Теория управления

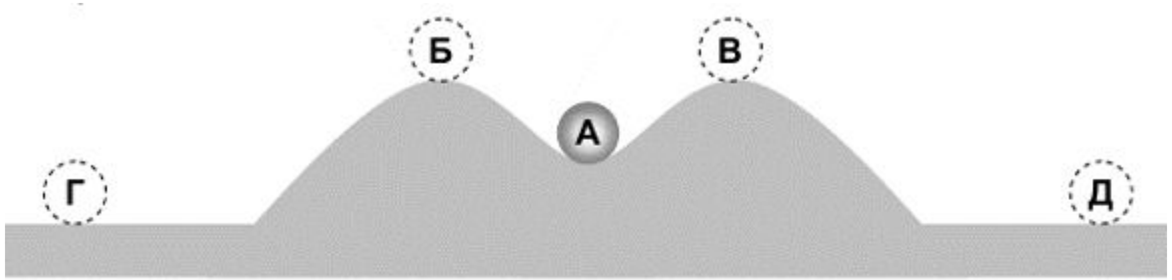
Устойчивость

Понятие устойчивости

Термин «устойчивость» используется в численных методах, механике, экономике, социологии, психологии. Во всех этих науках под ***устойчивостью понимают способность динамической системы возвращаться в исходное состояние (положение равновесия) после окончания действия внешних факторов.***

Равновесие и устойчивость

Шарик на рисунке находится в **устойчивом равновесии** в положении **А** - если немного сдвинуть его с места, он скатится обратно в ямку.



Если шарик сильно отклонить от равновесия, он может свалиться через горку вбок, то есть **устойчивость нарушится**.

В положениях **Б** и **В** шарик также находится в положении равновесия, но оно **неустойчиво**, так как при малейшем сдвиге в сторону шарик скатывается с вершины.

В положениях **Г** и **Д** **равновесие** шарика **нейтральное** - при небольшом смещении он остаётся в новом положении. При этом говорят, что система нейтрально устойчива, то есть находится на границе устойчивости.

Устойчивость системы

Система «шарик-горка» - нелинейная. Для неё

- **устойчивость** - не свойство системы, а **свойство** некоторого **положения равновесия**;
- может быть **несколько положений равновесия**, из них некоторые - устойчивые, а некоторые - нет;
- положение равновесия может быть устойчиво при малых отклонениях (система **устойчива «в малом»**) и неустойчиво при больших **(«в большом»)**

Устойчивость системы

При исследовании устойчивости стационарных систем следует учитывать следующее:

а) рассматривается движение *автономной системы*, описываемой уравнением

$$a(p)y(t) = 0,$$

где $a(p)$ – операторный полином;

б) поведение системы анализируется при *ненулевых начальных условиях*: $y(0) \neq 0$ или $x(0) \neq 0$ соответственно;

в) под *равновесным состоянием* понимают установившееся состояние автономной системы $y = y^*$ или $x = x^*$. Равновесное состояние находится из условия $\dot{x} = 0$ или $y^{(i)} = 0, i = \overline{(0, n)}$. Для линейной модели при $a_n \neq 0$ получаем значение $y^* = 0$.

Виды устойчивости

Известно несколько определений устойчивости, которые отличаются некоторыми деталями.

Если рассматривать только *выход* системы при различных ограниченных *входах*, то говорят об **устойчивости «вход-выход».**

Часто изучают *устойчивость автономной системы*, на которую не действуют внешние сигналы (все входы нулевые). Предполагается, что систему вывели из положения равновесия (задали ненулевые начальные условия) и «отпустили». Система, которая сама возвращается в исходное положение равновесия, *называется устойчивой*. Если при этом рассматривается только выход системы (а не ее внутренние сигналы), говорят о **«технической устойчивости» (или устойчивости по выходу).**

Виды устойчивости (1)

Внутренняя или математическая устойчивость означает, что не только выход, но и все внутренние переменные (переменные состояния) приближаются к своим значениям в положении равновесия.

Устойчивость «вход-выход»

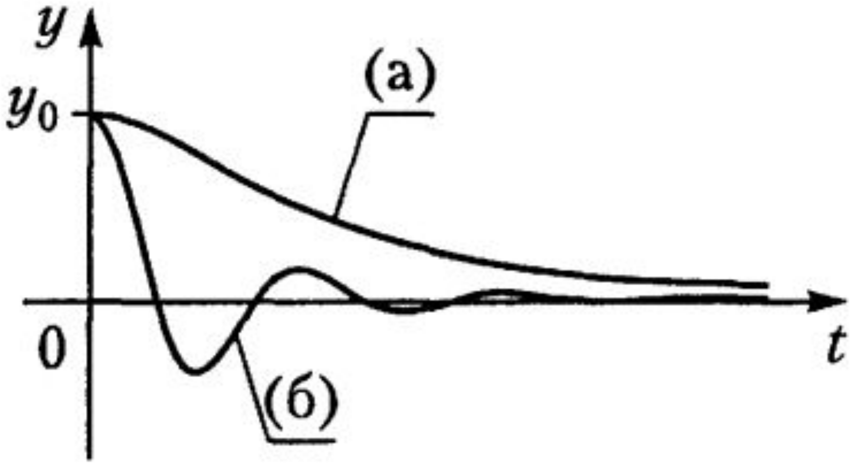
Обычно для инженеров в первую очередь важно, чтобы система не «пошла вразнос», то есть, чтобы ***управляемая величина не росла неограниченно*** при всех допустимых входных сигналах. Если это так, говорят, что система обладает устойчивостью «вход-выход» (при ограниченном входе выход также ограничен). Заметим, что при этом нас не интересует, как меняются внутренние переменные объекта, **важен только вход и выход**.

Рассмотрим ванну, которая наполняется водой из крана. Модель этой системы - интегрирующее звено. При постоянном (ограниченном по величине!) входном потоке уровень воды в ванне будет неограниченно увеличиваться (пока вода не польётся через край), поэтому такая системе не обладает устойчивостью «вход-выход».

«Техническая» устойчивость

Понятие «техническая устойчивость» относится к автономной системе, у которой все входные сигналы равны нулю.

Определение 1. Система (или движение системы относительно положения равновесия $y^* = 0$) называется устойчивой, если с течением времени (при $t \to \infty$) она возвращается в положение равновесия, т. е. $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$

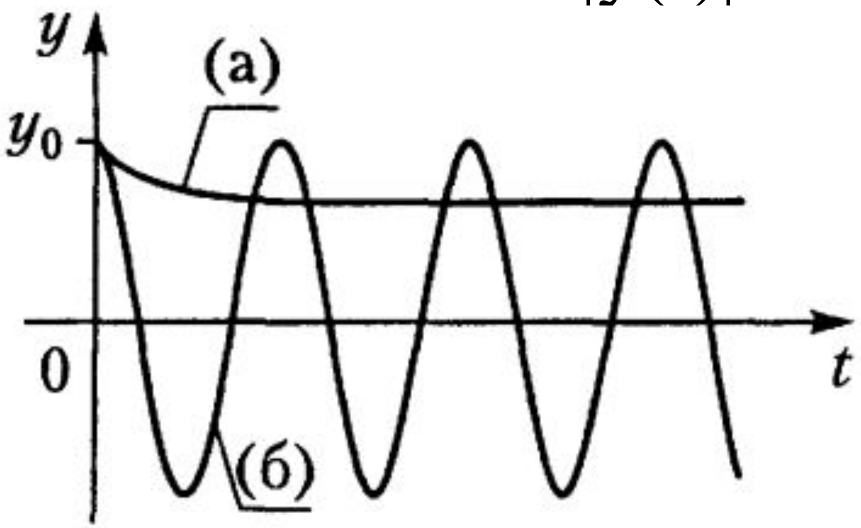


Апериодический (а) и колебательный (б) процессы устойчивой системы

«Техническая» устойчивость (1)

Определение 2. Система (или движение системы относительно положения равновесия $y^* = 0$) называется нейтрально устойчивой, если для любых $t > 0$ она остается в некоторой окрестности положения равновесия (рис.), т. е. найдётся число $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $t \geq 0$ выполняется

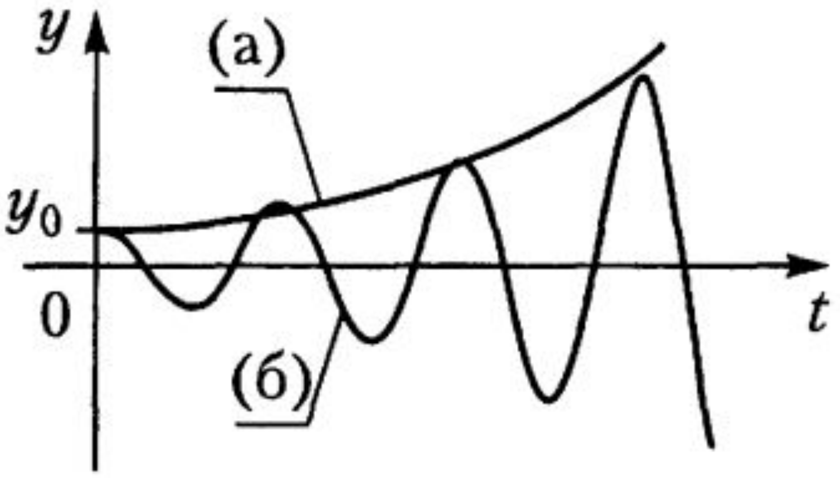
$$|y(t)| < \varepsilon$$



Апериодический (а) и колебательный (б) процессы нейтрально устойчивой системы

«Техническая» устойчивость (2)

Определение 3. Система (или движение системы относительно положения равновесия y* = 0) называется неустойчивой, если с течением времени она покидает любую наперёд заданную ε - окрестность положения равновесия (рис.), т. е. для любых $\varepsilon > 0$ найдётся $t^* > 0$ такое, что при $t > t^*$ имеет место $|y(t)| > \varepsilon$



Апериодический (а) и колебательный (б) процессы неустойчивой системы

Внутренняя устойчивость

Говоря о внутренней устойчивости, рассматривают не только выход, но и все переменные, описывающие состояние системы. В математической теории систем вектор состояния обозначают через $\boldsymbol{x}(t)$, а уравнение движения системы записывают в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x,t) \qquad (*)$$

Если вектор состояния $\boldsymbol{x}(t)$ состоит из двух компонентов, $x_1(t)$ и $x_2(t)$, это уравнение можно записать в развёрнутой форме

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x,t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x,t) \end{cases}$$

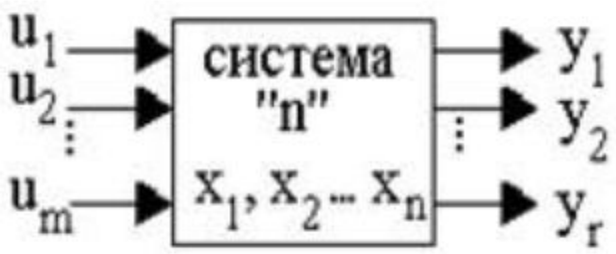
где функции $f_1(x,t)$ и $f_2(x,t)$ зависят от вектора состояния и времени.

Внутренняя устойчивость. Состояние системы

Говоря о внутренней устойчивости, рассматривают не только выход, но и все переменные, описывающие состояние системы.

Под состоянием системы понимается минимально-необходимый набор переменных величин системы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, способных **однозначно и единственным образом определить положение системы** в любой момент времени t. Совокупность переменных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образует n-мерное пространство состояний. Вектор с компонентами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется **вектором состояния**.

Рассмотрим систему (рис.) с m входами ($u_1, u_2, \ldots, u_m$), r выходами ($y1, y2, \ldots, y_r$) и n переменными координатами ($x_1, x_2, \ldots, x_n$).



Фазовое пространство

При рассмотрении устойчивости полезным оказалось введение некоторых наглядных геометрических понятий и представлений. Основным из них является *понятие фазового пространства*.

Фазовым пространством называется пространство, в котором декартовыми координатами точки являются величины, определяющие мгновенное состояние системы. Их называют *фазовыми координатами*. Точка фазового пространства, соответствующая состоянию системы в данный момент времени t, называется *изображающей точкой*.

Изменение состояния системы во времени соответствует движению изображающей точки в этом пространстве по определённой траектории, которая *называется фазовой*. Траекторию движения систем второго порядка обычно изображают на фазовой плоскости, где по одной оси откладывается $y_1(t)$, а по другой – $y_2(t)$.

Фазовый портрет типа устойчивый фокус

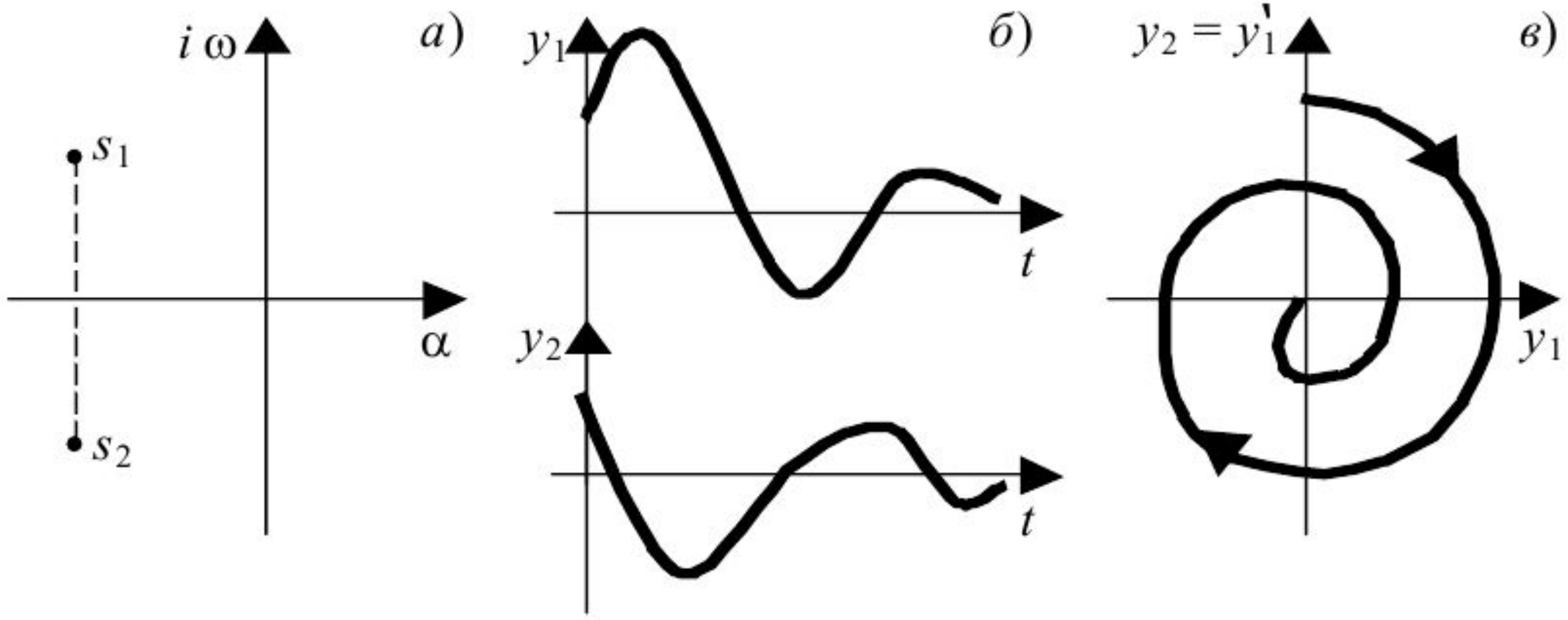


Рис. Фазовый портрет
а)расположение корней характеристического уравнения
б) - переходный процесс; в) - фазовый портрет

Устойчивость движения

Движение называется ***невозмущённым***, если оно получено в результате рассмотрения идеализированной системы.

Движение с учётом возмущений, возникающих в реальной системе, называется ***возмущённым***.

Невозмущённое движение называется ***устойчивым***, если достаточно *малые возмущения* сколь угодно *мало отклоняют возмущённое движение* от невозмущённого.

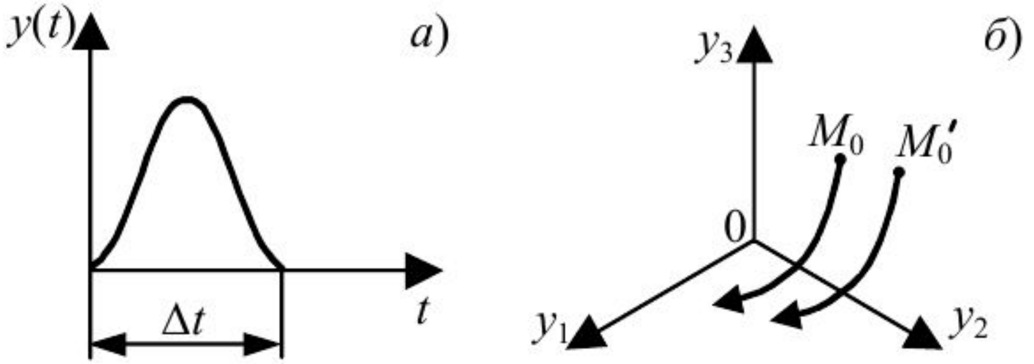
Если же возмущённое движение заметно отклоняется от невозмущённого при сколь угодно слабых возмущениях, то оно называется ***неустойчивым***.

Малые возмущения

Уточним, что понимается под малыми возмущениями. Любые возмущения можно разделить на два типа: импульсные и непрерывно действующие .

Импульсные возмущения.

Возмущение называется **импульсным**, если оно действует в течение короткого промежутка времени Δt (рис. а). Импульс считают мгновенным, если за время Δt координата не успевает заметно измениться. В этом случае его влияние заключается в мгновенном сдвиге изображающей точки M_0 системы из начального положения M_0 в некоторое другое положение M'_0. Траектория невозмущённого движения исходит из точки М, а возмущённого - из M'_0 и отличается от первой (рис. б). Влияние импульса сказывается на всем движении системы, хотя он действовал только при времени Δt .



Действие импульсного возмущения:
а) импульсное возмущение; б - движение в фазовом пространстве

Малые возмущения (1)

Обозначим через y_{i0} координаты точки M_{i0}, $i = 1,\ldots, N$; через y'_{i0}, $i = \overline{1, N}$ - координаты M'_{i0}. При малом сдвиге разность удовлетворяет условию

$$\left| y_{i0} - y'_{i0} \right| < \eta ,$$

где η - некоторое достаточно малое положительное число.

Малым возмущением называется такое импульсное возмущение, которое вызывает малый сдвиг начального положения изображающей точки системы.

Малым возмущениям соответствуют малые η.

Непрерывно действующие возмущения

Такие возмущения действуют на систему постоянно (рис.). Непрерывное возмущение можно представить в виде последовательности импульсов, т.е. разрезать весь график $x(t)$ на импульсы длительностью dt, поэтому для анализа достаточно рассматривать лишь импульсные возмущения.

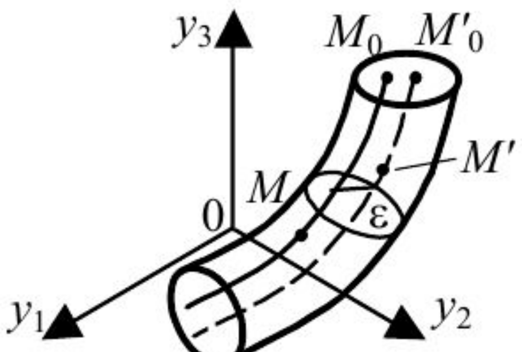
Системы, устойчивые при импульсных возмущениях, устойчивы и при непрерывных; неустойчивые при первом типе - неустойчивы и при втором.

ε-окрестность движения

При анализе устойчивости вводится понятие ε-окрестности невозмущённого движения. С этой целью рассматривается траектория невозмущённого движения M_0M и строится криволинейный цилиндр радиусом ε, осью которого является эта траектория. Считается, что траектория возмущённого движения мало отклоняется от траектории невозмущённого движения, если она целиком лежит в ε -окрестности невозмущённого движения (ε - мало).

Возмущённое движение исходит из точки M'_0 (рис.).

Устойчивость - это свойство движения, имеющее качественный, а не количественный характер. поэтому при формулировке этого понятия важна принципиальная возможность подобрать столь малое ε , чтобы кривая возмущённого движения не вышла из ε -окрестности невозмущённого движения при любом значении ε. **Если такая возможность существует, то движение устойчиво, если она отсутствует, то неустойчиво**.



Определение устойчивости по Ляпунову

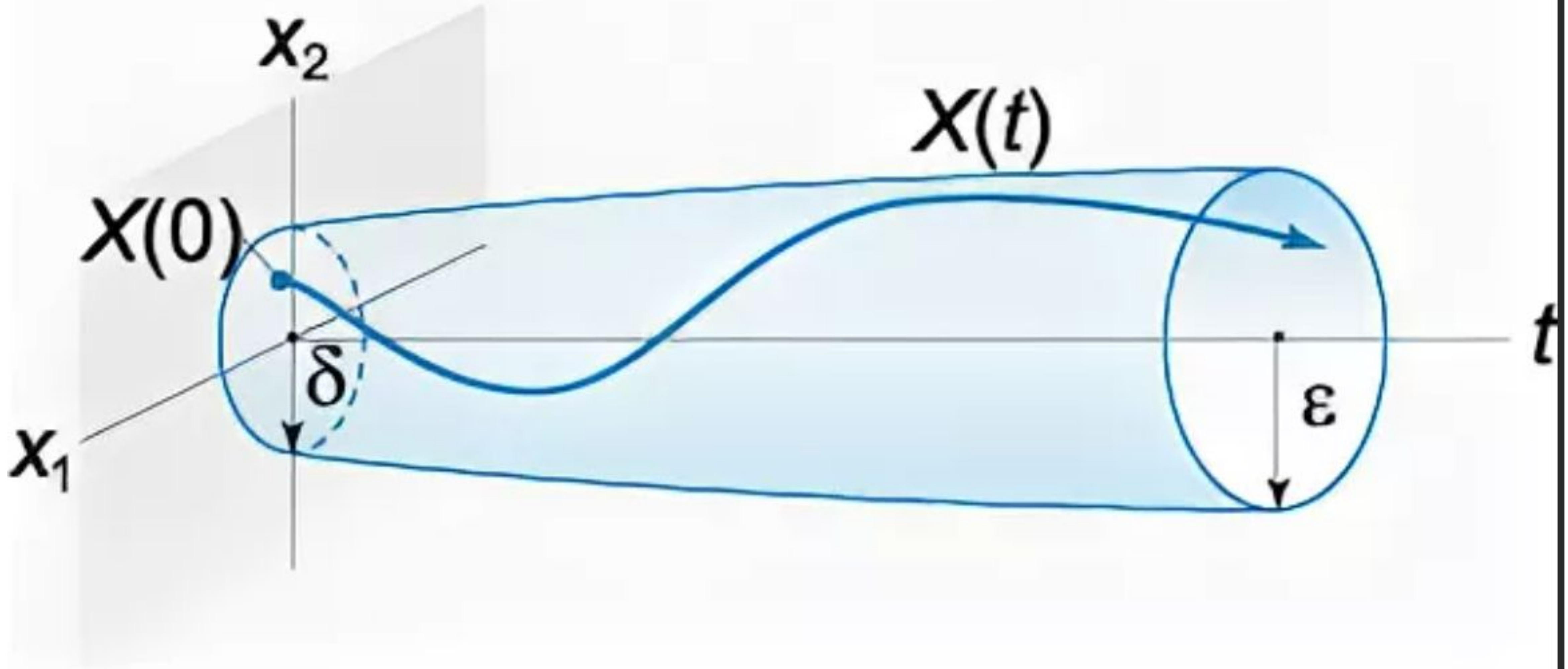
Формальное определение внутренней устойчивости было введено в работах А.М. Ляпунова, поэтому такое понятие устойчивости ***принято называть устойчивостью по Ляпунову***.

Для простоты рассмотрим систему первого порядка, с одной переменной состояния $x(t)$. **Система называется устойчивой по Ляпунову в положении равновесия x^*, если при начальном отклонении x_0 от положения равновесия x^* не более, чем на δ, траектория движения отклоняется от x^* не более, чем на ε, причём для каждого ε можно найти соответствующее ему $\delta(\varepsilon)$:**

$$\left|x_0 - x^*\right| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|x(t) - x^*\right| < \varepsilon \text{ при всех } t > 0.$$

.

Устойчивость по Ляпунову



Устойчивость по Ляпунову

Фактически это означает, что чем меньше начальное отклонение, тем меньше траектория движения отклоняется от положения равновесия. Если, кроме того, вектор состояния стремится к положению равновесия, т.е.

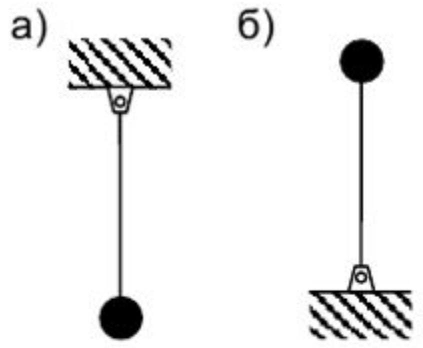
$$\left|x(t)-x^*\right| \to 0 \text{ при } t \to \infty$$

система называется ***асимптотически устойчивой в положении равновесия*** x^*. Выполнение условия сходимости (***) не гарантирует устойчивость по Ляпунову. Существуют примеры достаточно сложных нелинейных систем, в которых даже при очень малых отклонениях от положения равновесия сначала наблюдается большой «выброс», а затем траектория сходится к точке равновесия.

Асимптотическая устойчивость - более сильное требование. Положения равновесия, которые устойчивы по Ляпунову, но не асимптотически устойчивы, называются **нейтрально устойчивыми** (маятник без трения).

Пример устойчивой системы

Рассмотрим маятник на рисунке ниже (а), состоящий из подвешенного металлического стержня и шарика. Здесь положение равновесия - шарик в нижней точке. Если не учитывать трение, маятник, выведенный из положения равновесия, будет качаться бесконечно долго, причём амплитуда колебаний не будет увеличиваться, то есть, система ***нейтрально устойчива***

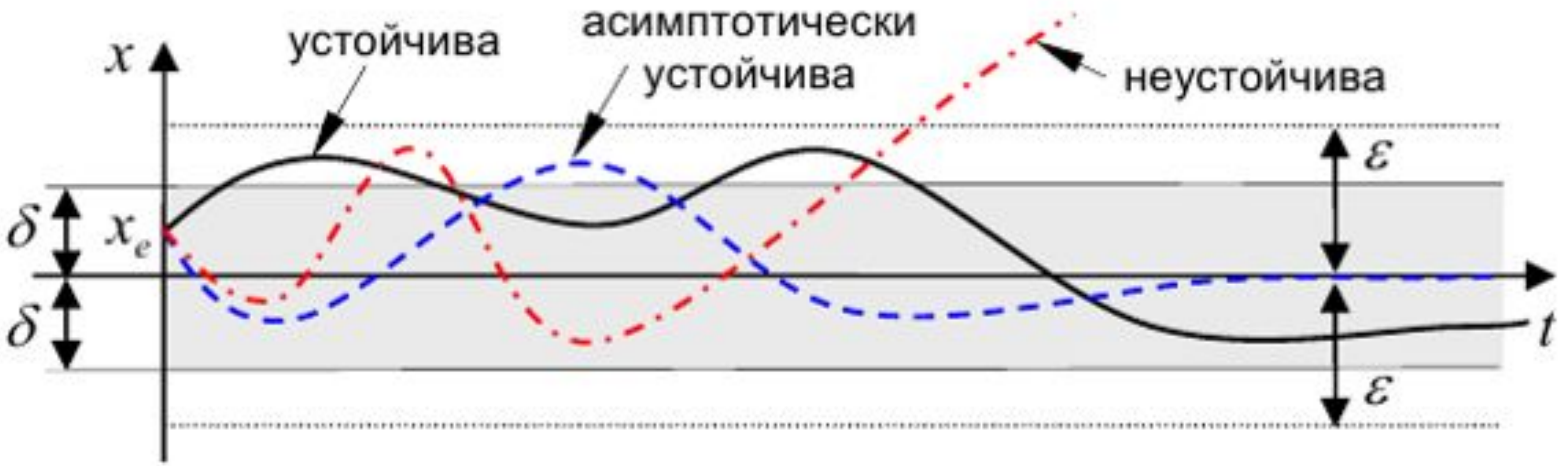


В реальности трение, конечно, есть, поэтому колебания маятника будут постепенно затухать (амплитуда уменьшается), и система в конце концов возвращается в положение равновесия. Это значит, что маятник с трением - ***асимптотически устойчивая система***. Маятник на рисунке б) тоже находится в положении равновесия, но оно ***неустойчиво***: при малейшем отклонении маятник упадёт вниз.

Устойчивость по Ляпунову (1)

Положение равновесия неустойчиво, если для него не выполняется условие устойчивости Ляпунова. Это значит, что существует такое $\varepsilon > 0$, что траектория $x(t)$ выходит за границы области $|x(t)-x^*| < \varepsilon$ при сколь угодно малом отклонении начального состояния x_0 от положения равновесия x^*. Например, система переходит в другое положение равновесия, или $x(t)$ неограниченно возрастает.

На рисунке показаны движения ***устойчивой***, ***асимптотически устойчивой*** и ***неустойчивой*** систем первого порядка (с одной координатой $x(t)$).



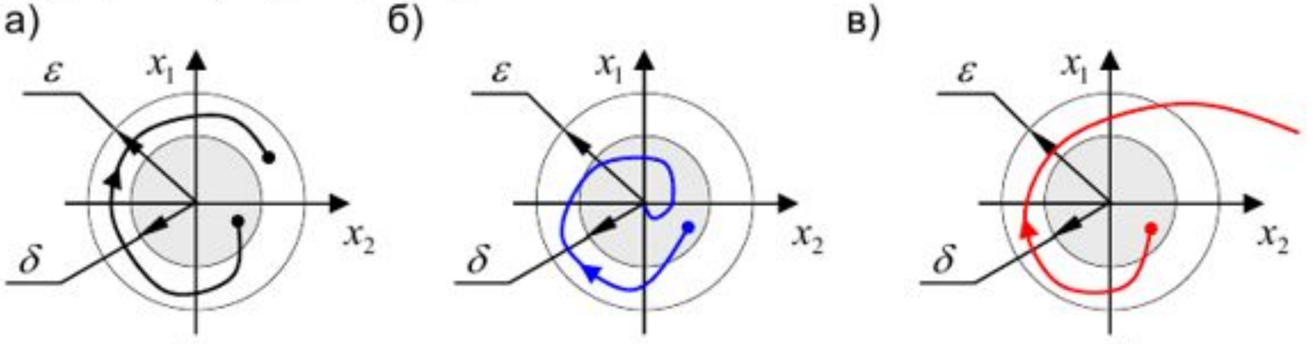
Устойчивость по Ляпунову (2)

Если вектор состояния содержит несколько переменных, для оценки разности векторов x_0 - x^* и $x(t)$ - x^* вместо модуля используют евклидову норму. Например, для системы второго порядка

$$\|x(t)-x_e\| = \sqrt{(x_1(t)-x_1^*)^2 + (x_1(t)-x_2^*)^2}$$

где $x_1{}^*$ и $x_2{}^*$ - компоненты вектора x'.

Траекторию движения систем второго порядка обычно изображают на фазовой плоскости, где по одной оси откладывается $x_1(t)$, а по другой – $x_2(t)$. На рисунке показаны движения устойчивой, асимптотически устойчивой и неустойчивой систем. Для простоты предполагается, что положение равновесия - это начало координат, где $x_1 = x_2 = 0$.



устойчива

асимптотически устойчива

неустойчива

Особенности устойчивости линейных систем

- Автономная линейная система может иметь единственное положение равновесия (в котором все сигналы равны нулю) или бесконечно много положений равновесия (шарик на плоской поверхности);
- устойчивость - это свойство всей линейной системы, а не отдельного её положения равновесия: или все её движения *устойчивы* (*асимптотически устойчивы*), или все *неустойчивы*;
- асимптотическая *устойчивость* линейной системы «*в малом*» сразу *означает* ее *устойчивость* «*в целом*», то есть, при любых отклонениях от положения равновесия;
- *асимптотически устойчивая система* также обладает *устойчивостью «вход – выход»*, просто устойчивая (*нейтрально устойчивая*, не асимптотически устойчивая) - нет.

Условия устойчивости линейных систем

Для того, чтобы получить условия устойчивости, рассмотрим уравнение движения линейной системы, на которую не действуют возмущения. Пусть $W(s)$ - её передаточная функции. Будем считать, что она имеет только простые (не кратные) полюса α_i $(i = 1, ..., N)$ (корни знаменателя):

$$W(s) = \frac{n_W(s)}{\Delta(s)} = \frac{n_W(s)}{(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\ldots(s-\alpha_N)},$$

где $n_w(s)$ и $\Delta(s)$ - полиномы. Из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что при отсутствии возмущений выход такой системы можно представить в виде

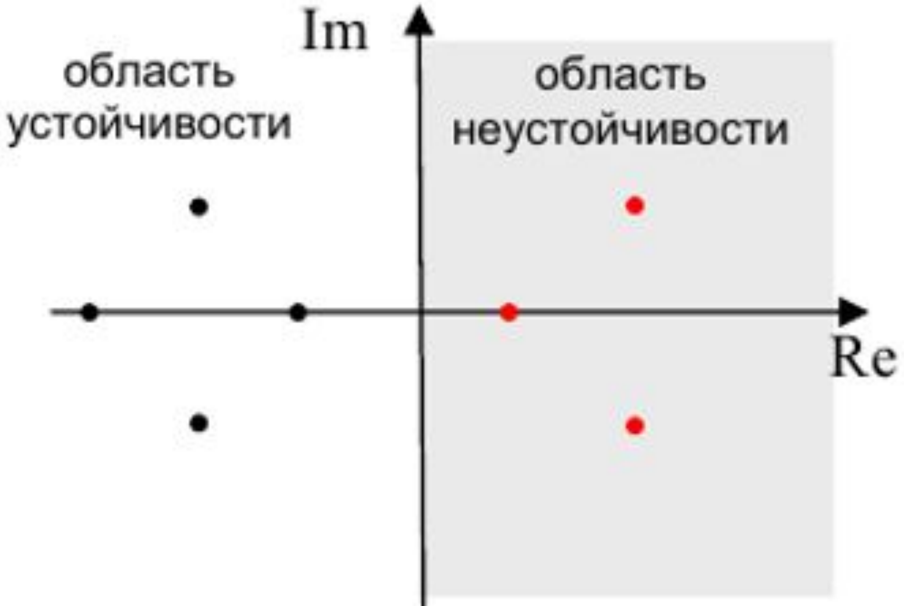
$$y(t) = a_1 e^{\alpha_1 t} + a_2 e^{\alpha_2 t} + \ldots + a_N e^{\alpha_N t},$$

где a_i $(i = 1, ..., N)$ - постоянные, которые определяются начальными условия. Таким образом, **процесс** $y(t)$ **затухает** при любых начальных условиях **тогда и только тогда, когда все корни** α_i $(i = 1, ..., N)$ **имеют отрицательные вещественные части**. В этом случае система ***асимптотически устойчива***.

Условия устойчивости линейных систем (1)

Поскольку устойчивость линейной системы определяют корни полинома $\Delta(s)$ - знаменателя передаточной функции $W(s)$, этот полином называется ***характеристическим полиномом системы***.

Если показать корни характеристического полинома (в общем случае - комплексные числа) на комплексной плоскости, то слева от мнимой оси будут устойчивые корни (с отрицательной вещественной частью), а справа – неустойчивые. Таким образом, ***область устойчивости - это левая полуплоскость***



Нейтрально устойчивая система

Предположим, что один из корней полинома $\Delta(s)$ равен нулю (скажем, $\alpha_1 = 0$), а остальные устойчивы, то есть, их вещественные части отрицательные. Это значит, что система содержит интегрирующее звено. Учитывая, что $e^{\alpha_1} = e^0 = 1$ при всех t, получаем

$$y(t) = a_1 + a_2 e^{\alpha_2 t} + \ldots + a_N e^{\alpha_N t}.$$

Здесь все слагаемые в правой части, кроме первого, затухают с течением времени, а постоянная составляющая a_1, остаётся. С другой стороны, выход не возрастает неограниченно, поэтому система ***нейтрально устойчива***.

Нейтрально устойчивая система (1)

Допустим, что характеристический полином имеет пару чисто мнимых корней: $\alpha_1 = j\omega$ и $\alpha_2 = -j\omega$ Это значит, что система содержит консервативные звено - генератор колебаний. При этом процесс (****) на выходе системы содержит слагаемые $a_1 e^{\alpha t}$ и $a_2\, e^{-\alpha t}$, которые могут быть (с помощью формулы Эйлера) представлены в виде

$$a_1 e^{j\omega t} = a_1(\cos\omega t + j\sin\omega t), \quad a_2 e^{-j\omega t} = a_2(\cos\omega t - j\sin\omega t).$$

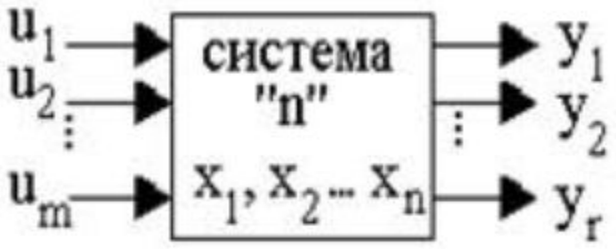
Эти составляющие дают незатухающие колебания (по крайней мере, для некоторых начальных условий), поэтому система находится на границе устойчивости (***нейтрально устойчива***). Заметим, что постоянные a_1 и a_2 - комплексно-сопряжённые, то есть, если $a_1 = b + jc$, то $a_2 = b - jc$. При этом сумма

$$a_1 e^{j\omega t} + a_2 e^{-j\omega t} = 2b\cos\omega t - 2c\sin\omega t$$

не содержит мнимой части.

Движение в пространстве состояний

Рассмотрим систему (рис.) с m входами $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, r выходами $(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ и n переменными координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.



Поведение системы во времени можно характеризовать не только выходными величинами, но и промежуточными переменными - координатами в цепи системы - переменными состояния x_i, число которых равно порядку системы n. Таким образом, получается n-мерный **вектор состояния** $\boldsymbol{x}(t)=\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$. Величина и положение вектора состояния системы с течением времени t изменяются, в результате чего вектор $\boldsymbol{x}(t)$ описывает кривую, называемую **траекторией движения системы в пространстве состояний**.

Модель системы в пространстве состояний

В общем случае, рассматриваемая система может быть определена следующей векторно-матричной формой

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

где $x(t)$ - вектор состояния системы, $y(t)$ - вектор выходных управляемых величин, $u(t)$ - вектор внешних воздействий (задающих и возмущающих), A, B, C, D - матрицы системы.
A - матрица системы; B **-** матрица управления; C - матрица наблюдения; D- матрица связи.
Эта система уравнений называется **моделью вход-состояние-выход.**
Первое уравнение определяет динамические характеристики системы и представляет собой компактную запись системы n линейных дифференциальных уравнений, разрешённых относительно производных первого порядка (нормальная форма Коши). Второе уравнение является уравнением выхода системы.

Устойчивость внутренних процессов

Теперь посмотрим, как определить внутреннюю устойчивость линейной системы, то есть, устойчивость внутренних процессов. Поскольку выход системы нас не интересует, используем модель «вход-состояние», т.е. первое уравнение:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$

где $x(t)$ - вектор состояния, $u(t)$ - входной сигнал, A и B - постоянные матрицы. Если вход равен нулю (нет возмущений), уравнение упрощается

$$x(t) = Ax(t)$$

Таким образом, свободное движение определяется только свойствами матрицы A .

.

Устойчивость внутренних процессов

.

Сначала для простоты будем считать, что матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Тогда уравнение распадается на два независимых уравнения (две подсистемы):

$$\dot{x}_1(t) = \alpha_1 x(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \alpha_2 x(t)$$

Здесь устойчивость определяется значениями α_1 и α_2. Если они оба отрицательны, то система **асимптотически устойчива**. Если одно из них - нуль, а второе отрицательно (или оба нулевых), то система **нейтрально устойчива**.

В общем случае *внутренняя устойчивость зависит от собственных чисел матрицы A*, то есть, от корней определителя матрицы $\det(\lambda I - A) = 0$, где I - единичная матрица.

Полином $\det(\lambda I - A)$ от переменной λ называют **характеристическим полиномом**.

Устойчивость внутренних процессов (1)

Если все корни характеристического полинома устойчивы (имеют отрицательные вещественные части, расположены в левой полуплоскости), то система **асимптотически устойчива**.
Если есть неустойчивые корни (с положительной вещественной частью), то **система неустойчива**. Если характеристический полином имеет один нулевой корень или пару комплексно-сопряжённых корней на мнимой оси, то **система нейтрально устойчива**.
Внутренняя устойчивость - более сильное требование, чем техническая устойчивость, потому что определяет ограниченность не только выхода, но и всех внутренних переменных при любых начальных условиях.

Устойчивость линеаризованных систем

Устойчивость нелинейной системы можно во многих случаях оценивать с помощью линеаризованной системы. Для этого применяют теоремы Ляпунова, которые **связывают корни характеристического полинома $\Delta(s)$ линейной модели и устойчивость нелинейной системы в окрестности точки линеаризации**:

- если все корни имеют отрицательные вещественные части, то нелинейная система также устойчива;
- если есть хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то нелинейная система неустойчива;
- если нет корней с положительной вещественной частью, но есть хотя бы один корень с нулевой вещественной частью, то об устойчивости нелинейной системы ничего нельзя сказать без дополнительного исследования.

Устойчивость экономики в форме модели Самуэльсона — Хикса

Характеристическое уравнение (полином) модели Самуэльсона—Хикса имеет следующий вид

$$\lambda^2 + (1 - r)\lambda + 1 - c = 0, \quad 0 \le r < 1, \quad 0 < c < 1.$$

(обозначения соответствуют характеристическому уравнению $\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j = 0$ r - коэффициент акселерации).

Его корни равны

$$\lambda_1 = -\frac{1-r}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-r}{2}\right)^2 - (1-c)}, \quad \lambda_2 = -\frac{1-r}{2} - \sqrt{\left(\frac{1-r}{2}\right)^2 - (1-c)}$$

Если дискриминант неотрицателен:

$$(1 - r)^2 - 4(1 - c) \ge 0, \text{ т. е. } r \le 1 - 2\sqrt{1-c},$$

то корни действительны и отрицательны, поэтому ***экономика устойчива*** и ведёт себя ***как два последовательно соединённых инерционных звена*** с постоянными времени $\left(-\frac{1}{\lambda_1}; -\frac{1}{\lambda_2}\right)$ (экспоненциальное затухание).

Устойчивость экономики в форме модели Самуэльсона — Хикса (1)

Если дискриминант отрицателен:

,

$$(1-r)^2 - 4\cdot(1-c) < 0, \text{ т. е. } r > 1 - 2\sqrt{1-c}$$

то уравнение имеет комплексные, взаимно сопряжённые корни:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\omega\,, \quad \alpha = \frac{1-r}{2}\,, \quad \omega = \sqrt{(1-c) - \left(\frac{1-r}{2}\right)^2}\,.$$

Поскольку действительные части корней отрицательны, то экономика ***устойчива*** и ведет себя ***как колебательное звено*** (гармонические колебания с экспоненциально убывающей амплитудой)

Устойчивость экономики в форме модели Самуэльсона — Хикса (2)

Если коэффициент акселерации *r* может превосходить единицу (*r* > 1), то экономическая ***система*** становится ***неустойчивой***: при положительном дискриминанте имеет место ***апериодическая*** монотонно увеличивающаяся ***неустойчивость***, а при отрицательном — ***неустойчивость*** в виде ***автоколебаний*** с экспоненциально возрастающей амплитудой.