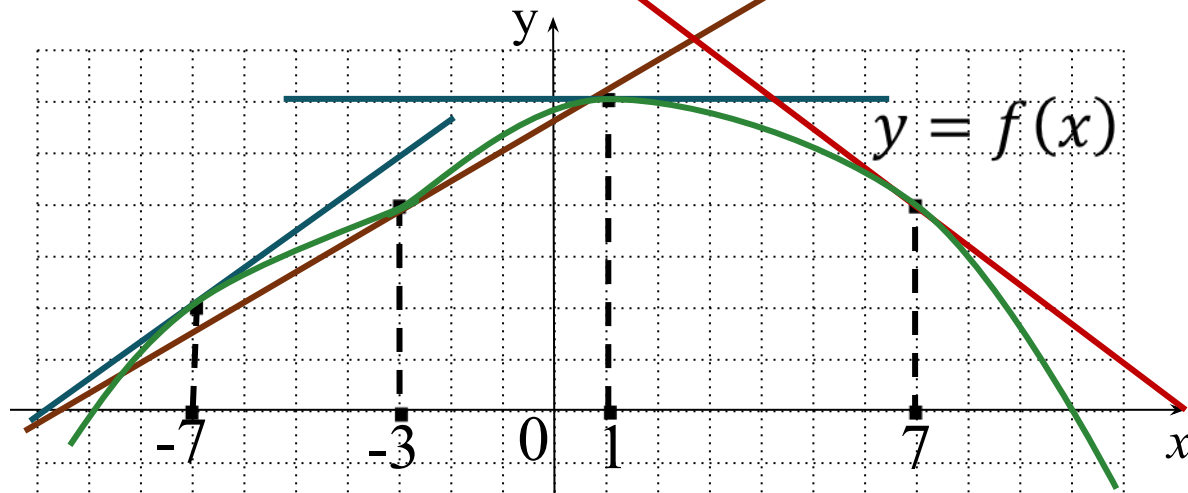


ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

ЗАДАЧА №7

Профильный уровень

ЗАДАЧА (№1)



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-7, -3, 1, 7$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

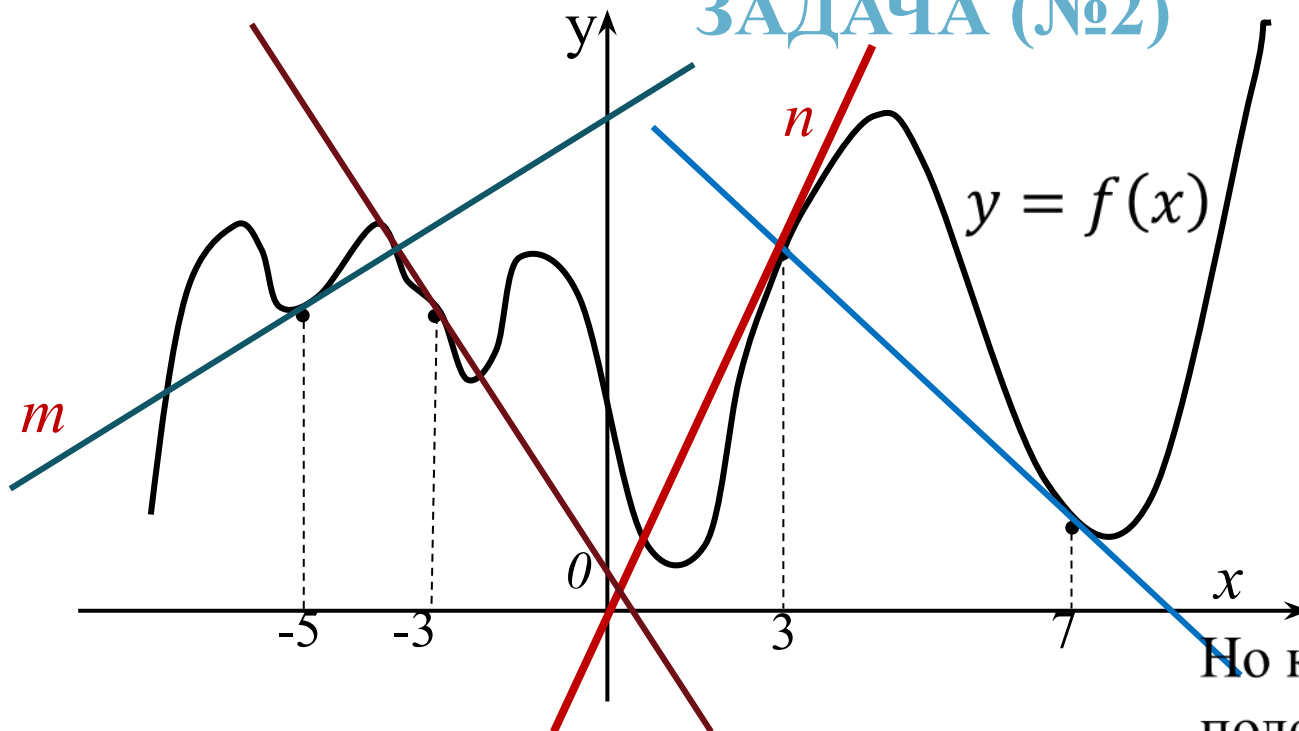
Решение: Т.к. значение производной функции в точке равно $\operatorname{tg} \alpha$ – угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в данной точке, проведём эти касательные.

В точках $x = -7$ и $x = -3$ $\operatorname{tg} \alpha > 0$, в точке $x = 1$ $\operatorname{tg} \alpha = 0$.

В точке $x = 7$ $\operatorname{tg} \alpha < 0$, \Rightarrow в этой точке значение производной наименьшее.

Ответ: 7

ЗАДАЧА (№2)



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-5, -3, 3, 7$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку

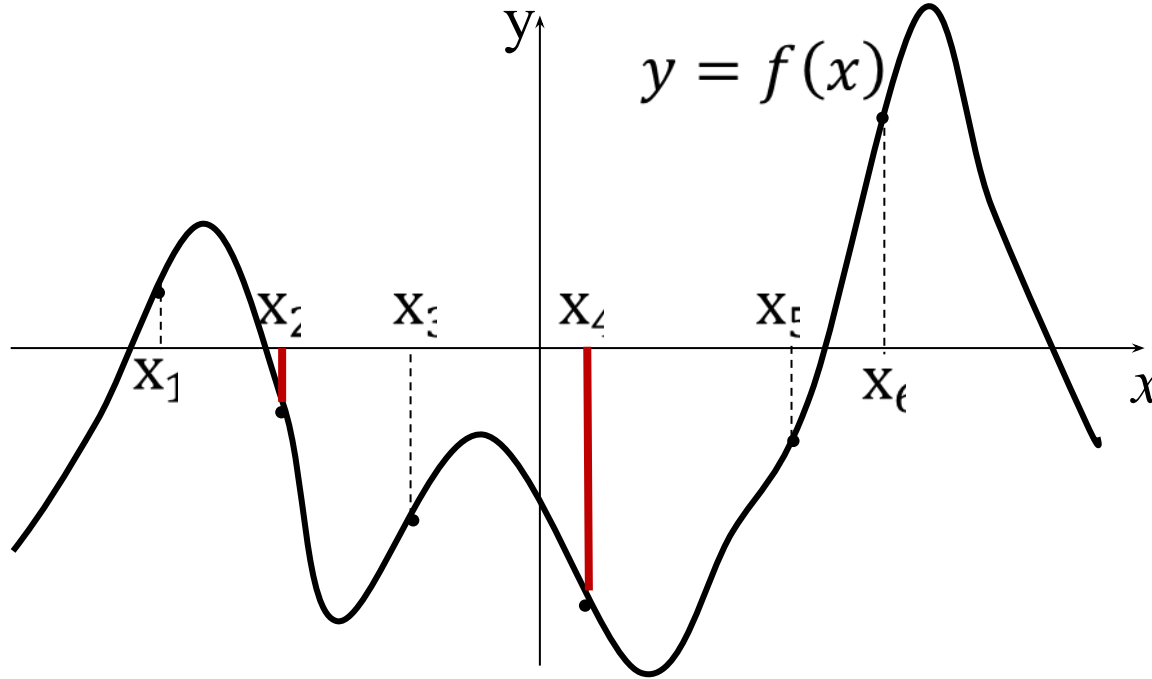
Но касательная n и положительное направление оси Ox образуют больший угол, чем касательная m , \Rightarrow в точке $x = 3$ значение производной наибольшее.

Решение: Т.к. значение производной функции в точке равно tga – угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в данной точке, проведём эти касательные.

В точках $x = -3$ и $x = 7$ $tga < 0$, в точках $x = -5$ и $x = 3$ $tga > 0$.

Ответ: 3

ЗАДАЧА (№3)

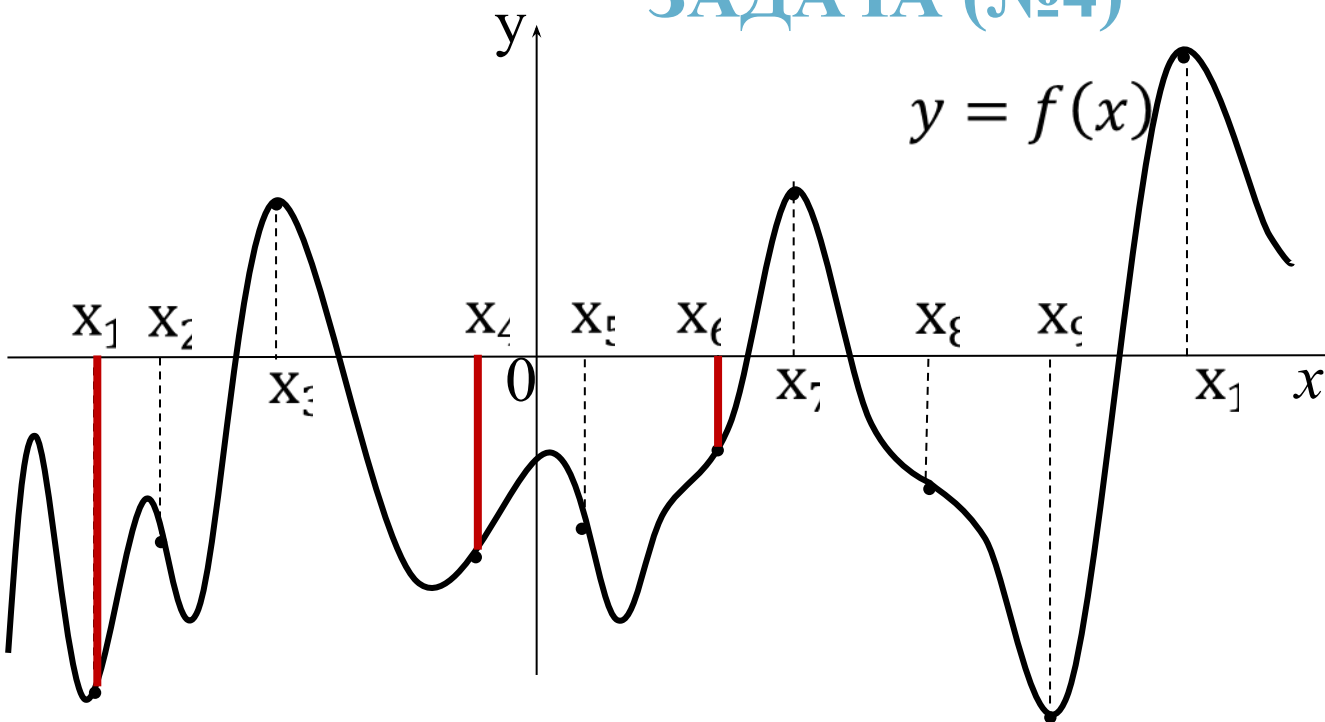


На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.

Решение: Производная функции в точке отрицательна тогда и только тогда, когда эта точка является точкой убывания данной функции. Этому условию на рисунке удовлетворяют точки x_2 и x_4 . Следовательно, количество найденных точек равно 2.

Ответ: 2

ЗАДАЧА (№4)

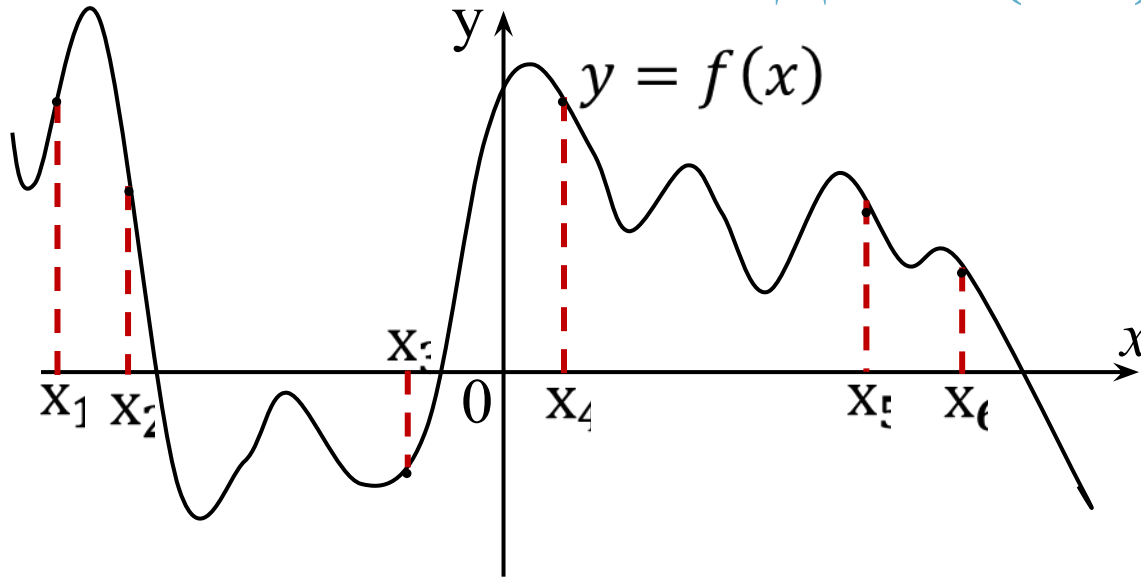


На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$. В скольких из этих точек производная $f'(x)$ функции $f(x)$ положительна.

Решение: Производная функции в точке положительна тогда и только тогда, когда эта точка является точкой возрастания данной функции. Этому условию на рисунке удовлетворяют точки x_1, x_4 и x_6 . Следовательно, количество найденных точек равно 3.

Ответ: 3

ЗАДАЧА (№5)

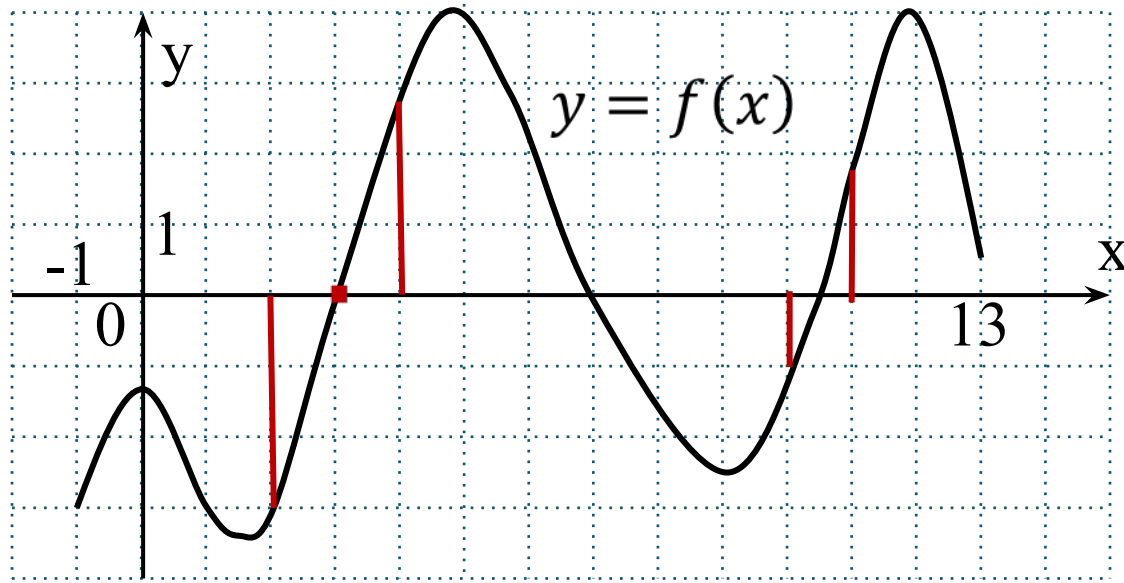


На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.

Решение: Производная функции в точке отрицательна тогда и только тогда, когда эта точка является точкой убывания данной функции. Этому условию на рисунке удовлетворяют точки x_2, x_4, x_5 и x_6 . Следовательно, количество найденных точек равно 4.

Ответ: 4.

ЗАДАЧА (№6)

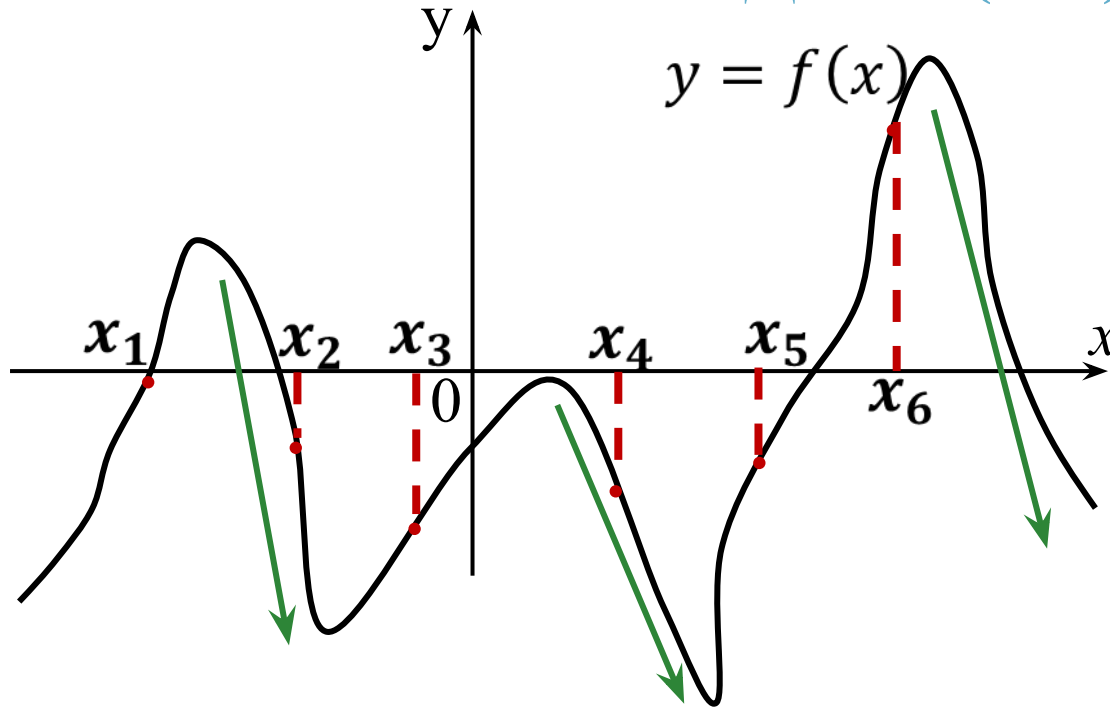


На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-1;13)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

Решение: Производная функции в точке положительна тогда и только тогда, когда эта точка является точкой возрастания данной функции. Этому условию на рисунке удовлетворяют точки абсциссы которых равны 3, 4, 5, 11, 12. Следовательно, количество найденных точек равно 5.

Ответ: 5

ЗАДАЧА (№7)



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.

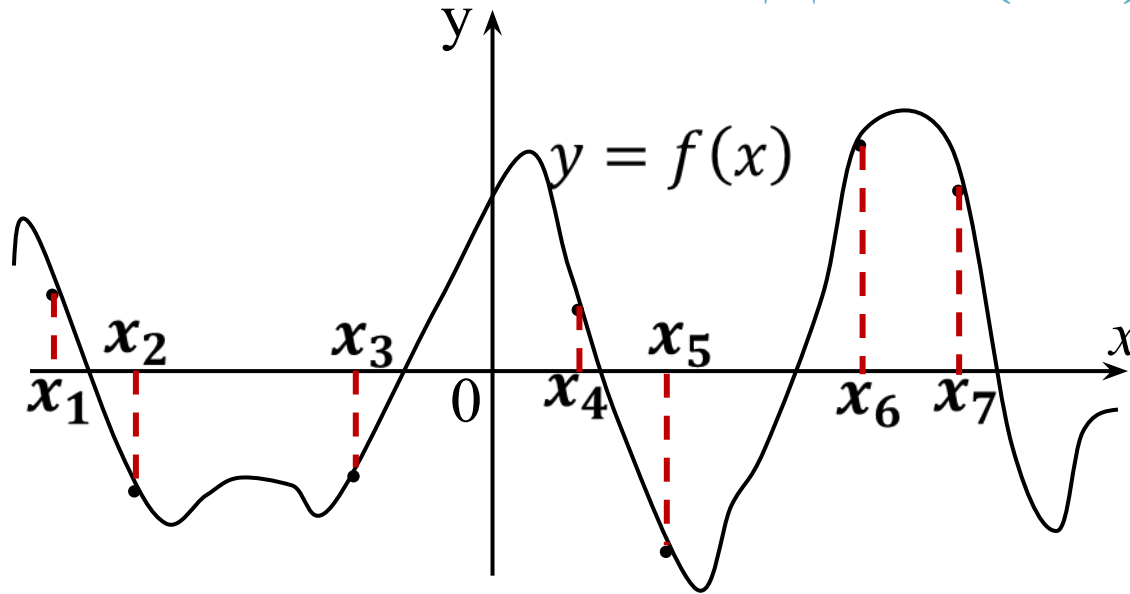
Решение: Производная функции в точке отрицательна тогда и только тогда, когда эта точка является точкой убывания данной функции.

Этому условию на рисунке удовлетворяют точки x_2 и x_4 .

Следовательно, количество найденных точек равно 2.

Ответ: 2.

ЗАДАЧА (№8)

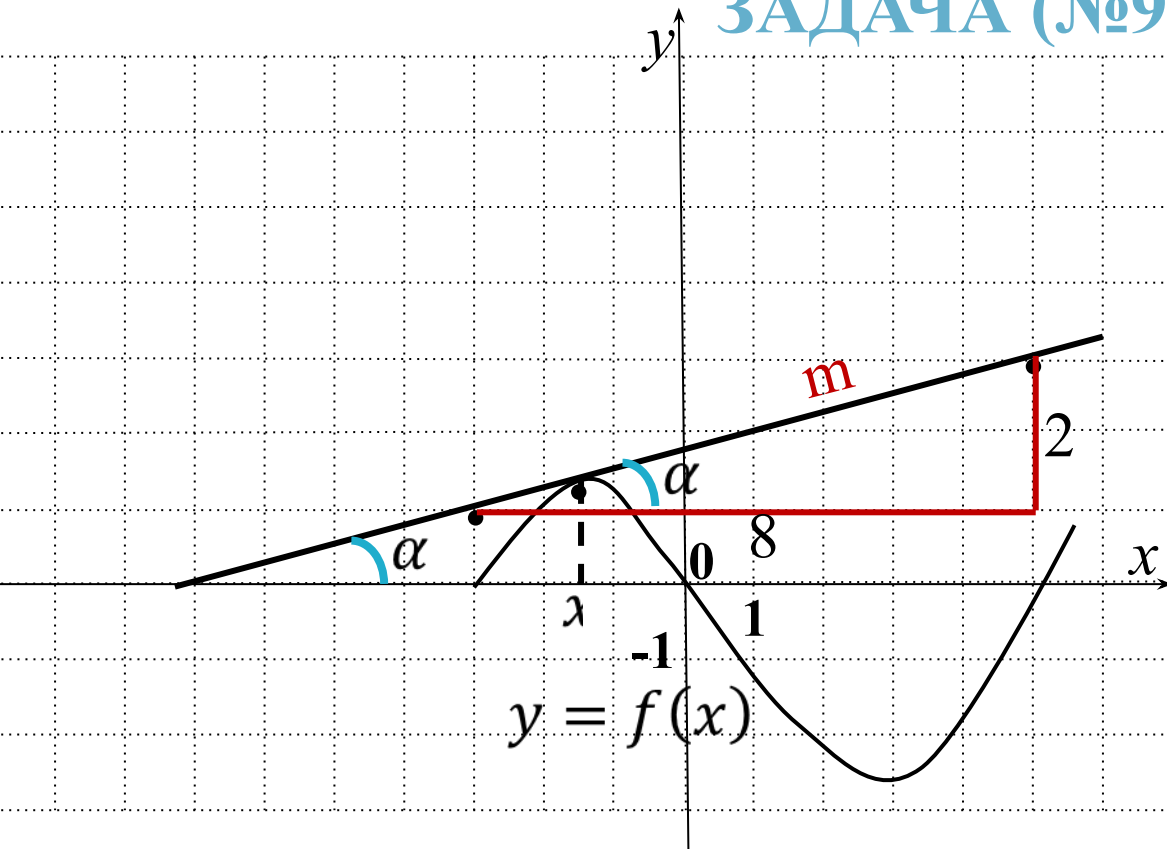


На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-1;13)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

Решение: Производная функции в точке положительна тогда и только тогда, когда эта точка является точкой возрастания данной функции. Этому условию на рисунке удовлетворяют точки x_3 и x_6 . Следовательно, количество найденных точек равно 2.

Ответ: 2.

ЗАДАЧА (№9)



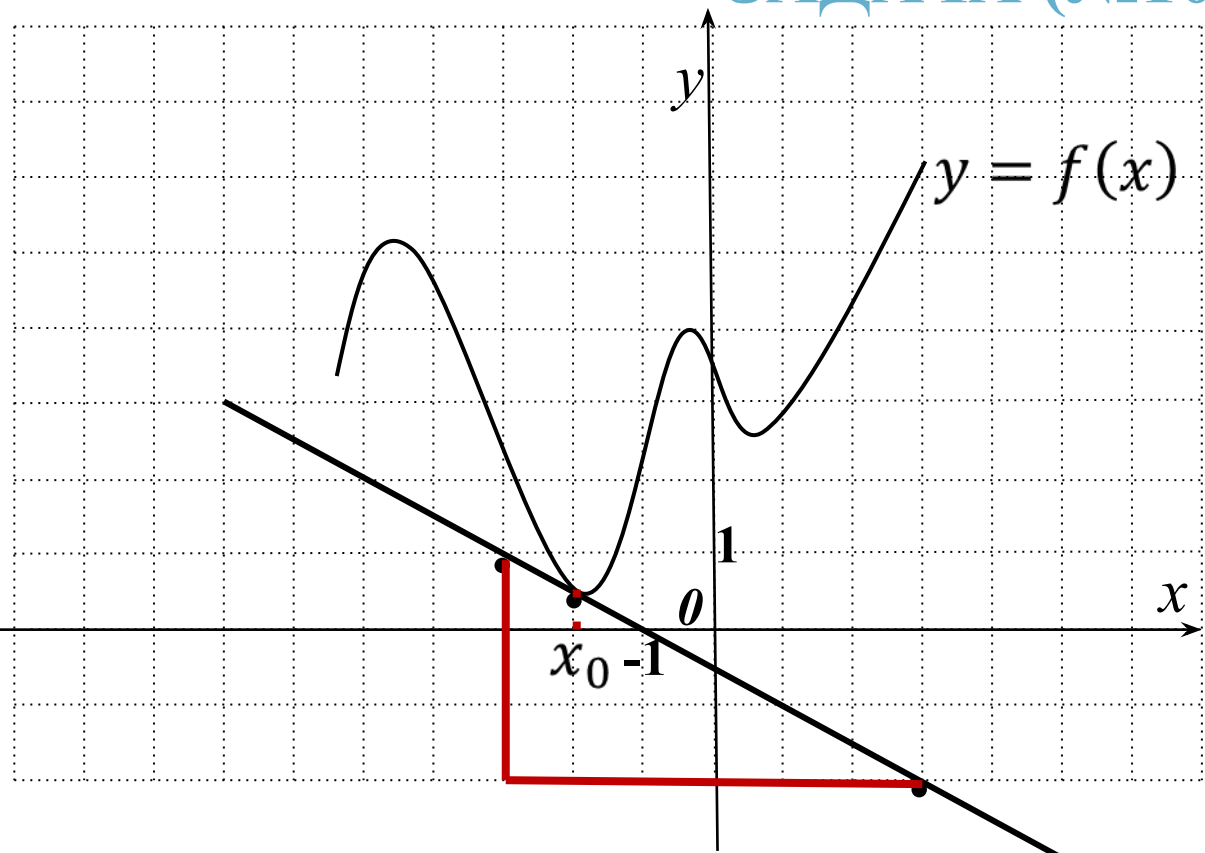
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Решение: значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 - это угловой коэффициент

касательной, проведённой к графику этой функции в данной точке. Угловой коэффициент касательной $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{8} = 0,25$.

Ответ: 0,25

ЗАДАЧА (№10)



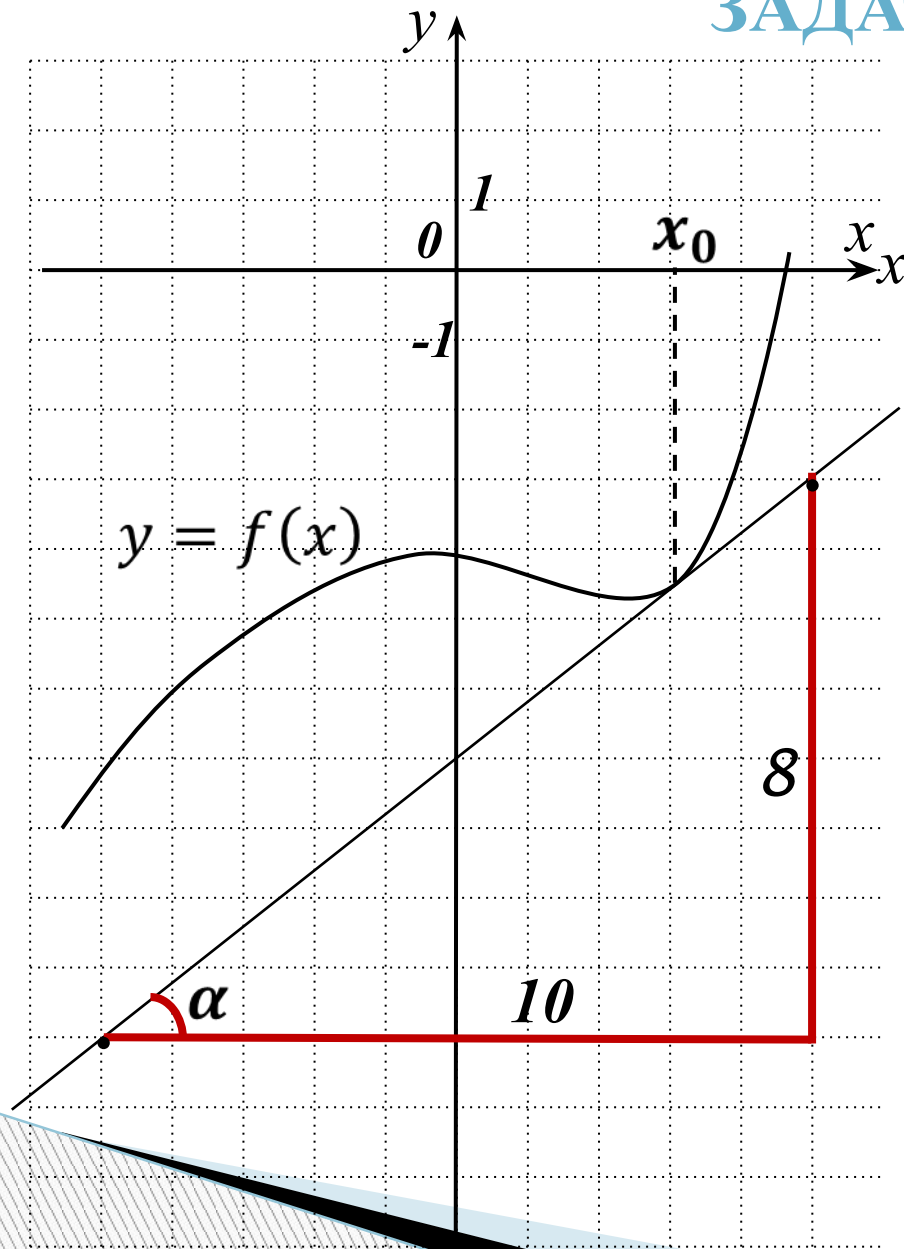
На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Решение: значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 -это угловой коэффициент касательной, проведённой к графику этой функции в данной точке. Угловой коэффициент касательной $k = -\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{6} = -0,5$, т.к.

касательная с положительным направлением оси абсцисс образует тупой угол.

Ответ: $-0,5$

ЗАДАЧА (№11)

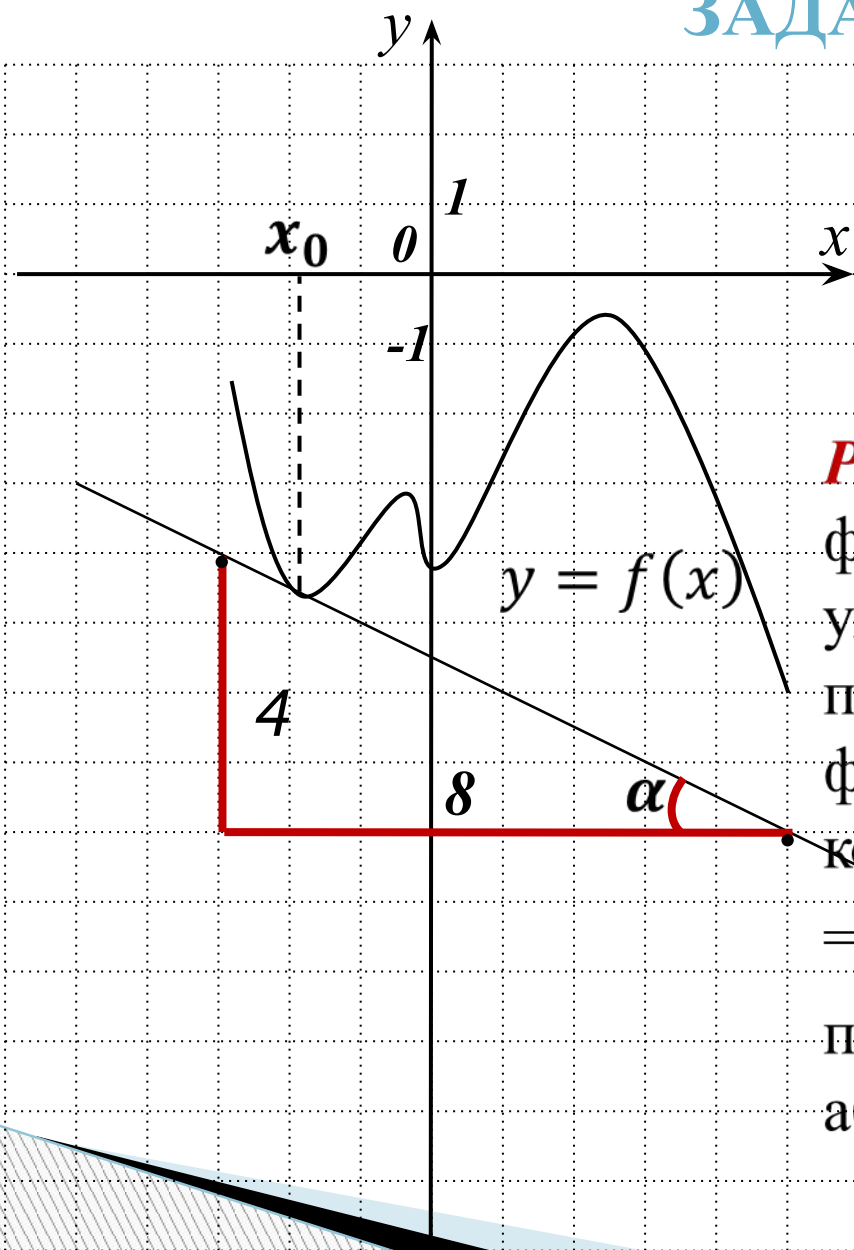


На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в

Решение: значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 — это угловой коэффициент касательной, проведённой к графику этой функции в данной точке. Угловой коэффициент касательной $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{10} = 0,8$, т.к. касательная с положительным направлением оси абсцисс образует острый угол.

Ответ: 0,8.

ЗАДАЧА (№12)



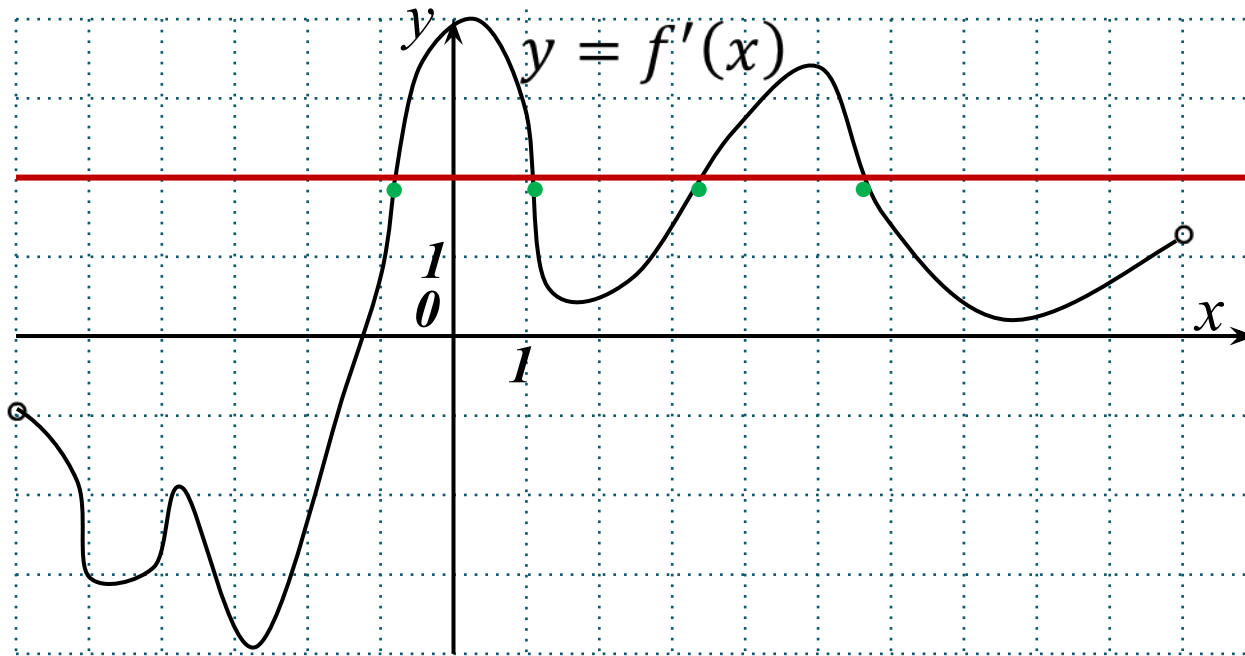
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 .

Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Решение: значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 -это угловой коэффициент касательной, проведённой к графику этой функции в данной точке. Угловой коэффициент касательной $k = -\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{8} = -0,5$, т.к. касательная с положительным направлением оси абсцисс образует тупой угол.

Ответ: $-0,5$.

ЗАДАЧА (№13)



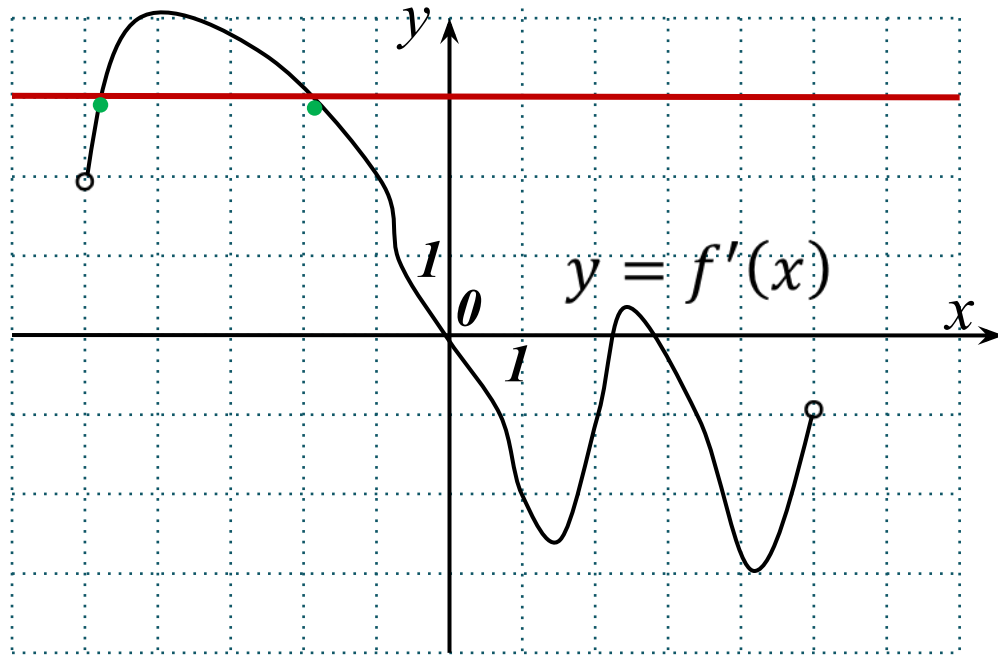
На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 10)$. Найдите количество точек, в которых касательная к

графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 5$ или совпадает с ней.

Решение: Если касательная к графику функции параллельна прямой $y = 2x + 5$ или совпадает с ней, то её угловой коэффициент равен 2, \Rightarrow нужно найти количество точек, в которых $f'(x) = 2$. Определяем, что таких точек будет 4.

Ответ: 4.

ЗАДАЧА (№14)

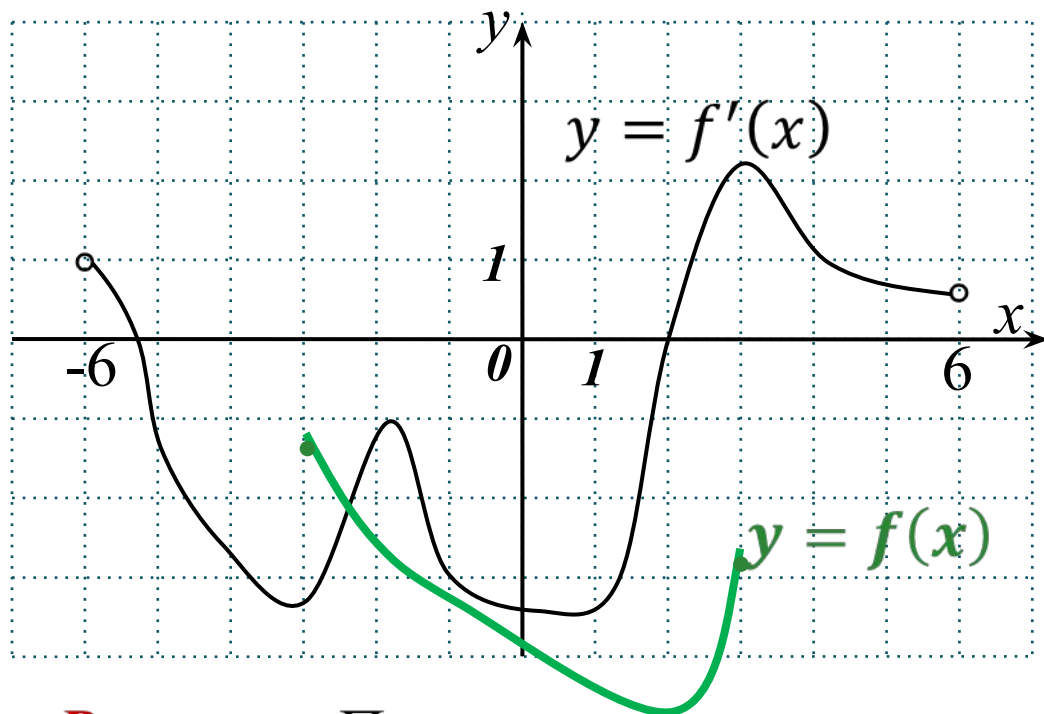


На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 8$ или совпадает с ней.

Решение: Если касательная к графику функции параллельна прямой $y = 3x - 8$ или совпадает с ней, то её угловой коэффициент равен 3, \Rightarrow , нужно найти количество точек, в которых $f'(x) = 3$. Определяем, что таких точек будет 2.

Ответ: 2.

ЗАДАЧА (№15)

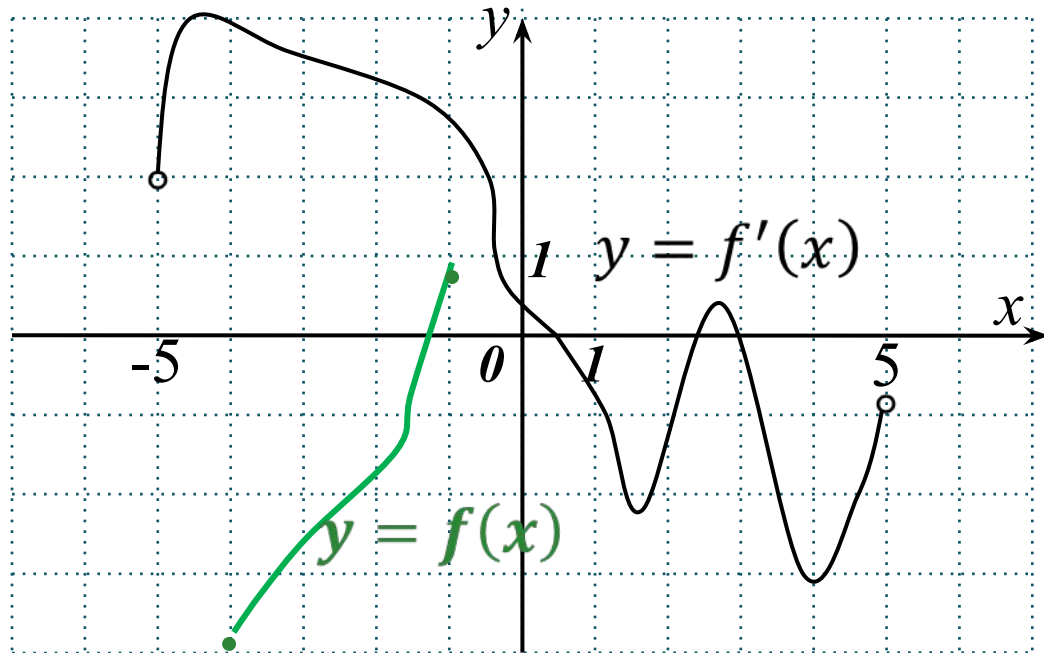


На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. В какой точке отрезка $[-3; 3]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

Решение: По чертежу замечаем, что на промежутке $[-3; 2]$ производная функции $f(x)$ отрицательна, \Rightarrow , сама функция убывает. На промежутке $[2; 3]$ производная положительна, \Rightarrow , сама функция возрастает, поэтому наименьшее значение достигается в точке $x = 2$.

Ответ: 2.

ЗАДАЧА (№16)



На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. В какой точке отрезка $[-4; -1]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение?

Решение: По чертежу замечаем, что на всём промежутке $[-4; -1]$ производная функции $f(x)$ положительна, \Rightarrow , сама функция возрастает.

Значит, наибольшее значение функцией достигается в правом конце отрезка, т. е. в точке $x = -1$.

Ответ: -1.

ЗАДАЧА (№17)

17а) Прямая $y = 6x + 9$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания

Решение: Значение производной функции в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, которая параллельна прямой $y = 6x + 9$, т.е. $y' = 6 \Rightarrow 2x + 7 = 6$,
 $x = -0,5$.

Ответ: $-0,5$.

17б) Прямая $y = -4x - 8$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - x - 9$. Найдите абсциссу точки касания

Решение: Значение производной функции в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, т.е. $y' = -4 \Rightarrow$
 $3x^2 - 6x - 1 = -4 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0, x = 1$.

Ответ: 1.

ЗАДАЧА (№17)

17в) Прямая $y = 5x + 14$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 4x^2 + 9x + 14$. Найдите абсциссу точки касания

Решение: Значение производной функции в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, т.е. $y' = 5 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 9 = 5$, $3x^2 - 8x + 4 = 0$, т.е. $x = 2; \frac{2}{3}$.

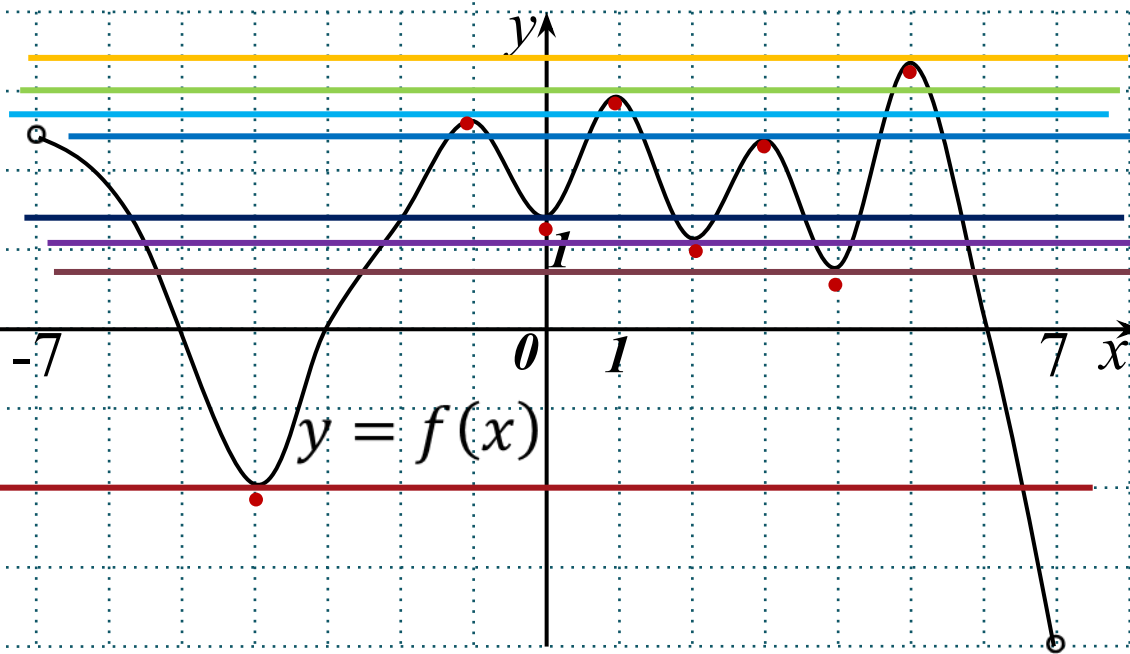
Вычислим значения функции в этих точках и проверим, удовлетворяют ли они уравнению касательной :

1) $y(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 + 14 = 24$ и $5 \cdot 2 + 14 = 24 \Rightarrow x = 2$ удовлетворяет,

2) $y\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 9 \cdot \frac{2}{3} + 14 = \frac{824}{27}$, но $\frac{824}{27} \neq 5 \cdot \frac{2}{3} + 14 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ не удовлетворяет. Т.е. искомая абсцисса точки касания $= 2$.

Ответ: 2.

ЗАДАЧА (№18)

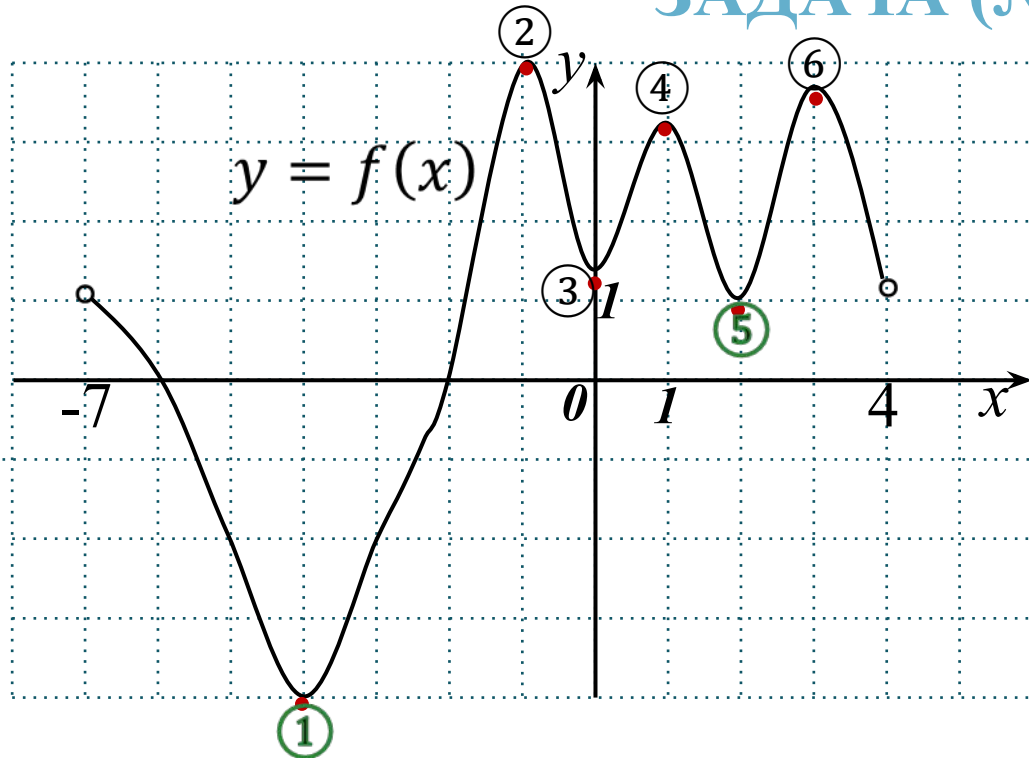


На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 13$.

Решение: Прямая $y = 13$ параллельна оси абсцисс, \Rightarrow , если касательная к графику функции ей параллельна, то она тоже параллельна оси Ox . По графику определяем количество точек, в которых касательные параллельны оси Ox . Количество таких точек равно 8.

Ответ: 8.

ЗАДАЧА (№19)

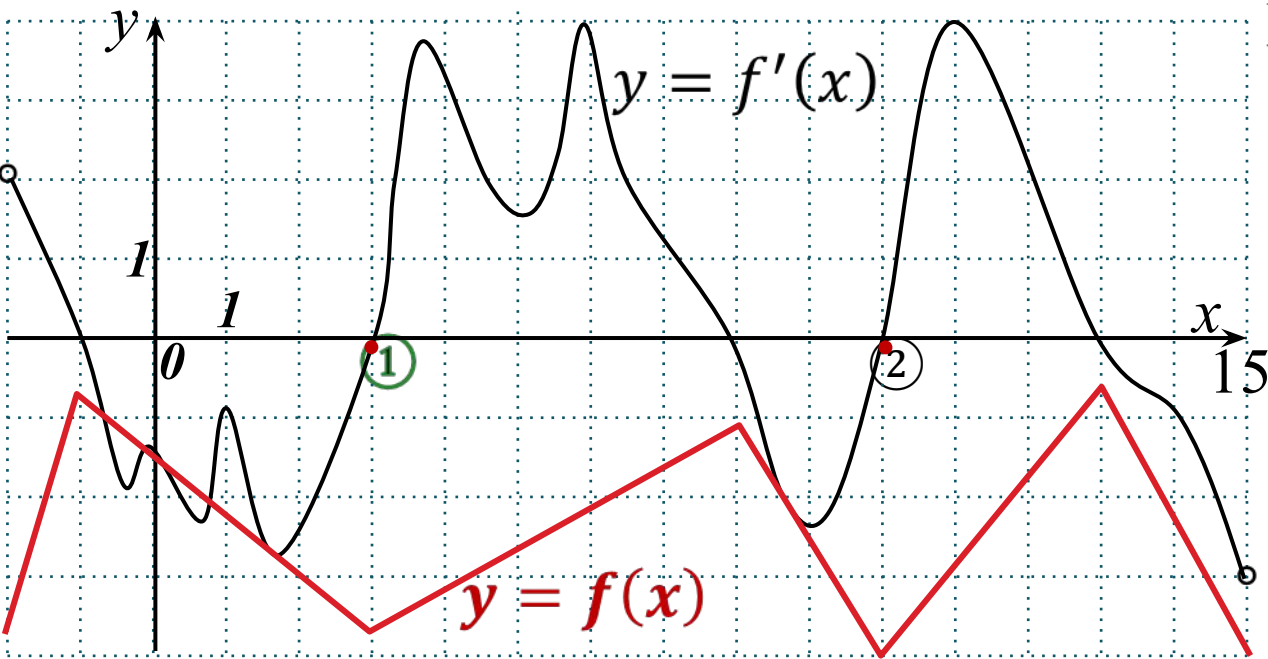


На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 4)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -17$.

Решение: Прямая $y = -17$ – горизонтальная, \Rightarrow , если касательная к графику функции ей параллельна, то она тоже горизонтальна. Определим по рисунку количество точек с горизонтальной касательной.
Количество таких точек равно 6.

Ответ: 6.

ЗАДАЧА (№20)

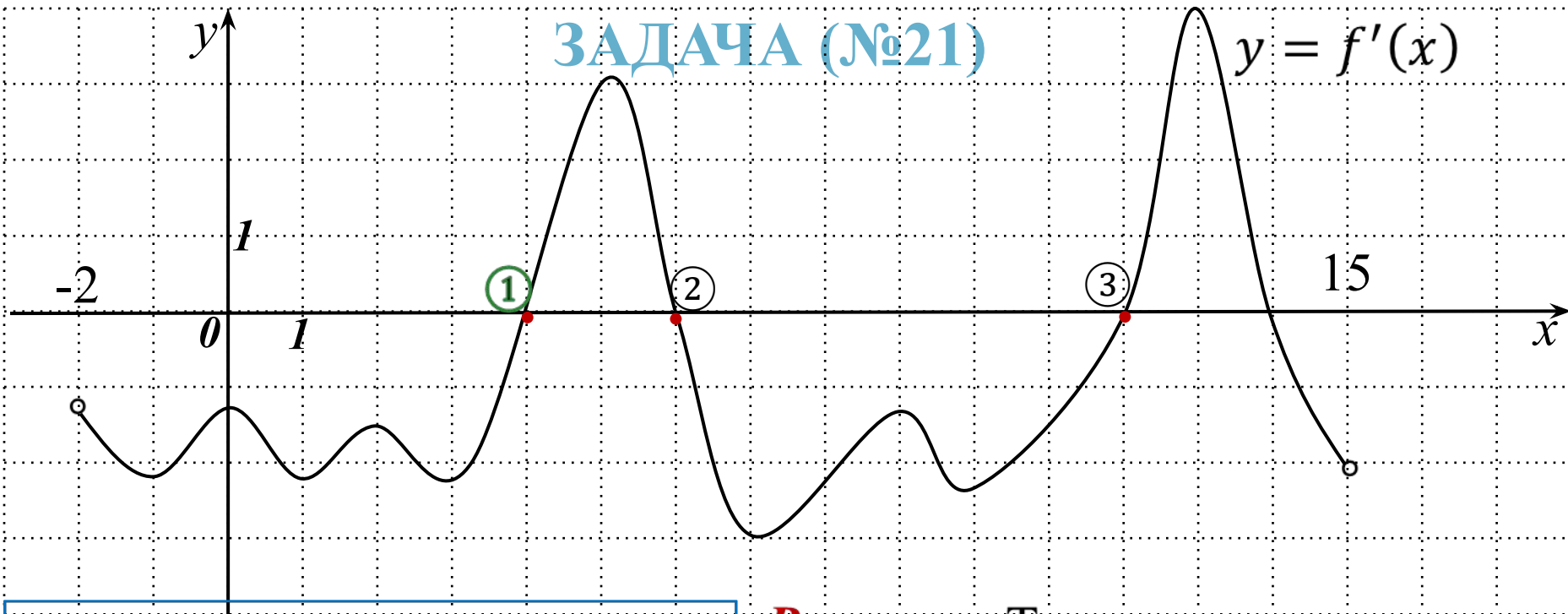


На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 15)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[0; 12]$.

Решение: Точка x_0 - точка минимума функции, либо если $f'(x_0) = 0$ и в этой точке происходит смена знака производной с «-» на «+», либо в том случае, когда производная функции в этой точке не существует. По рисунку определяем, что таких точек, принадлежащих отрезку $[0; 12]$, две: 3; 10.

Ответ: 2.

ЗАДАЧА (№21)

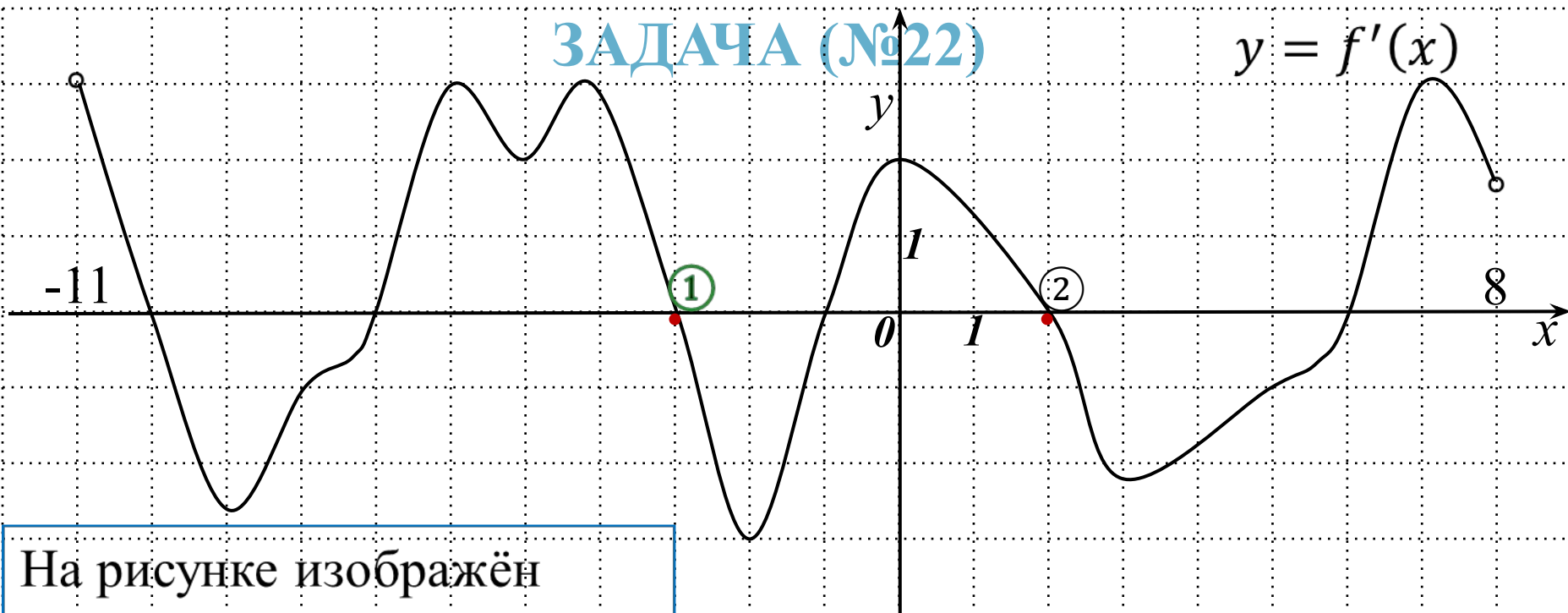


На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 15)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[3; 13]$.

Решение: Точка x_0 - точка экстремума функции, либо если $f'(x_0) = 0$, либо в том случае, когда производная функции в этой точке не существует. По рисунку определяем, что таких точек, принадлежащих отрезку $[3; 13]$, три: 4; 6; 12.

Ответ: 3.

ЗАДАЧА (№22)

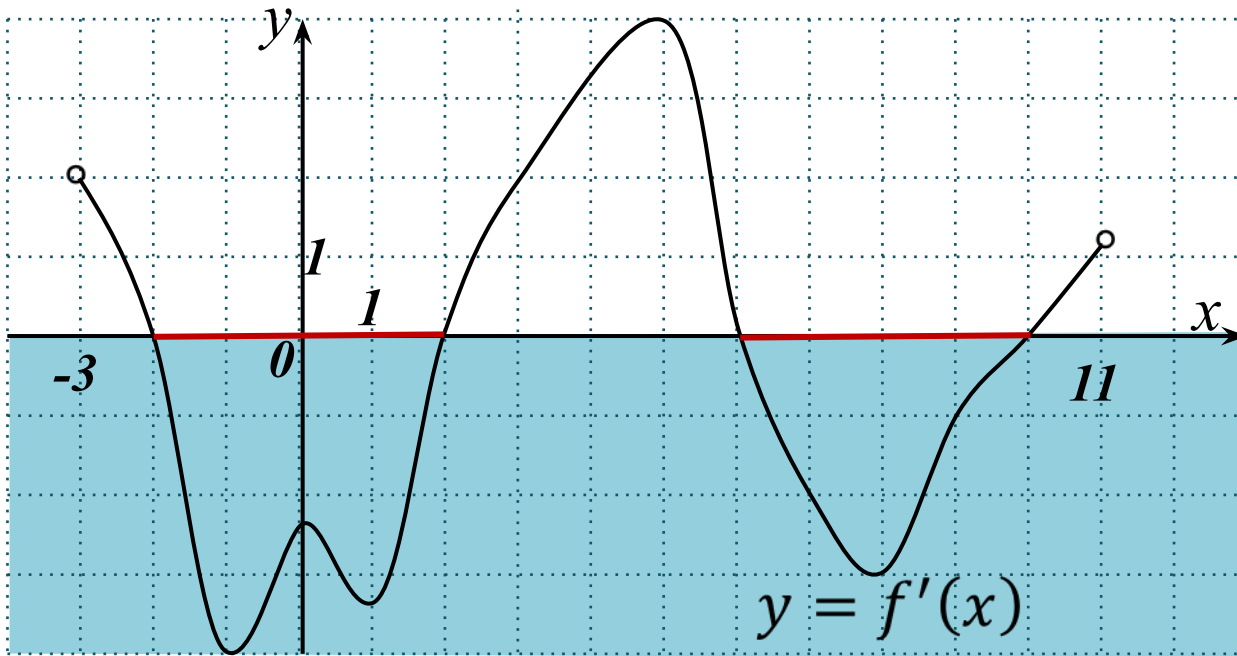


На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-11; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-8; 7]$.

Решение: Точка x_0 - точка максимума функции, либо если $f'(x_0) = 0$ и в этой точке происходит смена знака производной с «+» на «-», либо в случае, когда производная функции в этой точке не существует. По рисунку определяем, что таких точек, принадлежащих отрезку $[-8; 7]$, две: -3; 2.

Ответ: 2.

ЗАДАЧА (№23)



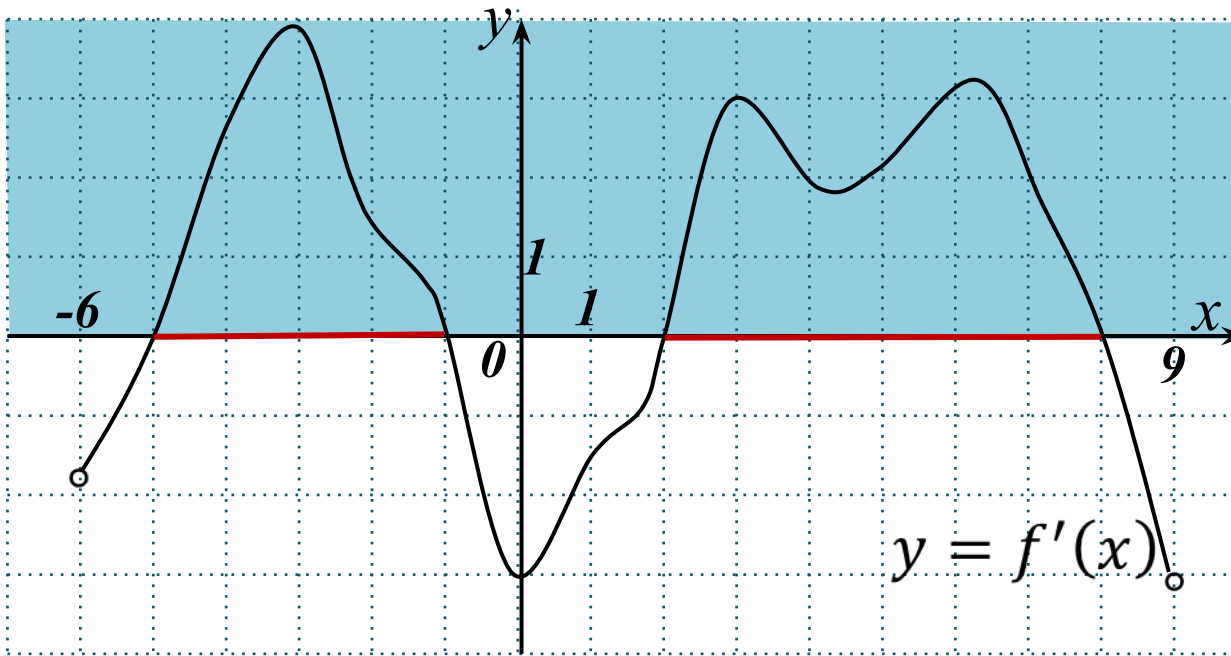
На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 11)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Решение: На всём промежутке убывания функции $f(x)$ её производная неположительна.

На рисунке это промежутки: $(-2; 2)$, $(8; 10)$. Оба промежутка имеют длину, равную 4, так как $2 - (-2) = 10 - 6 = 4$.

Ответ: 4.

ЗАДАЧА (№24)

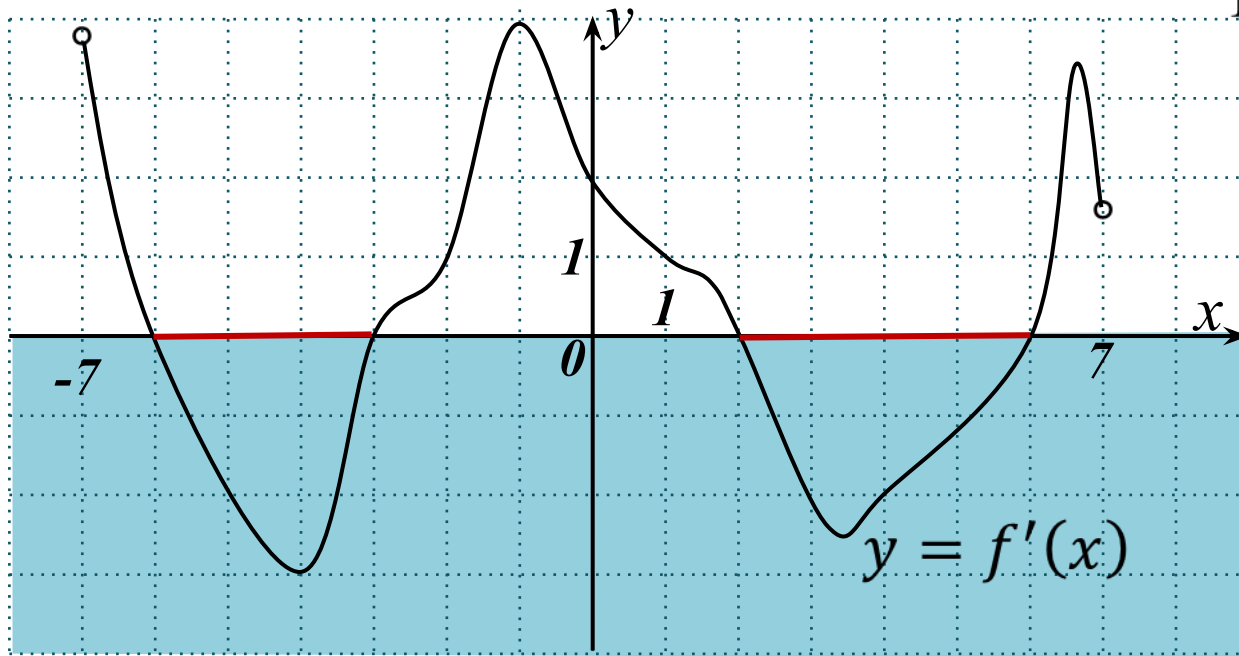


Решение: На всём промежутке возрастания функции $f(x)$ её производная неотрицательна. На рисунке это промежутки: $(-5; -1)$, $(2; 8)$.

Наибольшую длину из них имеет промежуток $(2; 8)$, длина которой равна 6, т.к. $8 - 2 = 6$.

Ответ: 6.

ЗАДАЧА (№25)



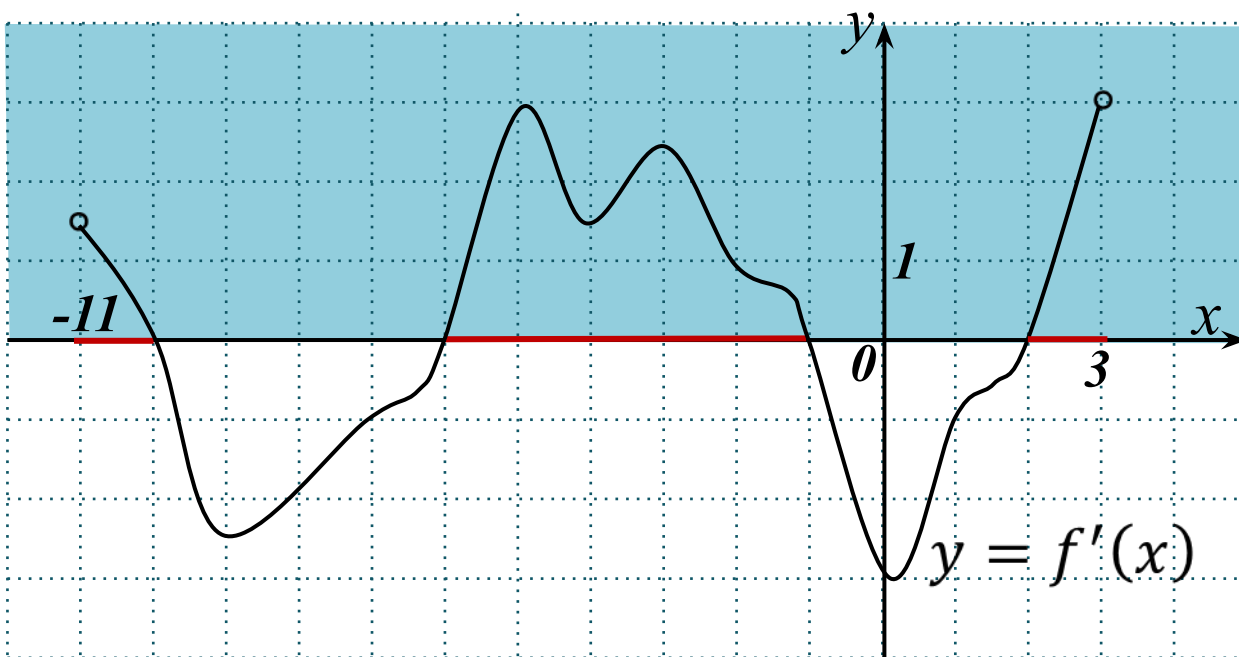
На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Решение: На всём промежутке убывания функции $f(x)$ её производная неположительна.

На рисунке это промежутки: $(-6; -3)$, $(2; 6)$. Наибольшую длину из них имеет промежуток $(2; 6)$, так как $6 - 2 = 4$.

Ответ: 4.

ЗАДАЧА (№26)



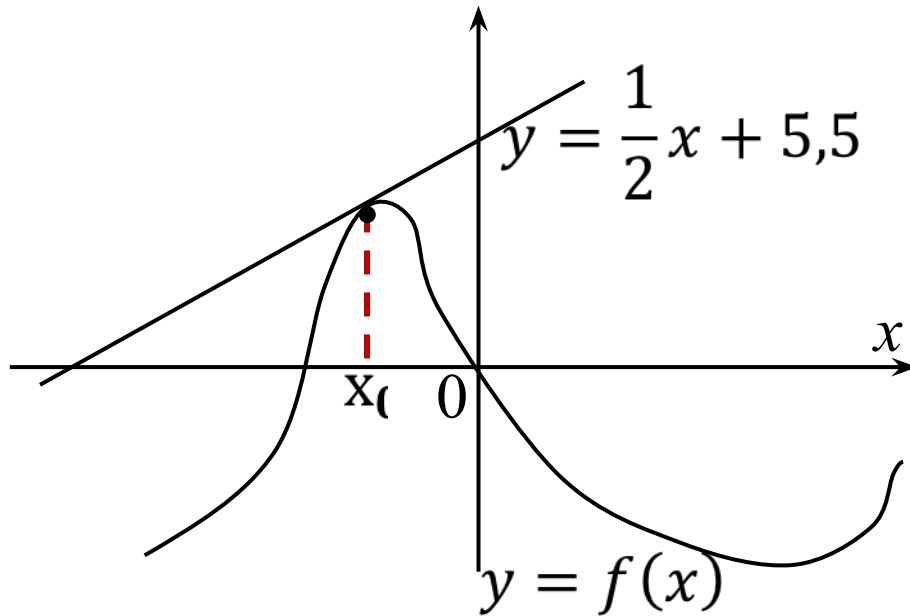
На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-11; 3)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Решение: На всём промежутке возрастания функции $f(x)$ её производная неотрицательна. На рисунке это промежутки: $(-11; -10)$, $(-6; -1)$, $(2; 3)$.

Наибольшую длину из них имеет промежуток $(-6; -1)$, длина которой равна 5, т.к. $-1 - (-6) = 5$.

Ответ: 5.

ЗАДАЧА (№27)



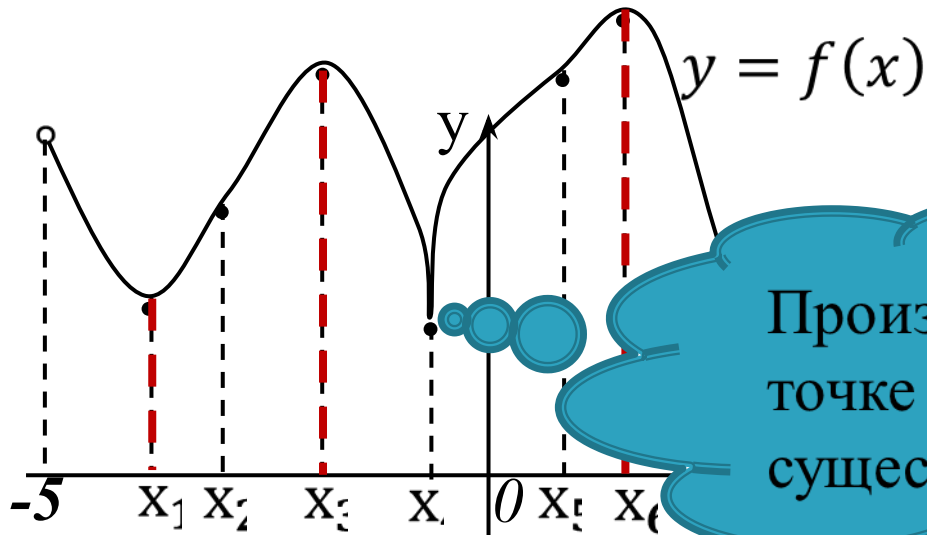
На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $y = 4f(x) + 7$ в точке x_0 .

Решение: $y'(x) = (4f(x) + 7)' = 4 \cdot f'(x)$; в точке x_0 значение производной функции равно угловому коэффициенту касательной к графику функции: $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, \Rightarrow
 $y'(x_0) = 4 \cdot f'(x_0) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

Ответ: 2.

ЗАДАЧА (№28)

Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-5; 6)$. На рисунке



изображён график функции $y = f(x)$.

Производная в точке x_4 не существует

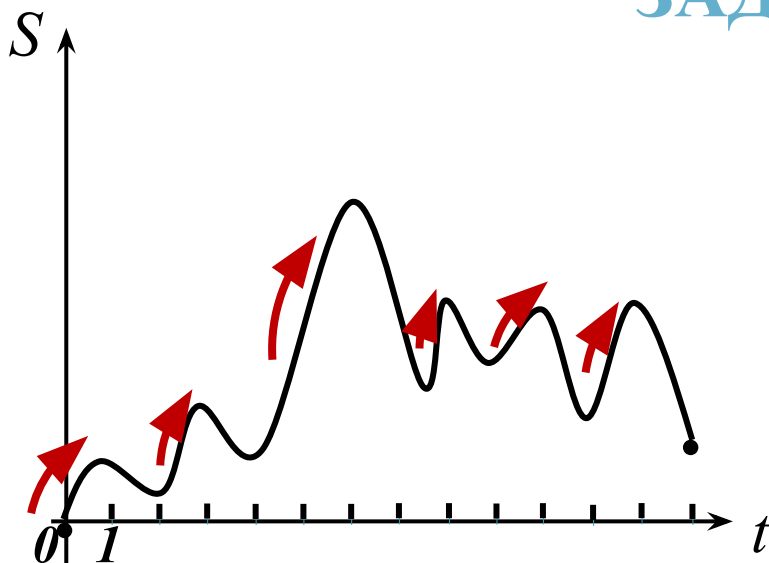
Среди точек $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ те, в которых

производная функции равна нулю. В ответ запишите количество найденных точек.

Решение: Производная функции в некоторой точке равна нулю тогда и только тогда, когда касательная к графику функции, проведённая в этой точке, горизонтальна. Этому условию удовлетворяют точки x_1, x_3, x_6 и x_7 , \Rightarrow количество найденных точек равно 4.

Ответ: 4.

ЗАДАЧА (№29)



Материальная точка M начинает движение из точки A и движется на протяжении 12 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат – расстояние s в метрах. Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).

Решение: После начала движения, примерно через 1 с, график достиг верхней точки на этом участке, затем график уходит вниз, \Rightarrow точка остановилась и стала двигаться назад. Значит каждая вершина и впадина графика означает перемену направления движения точки M , т.е. в этих точках скорость равна 0. Всего на графике 11 вершин и 11 впадин, не считая начала и конца движения.

Ответ: 11.