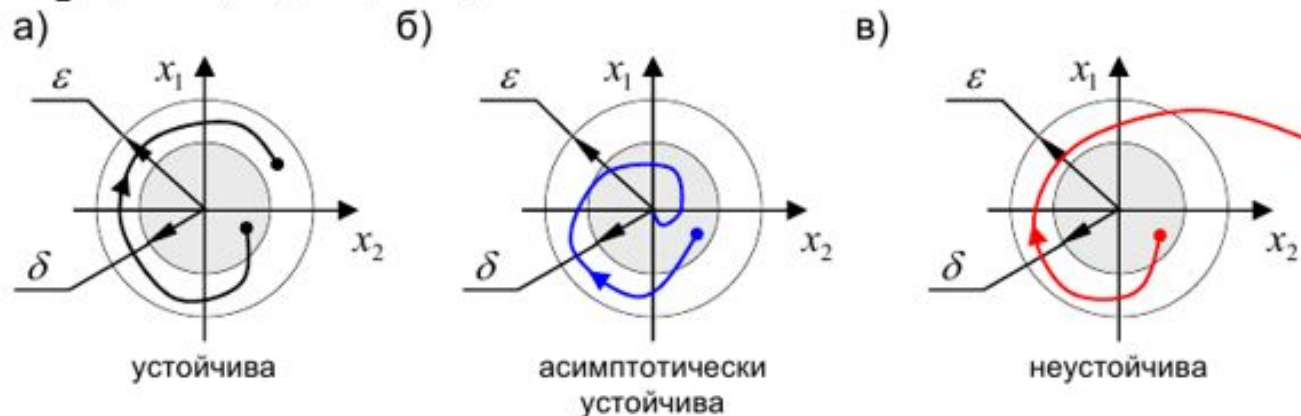
# Устойчивость по Ляпунову (2)

Если вектор состояния содержит несколько переменных, для оценки разности векторов  $x_0 - x^*$  и  $x(t) - x^*$  вместо модуля используют евклидову норму. Например, для системы второго порядка

$$\|x(t) - x_e\| = \sqrt{(x_1(t) - x_1^*)^2 + (x_2(t) - x_2^*)^2}$$

где  $x_1^*$  и  $x_2^*$  - компоненты вектора  $x^*$ .

Траекторию движения систем второго порядка обычно изображают на фазовой плоскости, где по одной оси откладывается  $x_1(t)$ , а по другой –  $x_2(t)$ . На рисунке показаны движения устойчивой, асимптотически устойчивой и неустойчивой систем. Для простоты предполагается, что положение равновесия - это начало координат, где  $x_1 = x_2 = 0$ .



# Особенности устойчивости линейных систем

- Автономная линейная система может иметь единственное положение равновесия (в котором все сигналы равны нулю) или бесконечно много положений равновесия (шарик на плоской поверхности);
- устойчивость - это свойство всей линейной системы, а не отдельного её положения равновесия: или все её движения *устойчивы* (*асимптотически устойчивы*), или все *неустойчивы*;
- асимптотическая *устойчивость* линейной системы «в малом» сразу означает ее *устойчивость* «в целом», то есть, при любых отклонениях от положения равновесия;
- *асимптотически устойчивая система* также обладает *устойчивостью* «вход – выход», просто *устойчивая* (*нейтрально устойчивая*, не асимптотически устойчивая) - нет.



# Условия устойчивости линейных систем

Для того, чтобы получить условия устойчивости, рассмотрим уравнение движения линейной системы, на которую не действуют возмущения. Пусть  $W(s)$  - её передаточная функция. Будем считать, что она имеет только простые (не кратные) полюса  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) (корни знаменателя):

$$W(s) = \frac{n_W(s)}{\Delta(s)} = \frac{n_W(s)}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)\dots(s - \alpha_N)},$$

где  $n_W(s)$  и  $\Delta(s)$  - полиномы. Из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что при отсутствии возмущений выход такой системы можно представить в виде

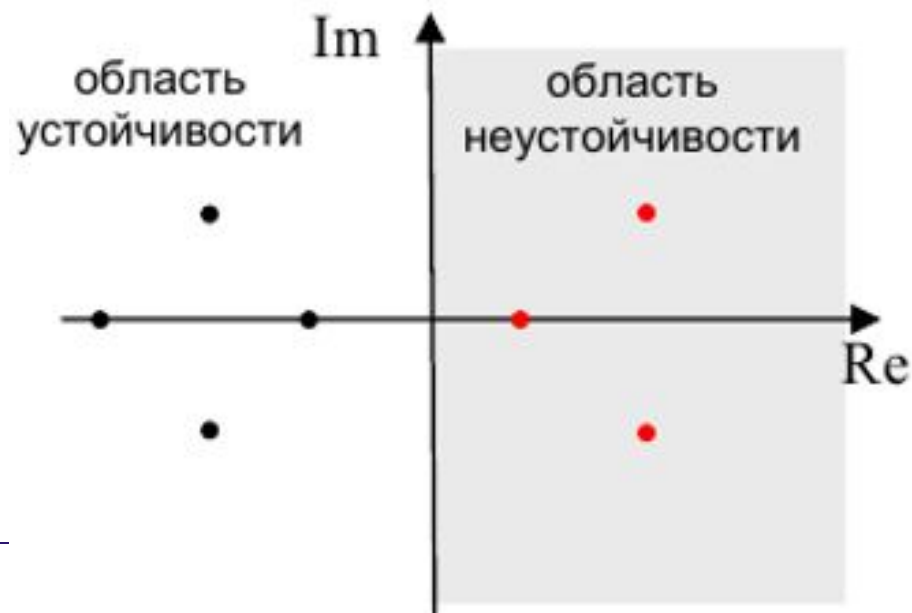
$$y(t) = a_1 e^{\alpha_1 t} + a_2 e^{\alpha_2 t} + \dots + a_N e^{\alpha_N t},$$

где  $a_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) - постоянные, которые определяются начальными условиями. Таким образом, **процесс  $y(t)$  затухает при любых начальных условиях тогда и только тогда, когда все корни  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) имеют отрицательные вещественные части.** В этом случае система **асимптотически устойчива**.

# Условия устойчивости линейных систем (1)

Поскольку устойчивость линейной системы определяют корни полинома  $\Delta(s)$  - знаменателя передаточной функции  $W(s)$ , этот полином называется **характеристическим полиномом системы**.

Если показать корни характеристического полинома (в общем случае - комплексные числа) на комплексной плоскости, то слева от мнимой оси будут устойчивые корни (с отрицательной вещественной частью), а справа - неустойчивые. Таким образом, **область устойчивости - это левая полуплоскость**



# Нейтрально устойчивая система

Предположим, что один из корней полинома  $\Delta(s)$  равен нулю (скажем,  $\alpha_1 = 0$ ), а остальные устойчивы, то есть, их вещественные части отрицательные. Это значит, что система содержит интегрирующее звено. Учитывая, что  $e^{\alpha_1 t} = e^0 = 1$  при всех  $t$ , получаем

$$y(t) = a_1 + a_2 e^{\alpha_2 t} + \dots + a_N e^{\alpha_N t}.$$

Здесь все слагаемые в правой части, кроме первого, затухают с течением времени, а постоянная составляющая  $a_1$ , остаётся. С другой стороны, выход не возрастает неограниченно, поэтому система *нейтрально устойчива*.



# Нейтрально устойчивая система (1)

Допустим, что характеристический полином имеет пару чисто мнимых корней:  $\alpha_1 = j\omega$  и  $\alpha_2 = -j\omega$ . Это значит, что система содержит консервативное звено - генератор колебаний. При этом процесс (\*\*\*) на выходе системы содержит слагаемые  $a_1 e^{j\omega t}$  и  $a_2 e^{-j\omega t}$ , которые могут быть (с помощью формулы Эйлера) представлены в виде

$$a_1 e^{j\omega t} = a_1 (\cos \omega t + j \sin \omega t), \quad a_2 e^{-j\omega t} = a_2 (\cos \omega t - j \sin \omega t).$$

Эти составляющие дают незатухающие колебания (по крайней мере, для некоторых начальных условий), поэтому система находится на границе устойчивости (*нейтрально устойчива*). Заметим, что постоянные  $a_1$  и  $a_2$  - комплексно-сопряжённые, то есть, если  $a_1 = b + jc$ , то  $a_2 = b - jc$ . При этом сумма

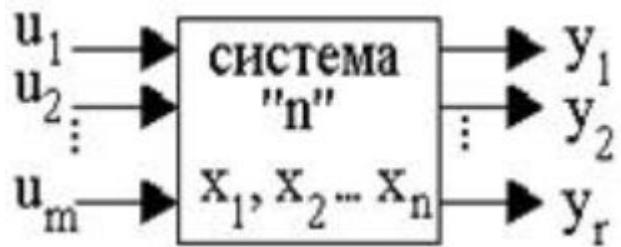
$$a_1 e^{j\omega t} + a_2 e^{-j\omega t} = 2b \cos \omega t - 2c \sin \omega t$$

не содержит мнимой части.



# Движение в пространстве состояний

Рассмотрим систему (рис.) с  $m$  входами  $(u_1, u_2, \dots, u_m)$ ,  $r$  выходами  $(y_1, y_2, \dots, y_r)$  и  $n$  переменными координатами  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .



Поведение системы во времени можно характеризовать не только выходными величинами, но и промежуточными переменными - координатами в цепи системы - переменными состояниями  $x_i$ , число которых равно порядку системы  $n$ . Таким образом, получается  $n$ -мерный **вектор состояния**  $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ . Величина и положение вектора состояния системы с течением времени  $t$  изменяются, в результате чего вектор  $\mathbf{x}(t)$  описывает кривую, называемую **траекторией движения системы в пространстве состояний**.





# Модель системы в пространстве состояний

В общем случае, рассматриваемая система может быть определена следующей векторно-матричной формой

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

где  $x(t)$  - вектор состояния системы,  $y(t)$  - вектор выходных управляемых величин,  $u(t)$  - вектор внешних воздействий (задающих и возмущающих),  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  - матрицы системы.  $A$  - матрица системы;  $B$  - матрица управления;  $C$  - матрица наблюдения;  $D$  - матрица связи. Эта система уравнений называется **моделью вход-состояние-выход**.

Первое уравнение определяет динамические характеристики системы и представляет собой компактную запись системы  $n$  линейных дифференциальных уравнений, разрешённых относительно производных первого порядка (нормальная форма Коши). Второе уравнение является уравнением выхода системы.



# Устойчивость внутренних процессов

Теперь посмотрим, как определить внутреннюю устойчивость линейной системы, то есть, устойчивость внутренних процессов. Поскольку выход системы нас не интересует, используем модель «вход-состояние», т.е. первое уравнение:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$

где  $x(t)$  - вектор состояния,  $u(t)$  - входной сигнал,  $A$  и  $B$  - постоянные матрицы. Если вход равен нулю (нет возмущений), уравнение упрощается

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

Таким образом, свободное движение определяется только свойствами матрицы  $A$ .



# Устойчивость внутренних процессов

Сначала для простоты будем считать, что матрица  $A$  имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Тогда уравнение распадается на два независимых уравнения (две подсистемы):

$$\dot{x}_1(t) = \alpha_1 x_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \alpha_2 x_2(t)$$

Здесь устойчивость определяется значениями  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Если они оба отрицательны, то система **асимптотически устойчива**. Если одно из них - нуль, а второе отрицательно (или оба нулевых), то система **нейтрально устойчива**.

В общем случае *внутренняя устойчивость зависит от собственных чисел матрицы  $A$* , то есть, от корней определителя матрицы  $\det(\lambda I - A) = 0$ , где  $I$  - единичная матрица. Полином  $\det(\lambda I - A)$  от переменной  $\lambda$  называют **характеристическим полиномом**.



# Устойчивость внутренних процессов (1)

Если все корни характеристического полинома устойчивы (имеют отрицательные вещественные части, расположены в левой полуплоскости), то система **асимптотически устойчива**.

Если есть неустойчивые корни (с положительной вещественной частью), то **система неустойчива**. Если характеристический полином имеет один нулевой корень или пару комплексно-сопряжённых корней на мнимой оси, то **система нейтрально устойчива**.

Внутренняя устойчивость - более сильное требование, чем техническая устойчивость, потому что определяет ограниченность не только выхода, но и всех внутренних переменных при любых начальных условиях.



# Устойчивость линеаризованных систем

Устойчивость нелинейной системы можно во многих случаях оценивать с помощью линеаризованной системы. Для этого применяют теоремы Ляпунова, которые связывают корни характеристического полинома  $\Delta(s)$  **линейной модели** и **устойчивость нелинейной системы** в окрестности точки линеаризации:

- если все корни имеют отрицательные вещественные части, то нелинейная система также устойчива;
- если есть хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то нелинейная система неустойчива;
- если нет корней с положительной вещественной частью, но есть хотя бы один корень с нулевой вещественной частью, то об устойчивости нелинейной системы ничего нельзя сказать без дополнительного исследования.



# Устойчивость экономики в форме модели Самуэльсона — Хикса

Характеристическое уравнение (полином) модели Самуэльсона—Хикса имеет следующий вид

$$\lambda^2 + (1 - r)\lambda + 1 - c = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 < c < 1.$$

(обозначения соответствуют характеристическому уравнению  $\sum_{j=0}^n a_j \lambda^j = 0$   $r$  - коэффициент акселерации).

Его корни равны

$$\lambda_1 = -\frac{1-r}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-r}{2}\right)^2 - (1-c)}, \quad \lambda_2 = -\frac{1-r}{2} - \sqrt{\left(\frac{1-r}{2}\right)^2 - (1-c)}$$

Если дискриминант неотрицателен:

$$(1 - r)^2 - 4(1 - c) \geq 0, \quad \text{т. е. } r \leq 1 - 2\sqrt{1 - c},$$

то корни действительны и отрицательны, поэтому *экономика устойчива* и ведёт себя *как два последовательно соединённых инерционных звена* с постоянными времени  $\left(-\frac{1}{\lambda_1}; -\frac{1}{\lambda_2}\right)$  (экспоненциальное затухание).



# Устойчивость экономики в форме модели Самуэльсона — Хикса (1)

Если дискриминант отрицателен:

$$(1 - r)^2 - 4 \cdot (1 - c) < 0, \text{ т. е. } r > 1 - 2\sqrt{1 - c}$$

то уравнение имеет комплексные, взаимно сопряжённые корни:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\omega, \quad \alpha = \frac{1-r}{2}, \quad \omega = \sqrt{(1-c) - \left(\frac{1-r}{2}\right)^2}.$$

Поскольку действительные части корней отрицательны, то экономика *устойчива* и ведет себя *как колебательное звено* (гармонические колебания с экспоненциально убывающей амплитудой)



# Устойчивость экономики в форме модели Самуэльсона — Хикса (2)

Если коэффициент акселерации  $r$  может превосходить единицу ( $r > 1$ ), то экономическая *система* становится *неустойчивой*: при положительном дискриминанте имеет место *апериодическая* монотонно увеличивающаяся *неустойчивость*, а при отрицательном — *неустойчивость* в виде *автоколебаний* с экспоненциально возрастающей амплитудой.

