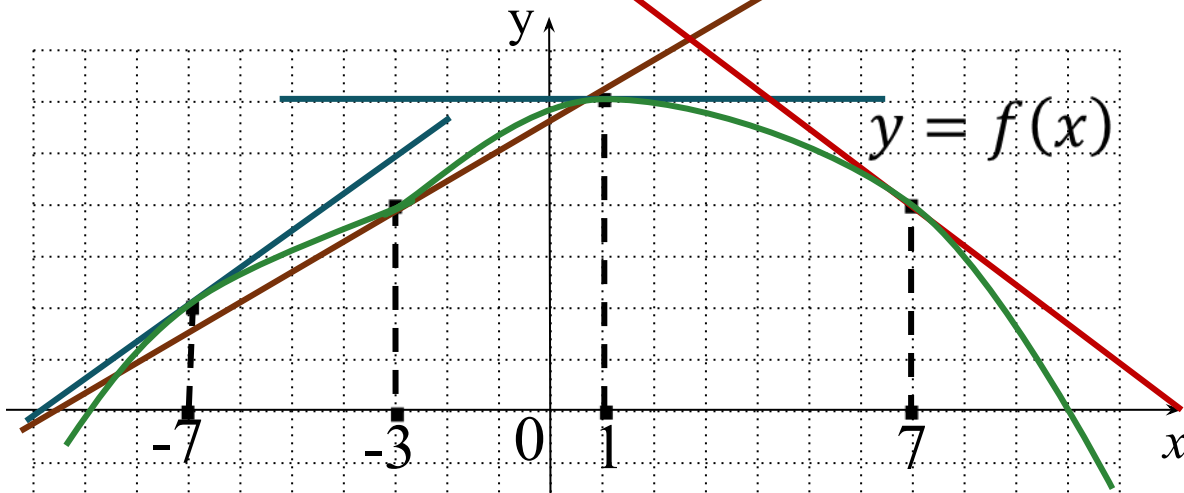


ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

ЗАДАЧА №7

Профильный уровень

ЗАДАЧА (№1)



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-7, -3, 1, 7$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

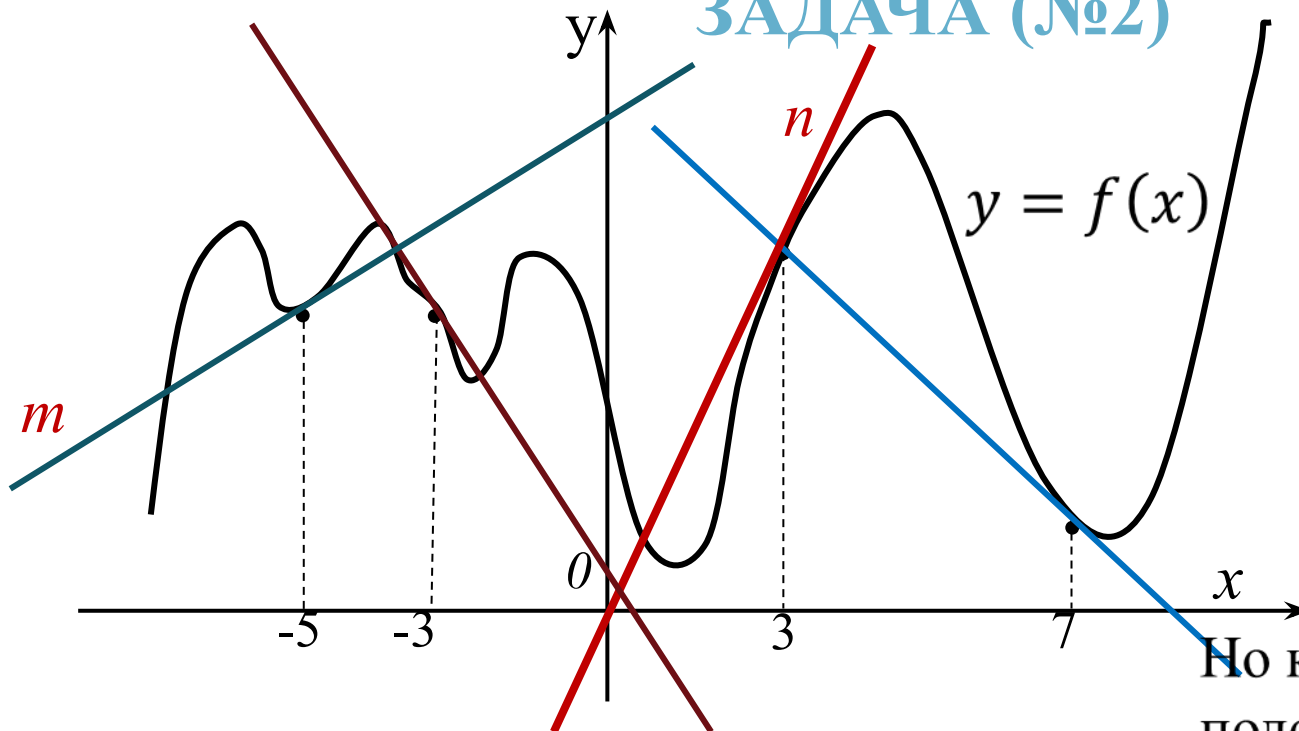
Решение: Т.к. значение производной функции в точке равно $\operatorname{tg} \alpha$ – угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в данной точке, проведём эти касательные.

В точках $x = -7$ и $x = -3$ $\operatorname{tg} \alpha > 0$, в точке $x = 1$ $\operatorname{tg} \alpha = 0$.

В точке $x = 7$ $\operatorname{tg} \alpha < 0$, \Rightarrow в этой точке значение производной наименьшее.

Ответ: 7

ЗАДАЧА (№2)



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-5, -3, 3, 7$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку

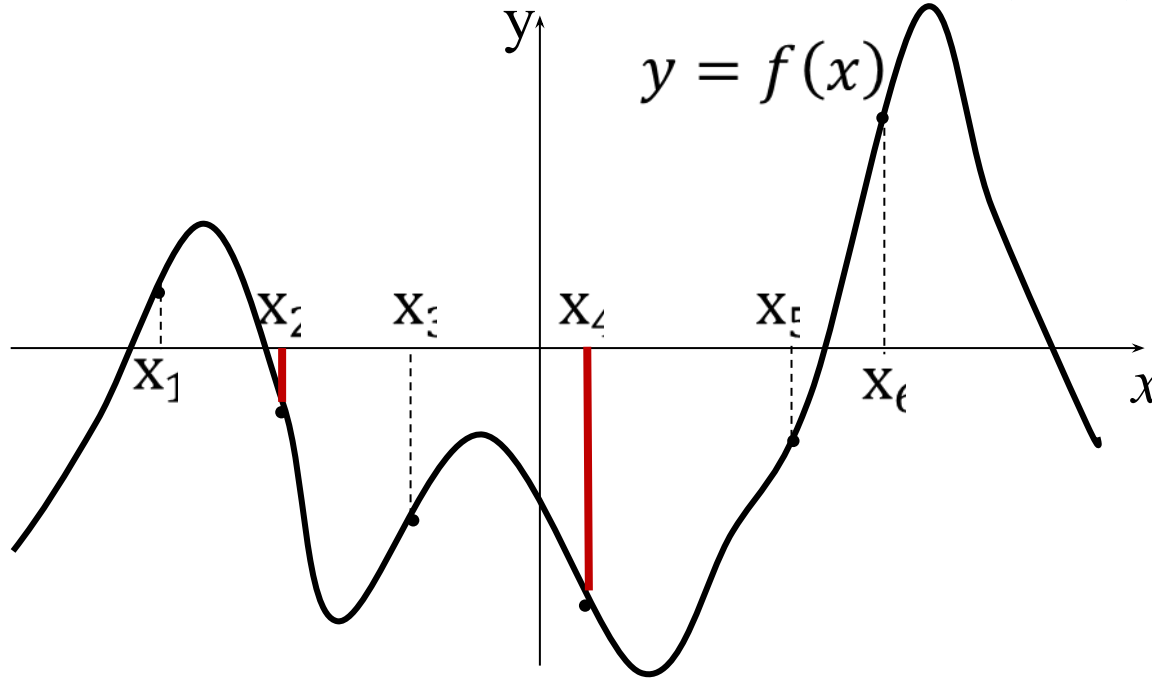
Но касательная n и положительное направление оси Ox образуют больший угол, чем касательная m , \Rightarrow в точке $x = 3$ значение производной наибольшее.

Решение: Т.к. значение производной функции в точке равно tga – угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в данной точке, проведём эти касательные.

В точках $x = -3$ и $x = 7$ $tga < 0$, в точках $x = -5$ и $x = 3$ $tga > 0$.

Ответ: 3

ЗАДАЧА (№3)

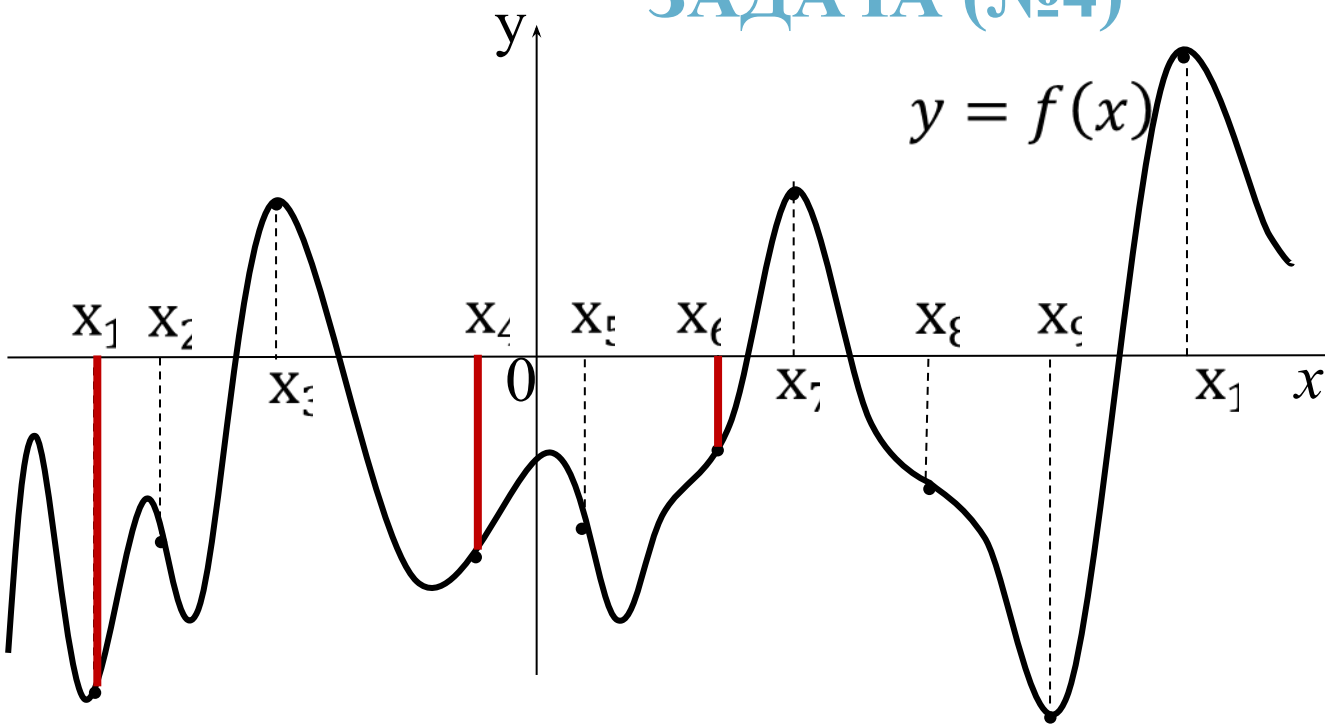


На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.

Решение: Производная функции в точке отрицательна тогда и только тогда, когда эта точка является точкой убывания данной функции. Этому условию на рисунке удовлетворяют точки x_2 и x_4 . Следовательно, количество найденных точек равно 2.

Ответ: 2

ЗАДАЧА (№4)

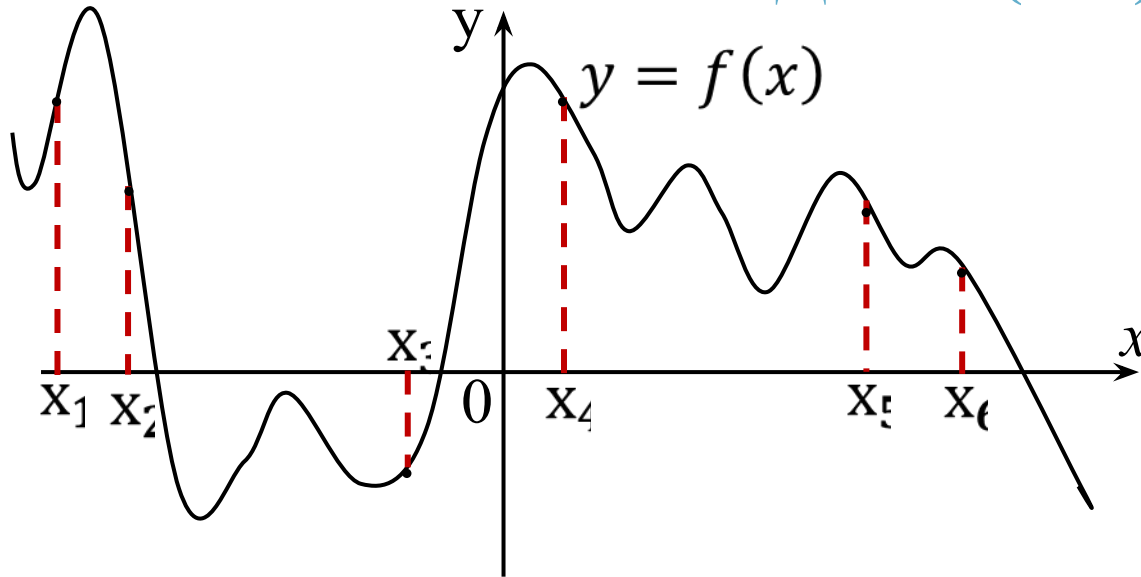


На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$. В скольких из этих точек производная $f'(x)$ функции $f(x)$ положительна.

Решение: Производная функции в точке положительна тогда и только тогда, когда эта точка является точкой возрастания данной функции. Этому условию на рисунке удовлетворяют точки x_1, x_4 и x_6 . Следовательно, количество найденных точек равно 3.

Ответ: 3

ЗАДАЧА (№5)

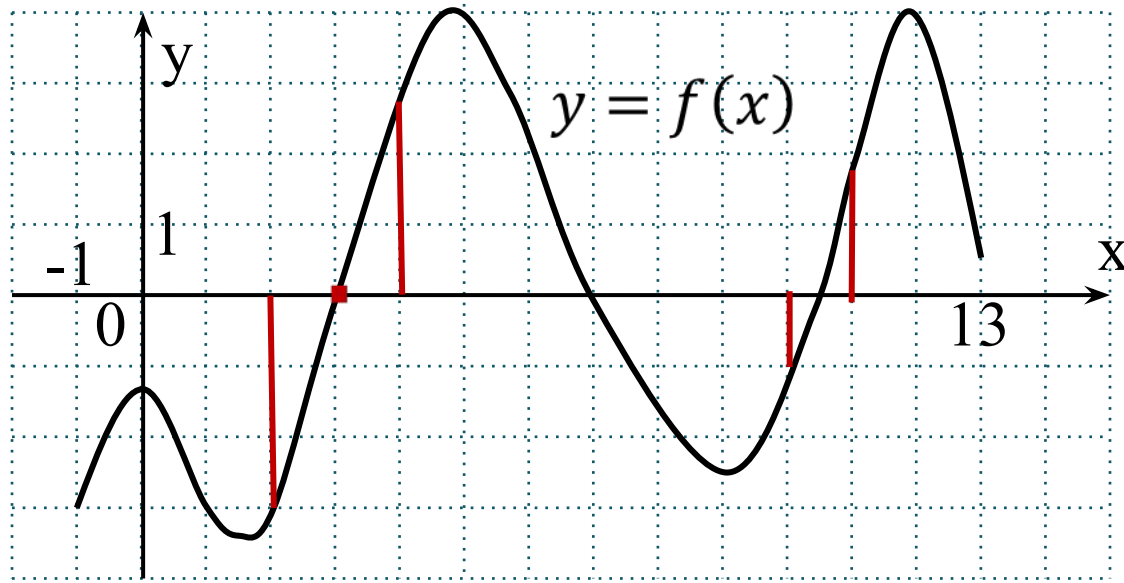


На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.

Решение: Производная функции в точке отрицательна тогда и только тогда, когда эта точка является точкой убывания данной функции. Этому условию на рисунке удовлетворяют точки x_2, x_4, x_5 и x_6 . Следовательно, количество найденных точек равно 4.

Ответ: 4.

ЗАДАЧА (№6)

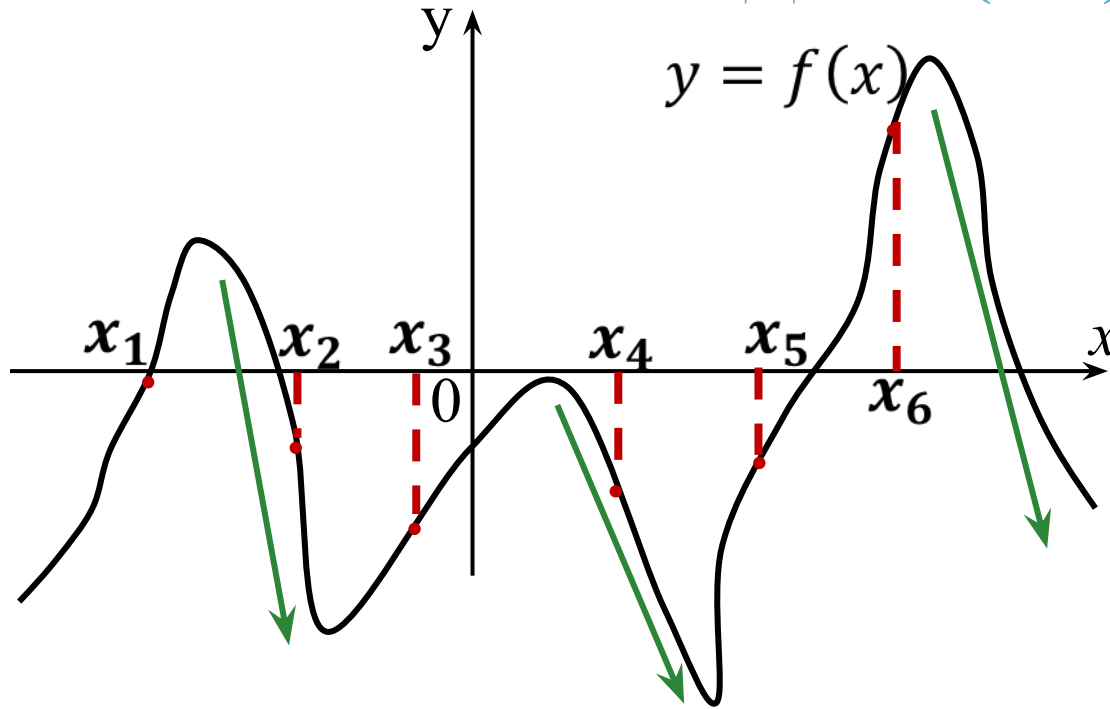


На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-1;13)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

Решение: Производная функции в точке положительна тогда и только тогда, когда эта точка является точкой возрастания данной функции. Этому условию на рисунке удовлетворяют точки абсциссы которых равны 3, 4, 5, 11, 12 . Следовательно, количество найденных точек равно 5.

Ответ: 5

ЗАДАЧА (№7)



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.

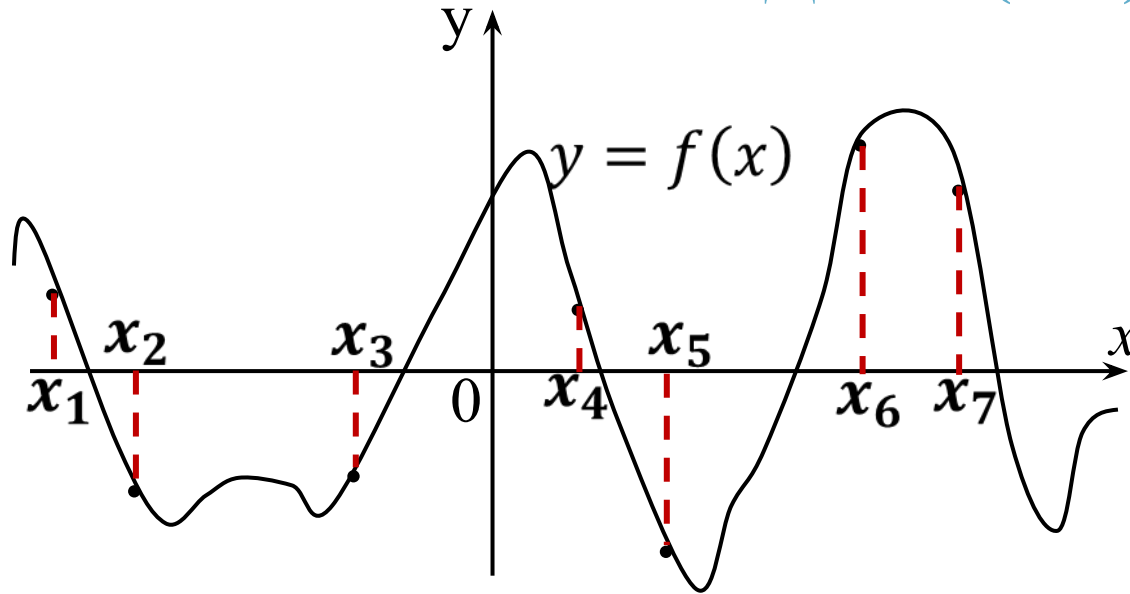
Решение: Производная функции в точке отрицательна тогда и только тогда, когда эта точка является точкой убывания данной функции.

Этому условию на рисунке удовлетворяют точки x_2 и x_4 .

Следовательно, количество найденных точек равно 2.

Ответ: 2.

ЗАДАЧА (№8)

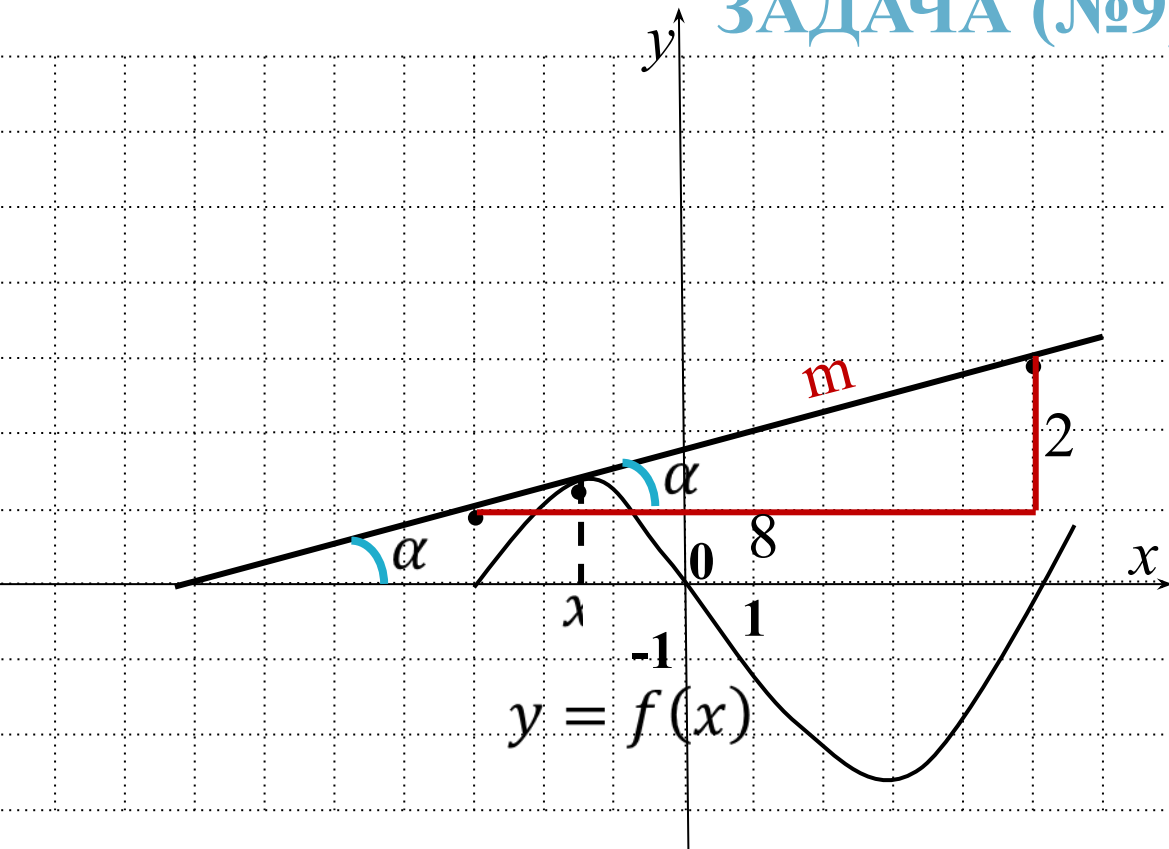


На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-1;13)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

Решение: Производная функции в точке положительна тогда и только тогда, когда эта точка является точкой возрастания данной функции. Этому условию на рисунке удовлетворяют точки x_3 и x_6 . Следовательно, количество найденных точек равно 2.

Ответ: 2.

ЗАДАЧА (№9)



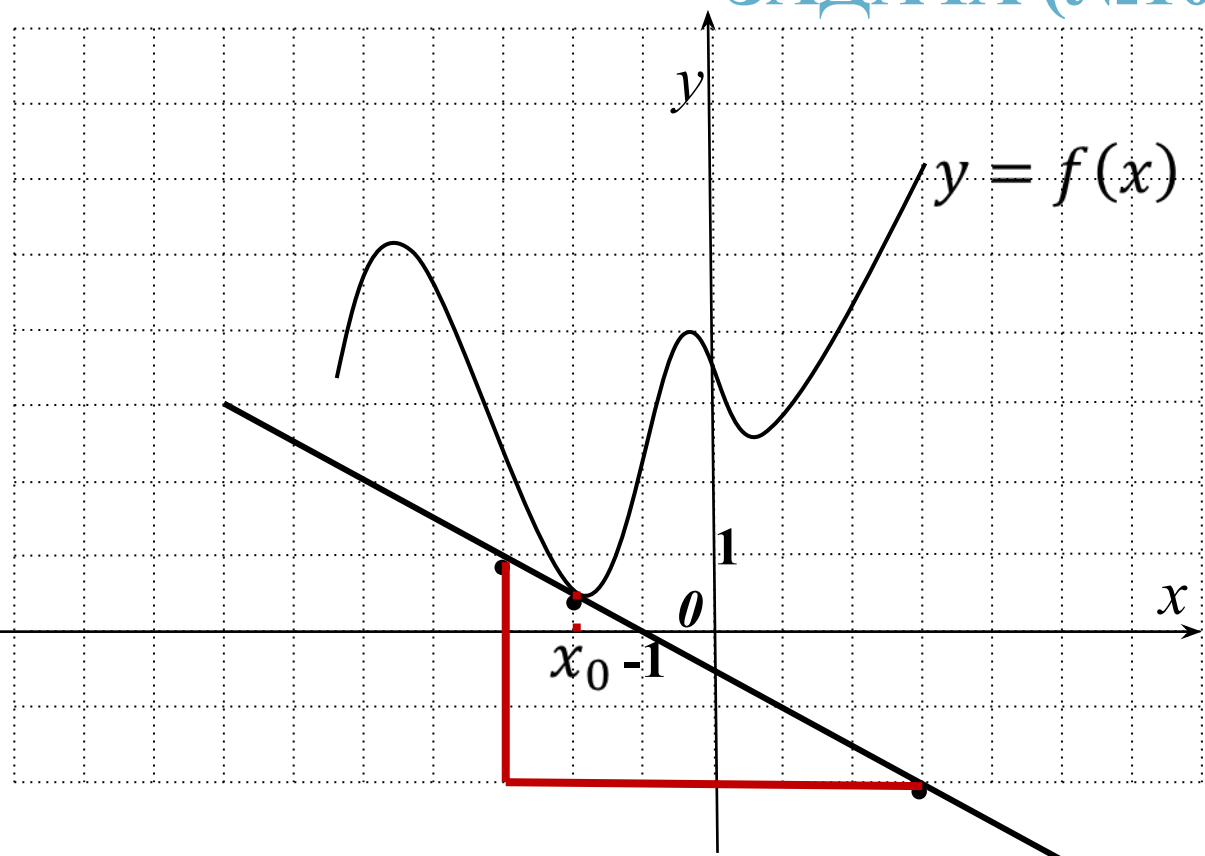
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Решение: значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 — это угловой коэффициент

касательной, проведённой к графику этой функции в данной точке. Угловой коэффициент касательной $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{8} = 0,25$.

Ответ: 0,25

ЗАДАЧА (№10)



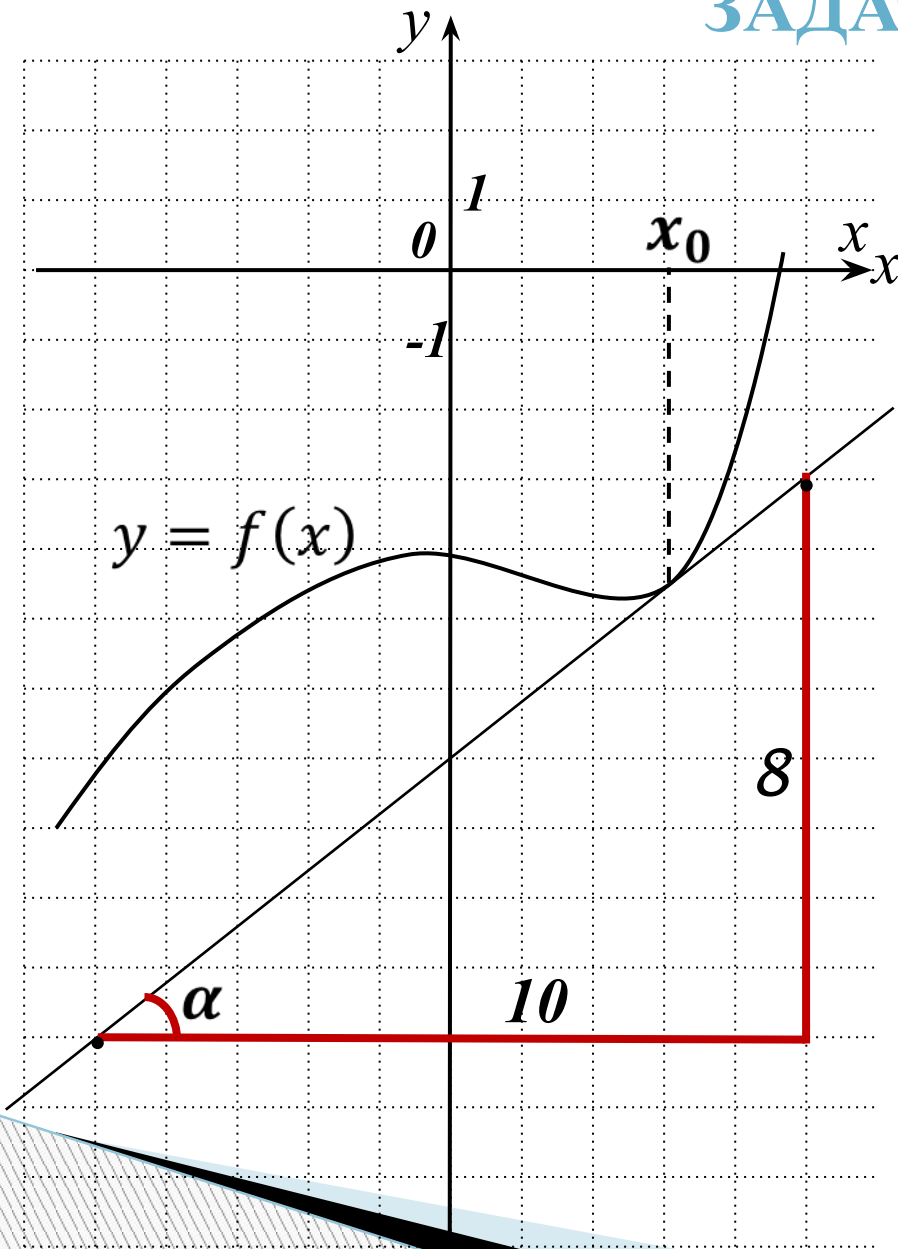
На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Решение: значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 -это угловой коэффициент касательной, проведённой к графику этой функции в данной точке. Угловой коэффициент касательной $k = -\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{6} = -0,5$, т.к.

касательная с положительным направлением оси абсцисс образует тупой угол.

Ответ: $-0,5$

ЗАДАЧА (№11)

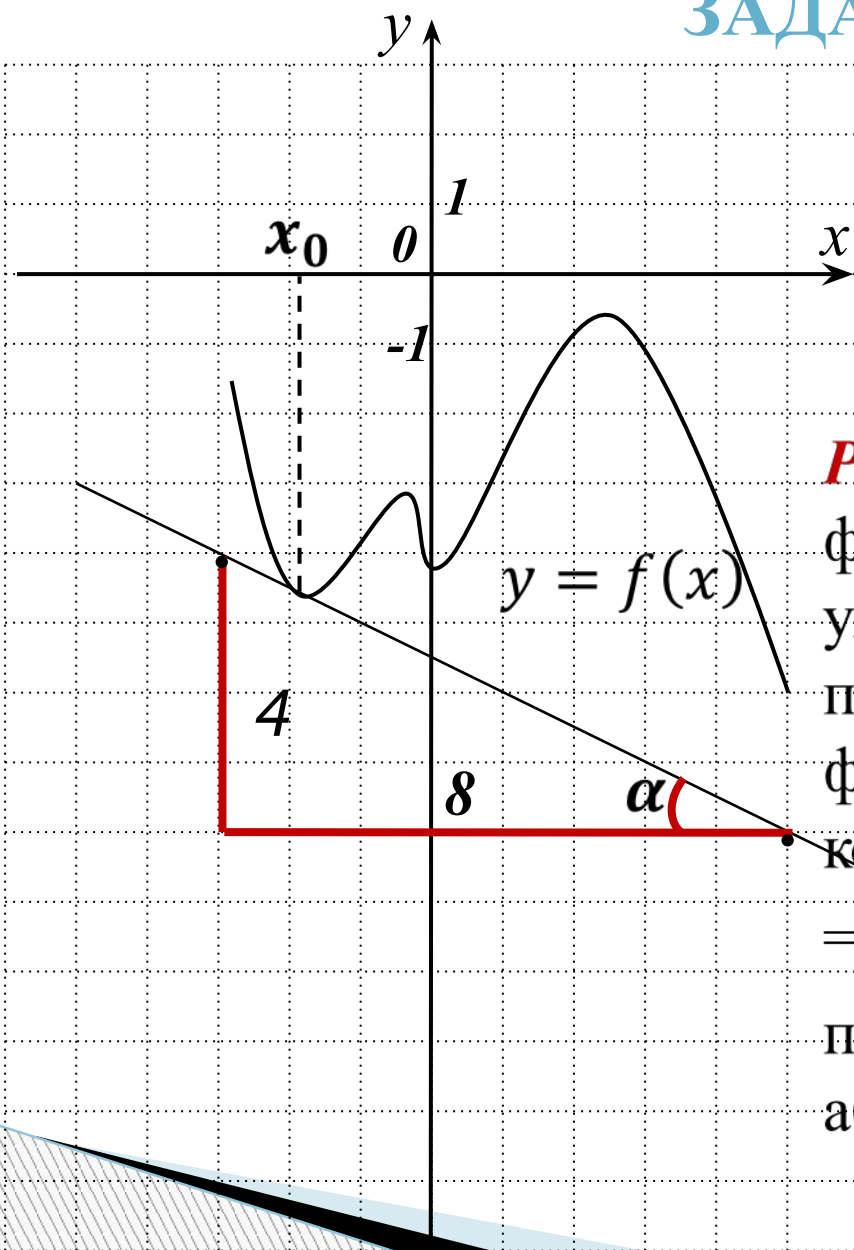


На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в

Решение: значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 — это угловой коэффициент касательной, проведённой к графику этой функции в данной точке. Угловой коэффициент касательной $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{10} = 0,8$, т.к. касательная с положительным направлением оси абсцисс образует острый угол.

Ответ: 0,8.

ЗАДАЧА (№12)



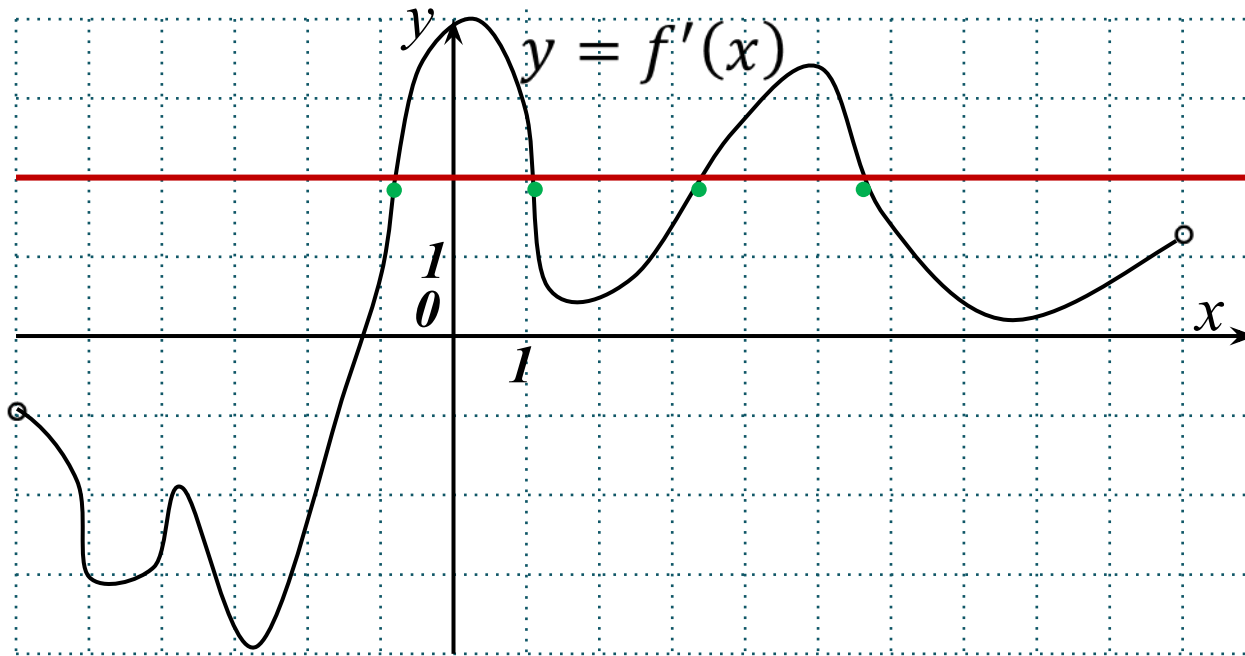
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 .

Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Решение: значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 -это угловой коэффициент касательной, проведённой к графику этой функции в данной точке. Угловой коэффициент касательной $k = -\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{8} = -0,5$, т.к. касательная с положительным направлением оси абсцисс образует тупой угол.

Ответ: $-0,5$.

ЗАДАЧА (№13)



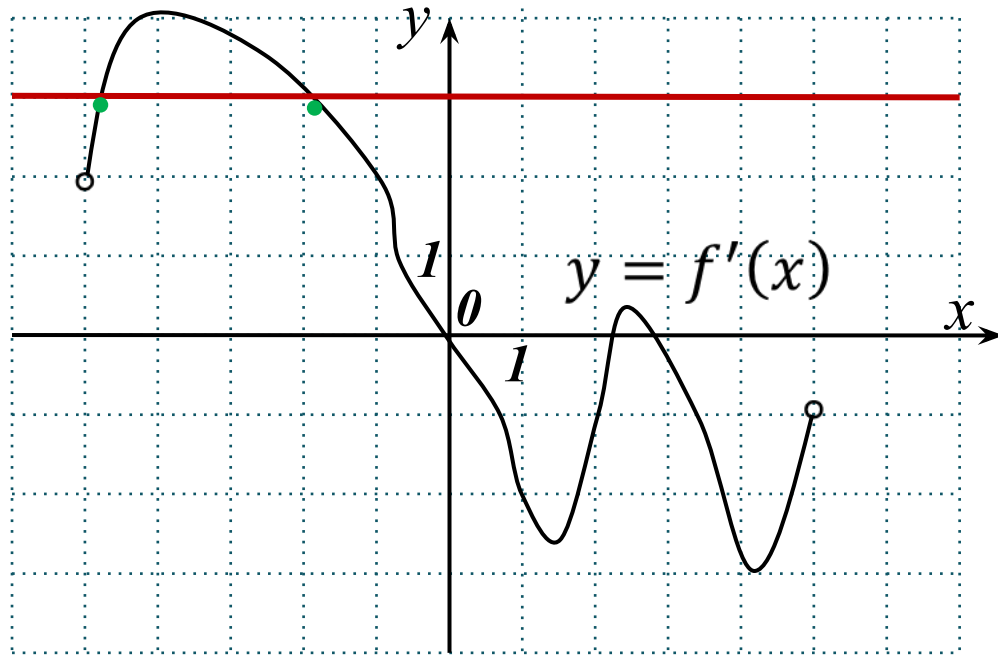
На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 10)$. Найдите количество точек, в которых касательная к

графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 5$ или совпадает с ней.

Решение: Если касательная к графику функции параллельна прямой $y = 2x + 5$ или совпадает с ней, то её угловой коэффициент равен 2, \Rightarrow нужно найти количество точек, в которых $f'(x) = 2$. Определяем, что таких точек будет 4.

Ответ: 4.

ЗАДАЧА (№14)

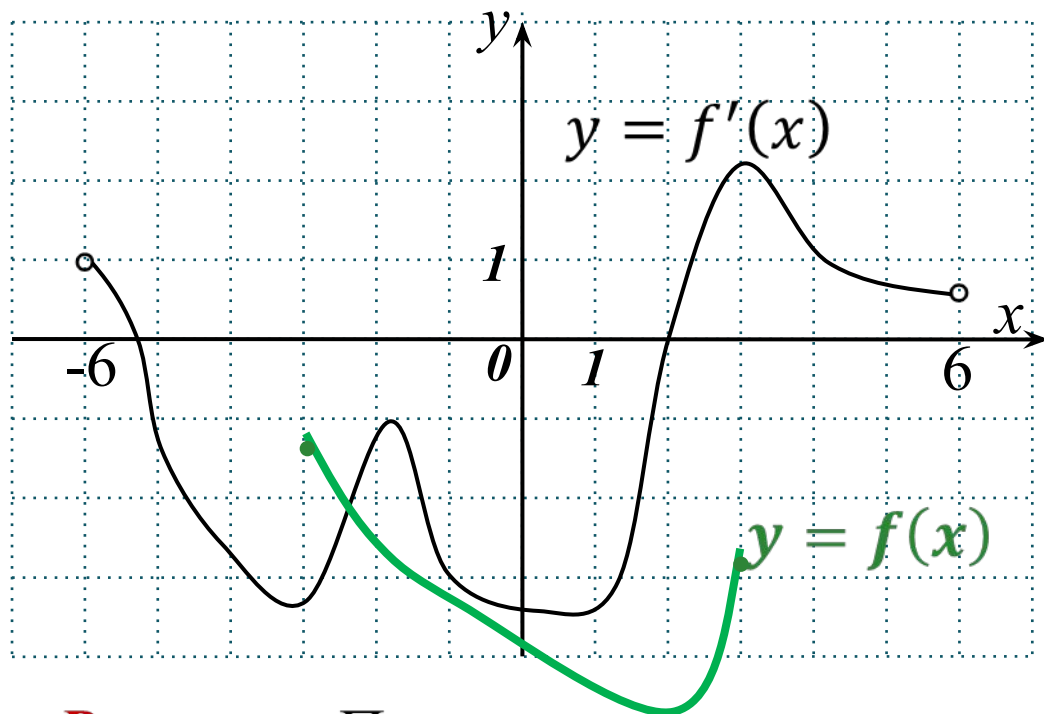


На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 8$ или совпадает с ней.

Решение: Если касательная к графику функции параллельна прямой $y = 3x - 8$ или совпадает с ней, то её угловой коэффициент равен 3, \Rightarrow , нужно найти количество точек, в которых $f'(x) = 3$. Определяем, что таких точек будет 2.

Ответ: 2.

ЗАДАЧА (№15)

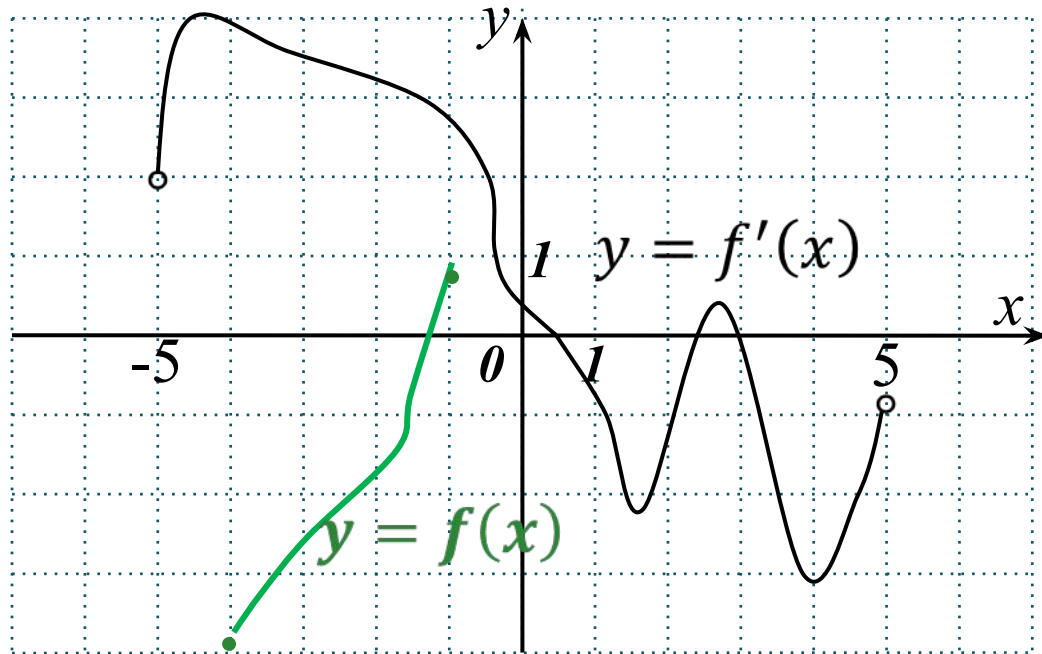


На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. В какой точке отрезка $[-3; 3]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

Решение: По чертежу замечаем, что на промежутке $[-3; 2]$ производная функции $f(x)$ отрицательна, \Rightarrow , сама функция убывает. На промежутке $[2; 3]$ производная положительна, \Rightarrow , сама функция возрастает, поэтому наименьшее значение достигается в точке $x = 2$.

Ответ: 2.

ЗАДАЧА (№16)



На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. В какой точке отрезка $[-4; -1]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение?

Решение: По чертежу замечаем, что на всём промежутке $[-4; -1]$ производная функции $f(x)$ положительна, \Rightarrow , сама функция возрастает. Значит, наибольшее значение функцией достигается в правом конце отрезка, т. е. в точке $x = -1$.

Ответ: -1.

ЗАДАЧА (№17)

17а) Прямая $y = 6x + 9$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания

Решение: Значение производной функции в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, которая параллельна прямой $y = 6x + 9$, т.е. $y' = 6 \Rightarrow 2x + 7 = 6$,
 $x = -0,5$.

Ответ: $-0,5$.

17б) Прямая $y = -4x - 8$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - x - 9$. Найдите абсциссу точки касания

Решение: Значение производной функции в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, т.е. $y' = -4 \Rightarrow$
 $3x^2 - 6x - 1 = -4 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0, x = 1$.

Ответ: 1 .

ЗАДАЧА (№17)

17в) Прямая $y = 5x + 14$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 4x^2 + 9x + 14$. Найдите абсциссу точки касания

Решение: Значение производной функции в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, т.е. $y' = 5 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 9 = 5$, $3x^2 - 8x + 4 = 0$, т.е. $x = 2; \frac{2}{3}$.

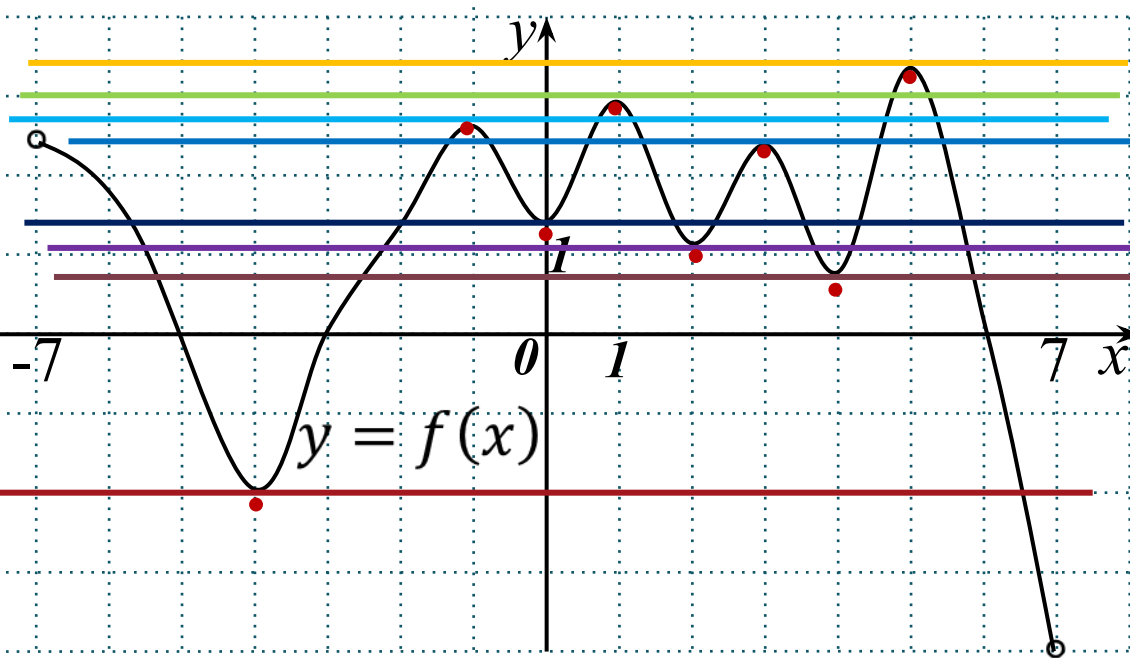
Вычислим значения функции в этих точках и проверим, удовлетворяют ли они уравнению касательной :

1) $y(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 + 14 = 24$ и $5 \cdot 2 + 14 = 24 \Rightarrow x = 2$ удовлетворяет,

2) $y\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 9 \cdot \frac{2}{3} + 14 = \frac{824}{27}$, но $\frac{824}{27} \neq 5 \cdot \frac{2}{3} + 14 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ не удовлетворяет. Т.е. искомая абсцисса точки касания $= 2$.

Ответ: 2.

ЗАДАЧА (№18)

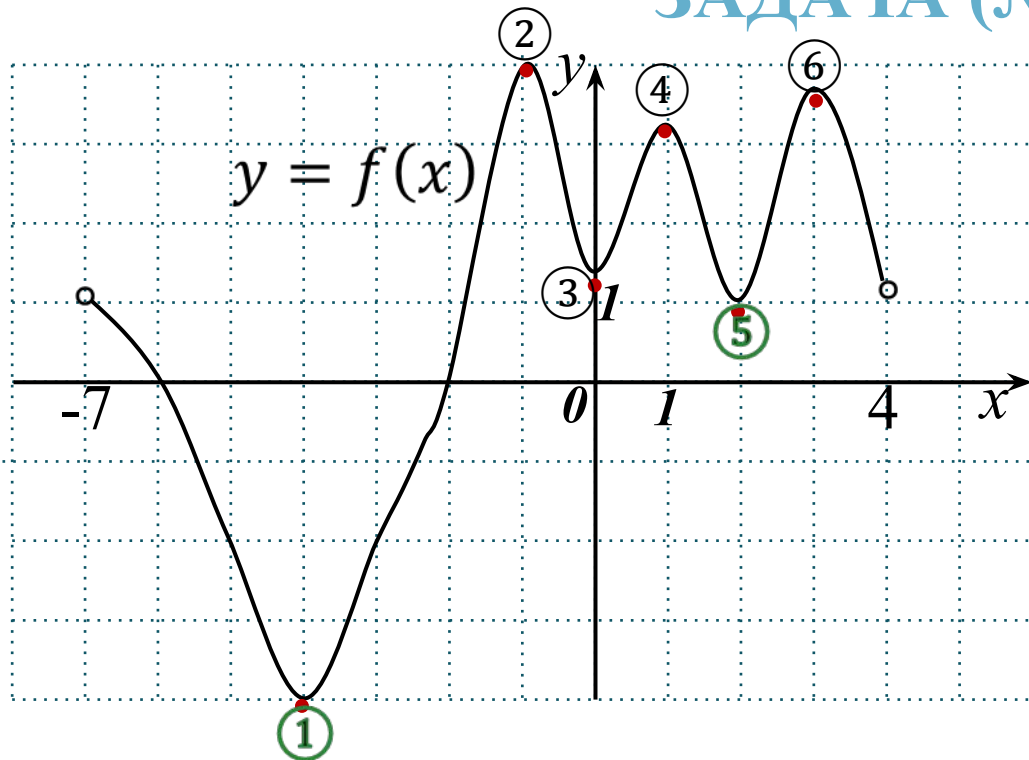


На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 13$.

Решение: Прямая $y = 13$ параллельна оси абсцисс, \Rightarrow , если касательная к графику функции ей параллельна, то она тоже параллельна оси Ox . По графику определяем количество точек, в которых касательные параллельны оси Ox . Количество таких точек равно 8.

Ответ: 8.

ЗАДАЧА (№19)

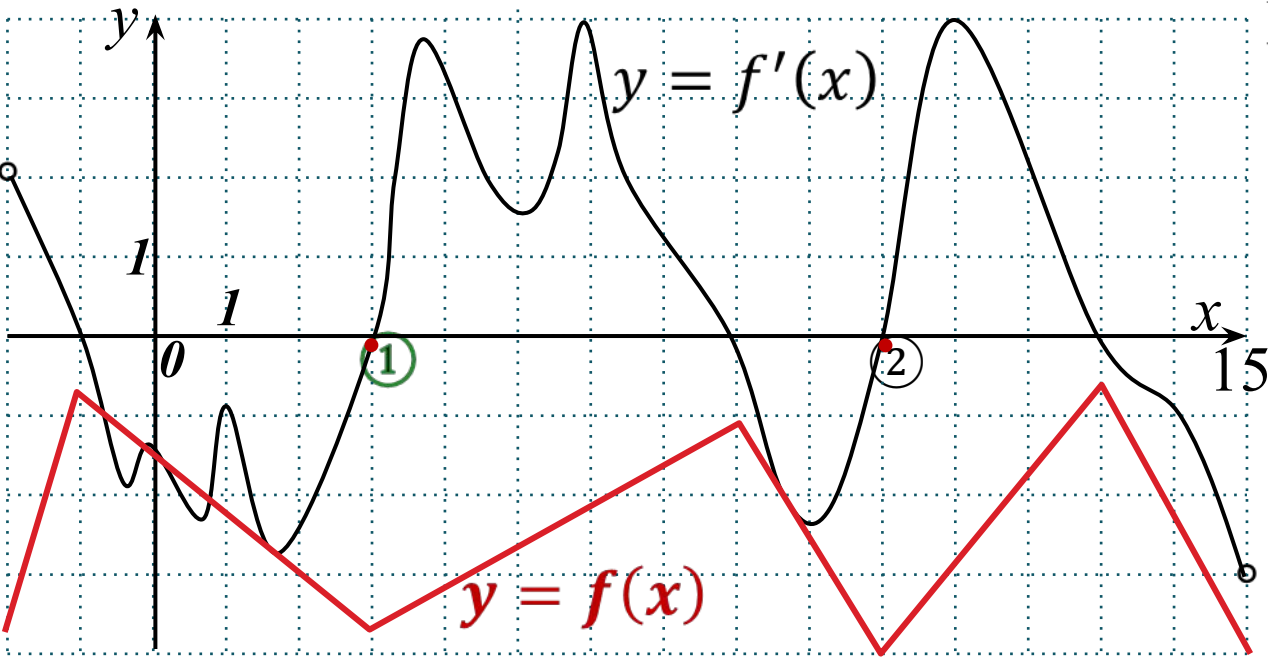


На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 4)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -17$.

Решение: Прямая $y = -17$ – горизонтальная, \Rightarrow , если касательная к графику функции ей параллельна, то она тоже горизонтальна. Определим по рисунку количество точек с горизонтальной касательной.
Количество таких точек равно 6.

Ответ: 6.

ЗАДАЧА (№20)

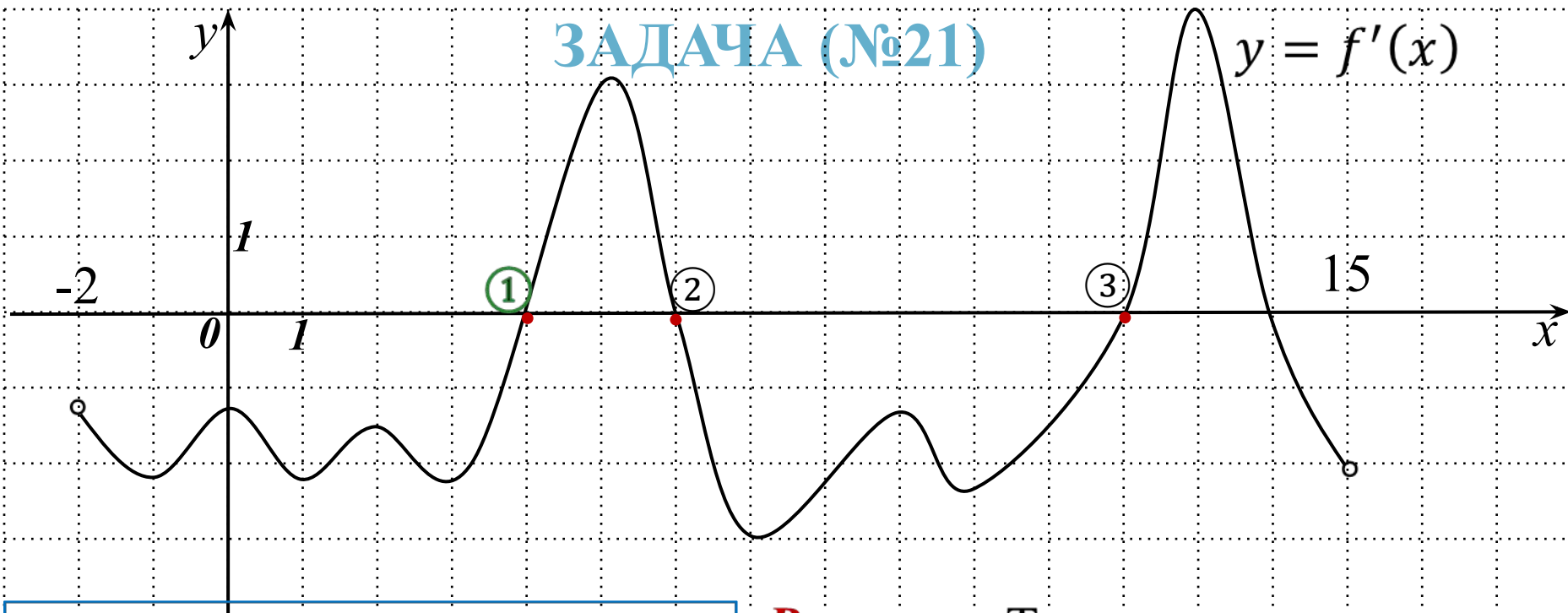


На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 15)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[0; 12]$.

Решение: Точка x_0 - точка минимума функции, либо если $f'(x_0) = 0$ и в этой точке происходит смена знака производной с «-» на «+», либо в том случае, когда производная функции в этой точке не существует. По рисунку определяем, что таких точек, принадлежащих отрезку $[0; 12]$, две: 3; 10.

Ответ: 2.

ЗАДАЧА (№21)

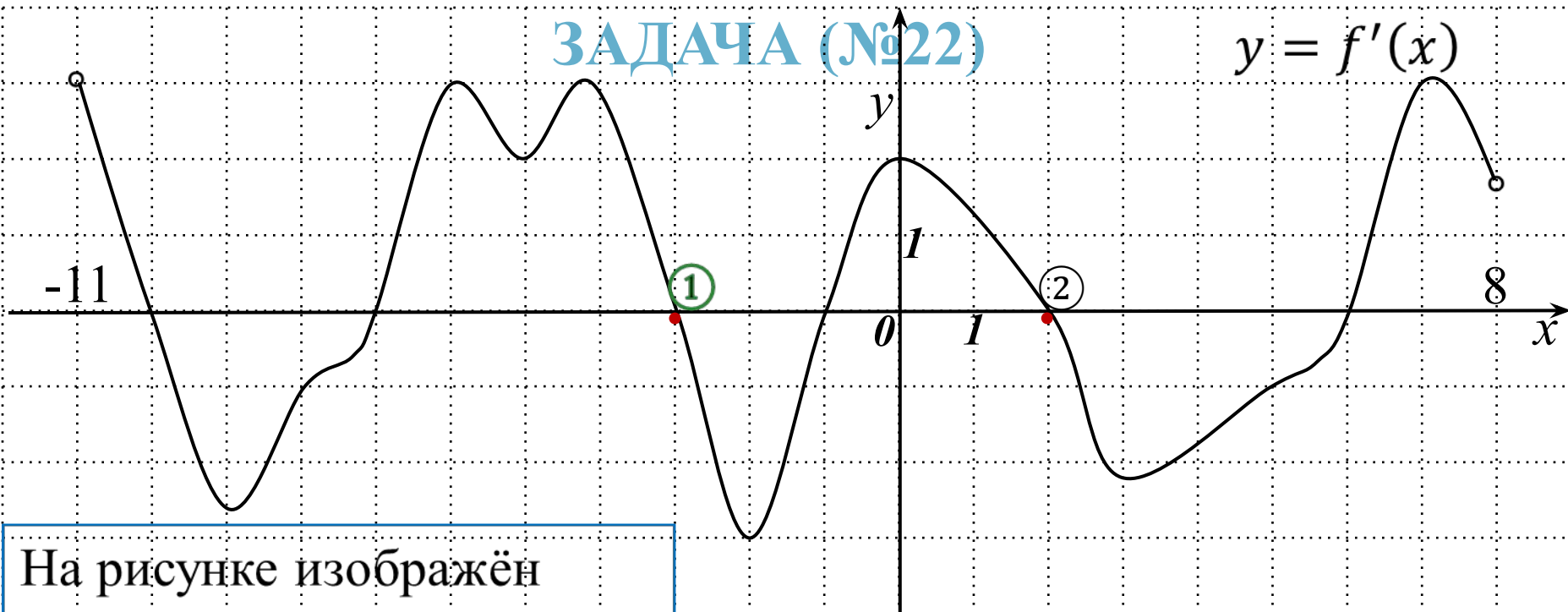


На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 15)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[3; 13]$.

Решение: Точка x_0 - точка экстремума функции, либо если $f'(x_0) = 0$, либо в том случае, когда производная функции в этой точке не существует. По рисунку определяем, что таких точек, принадлежащих отрезку $[3; 13]$, три: 4; 6; 12.

Ответ: 3.

ЗАДАЧА (№22)

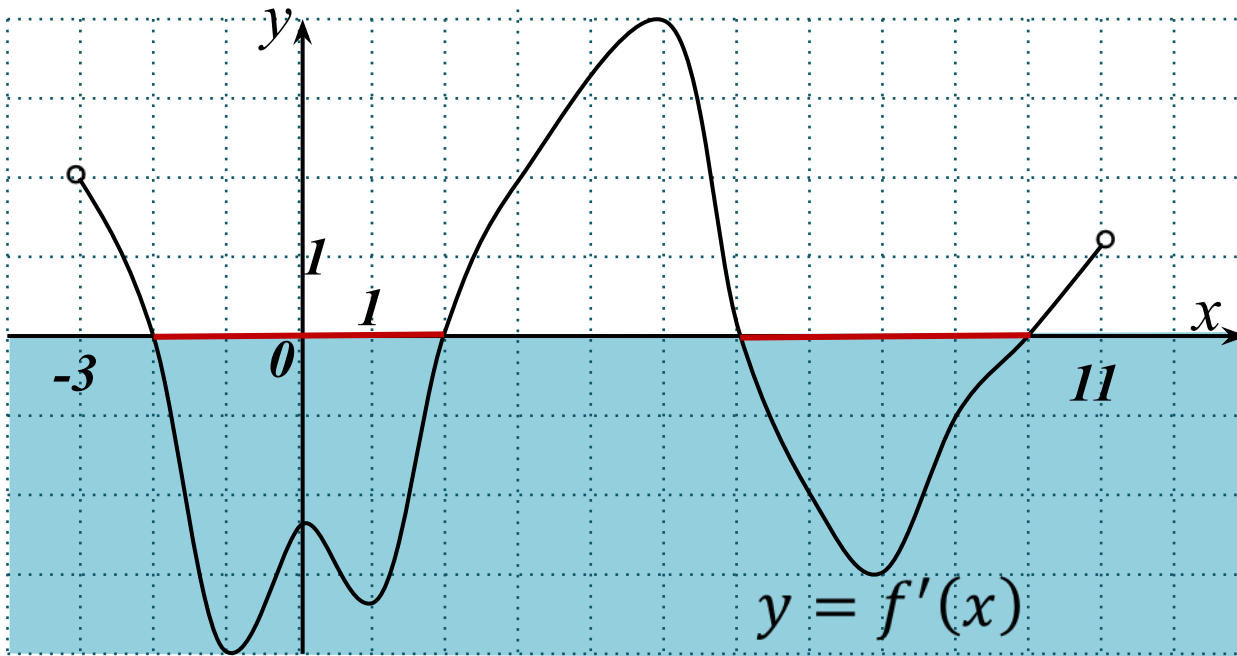


На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-11; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-8; 7]$.

Решение: Точка x_0 - точка максимума функции, либо если $f'(x_0) = 0$ и в этой точке происходит смена знака производной с «+» на «-», либо в случае, когда производная функции в этой точке не существует. По рисунку определяем, что таких точек, принадлежащих отрезку $[-8; 7]$, две: -3; 2.

Ответ: 2.

ЗАДАЧА (№23)



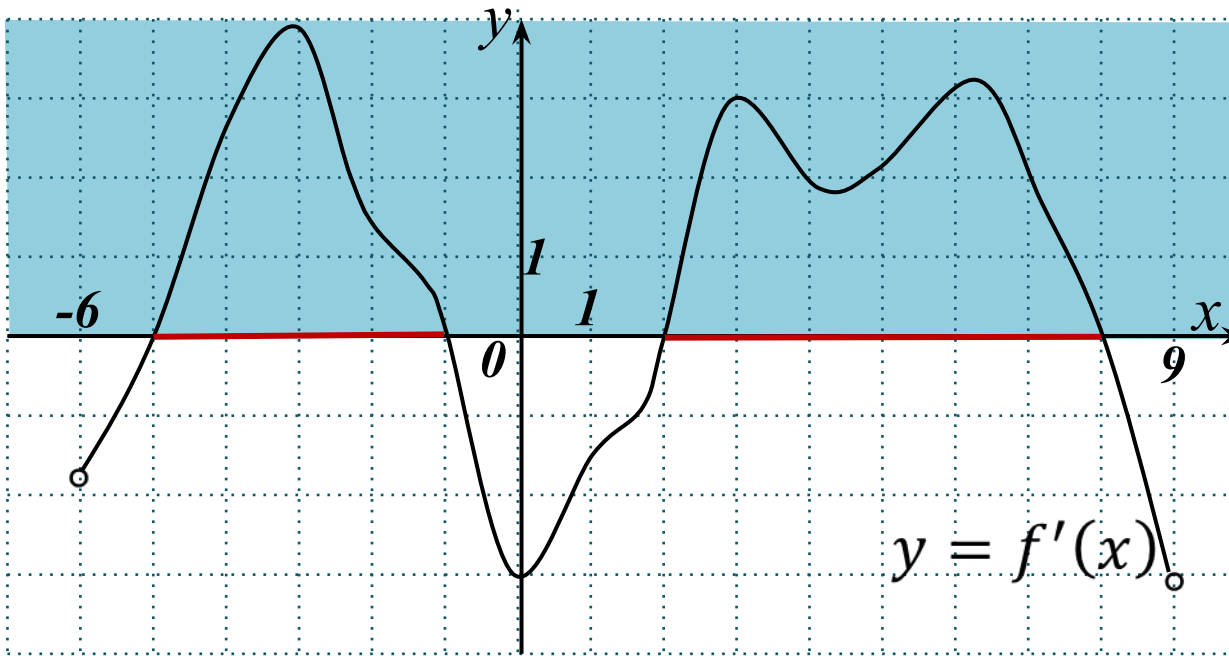
На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 11)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Решение: На всём промежутке убывания функции $f(x)$ её производная неположительна.

На рисунке это промежутки: $(-2; 2)$, $(8; 10)$. Оба промежутка имеют длину, равную 4, так как $2 - (-2) = 10 - 6 = 4$.

Ответ: 4.

ЗАДАЧА (№24)

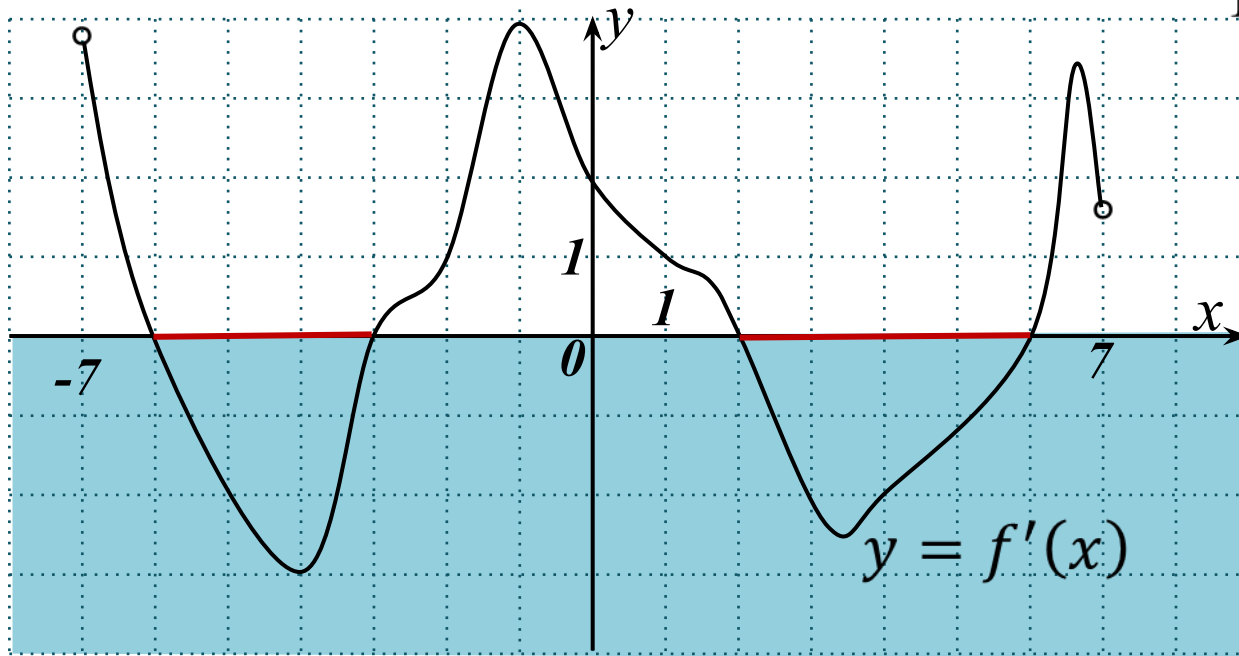


Решение: На всём промежутке возрастания функции $f(x)$ её производная неотрицательна. На рисунке это промежутки: $(-5; -1), (2; 8)$.

Наибольшую длину из них имеет промежуток $(2; 8)$, длина которой равна 6, т.к. $8 - 2 = 6$.

Ответ: 6.

ЗАДАЧА (№25)



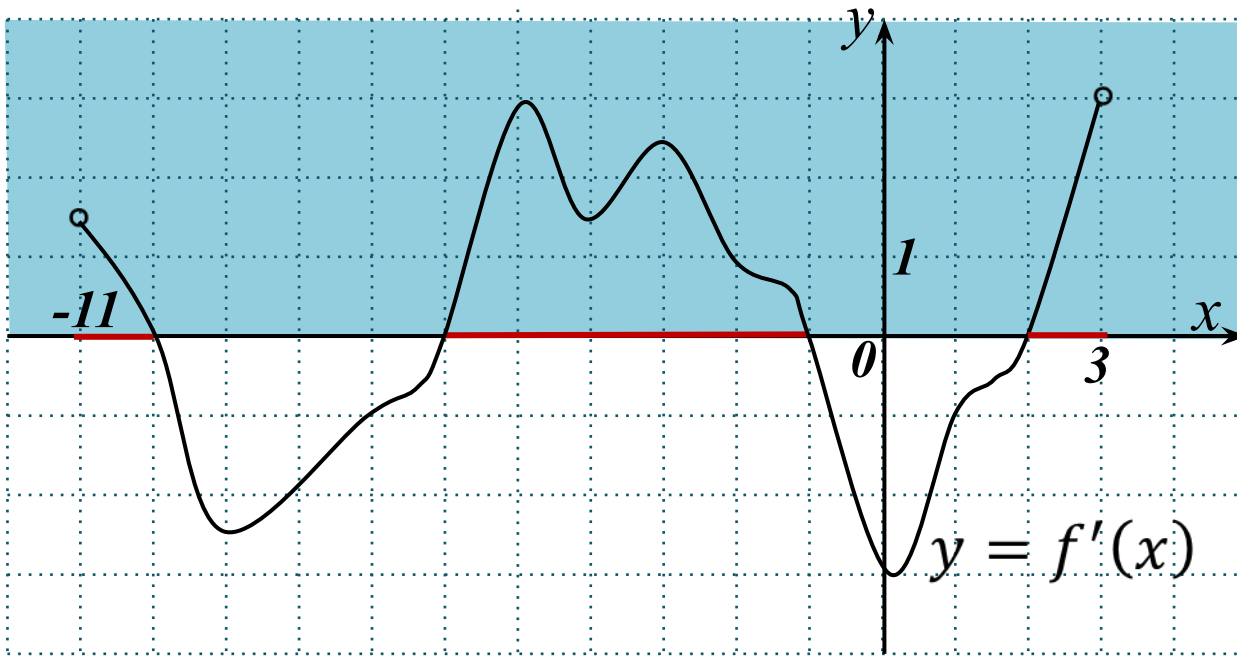
На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Решение: На всём промежутке убывания функции $f(x)$ её производная неположительна.

На рисунке это промежутки: $(-6; -3)$, $(2; 6)$. Наибольшую длину из них имеет промежуток $(2; 6)$, так как $6 - 2 = 4$.

Ответ: 4.

ЗАДАЧА (№26)



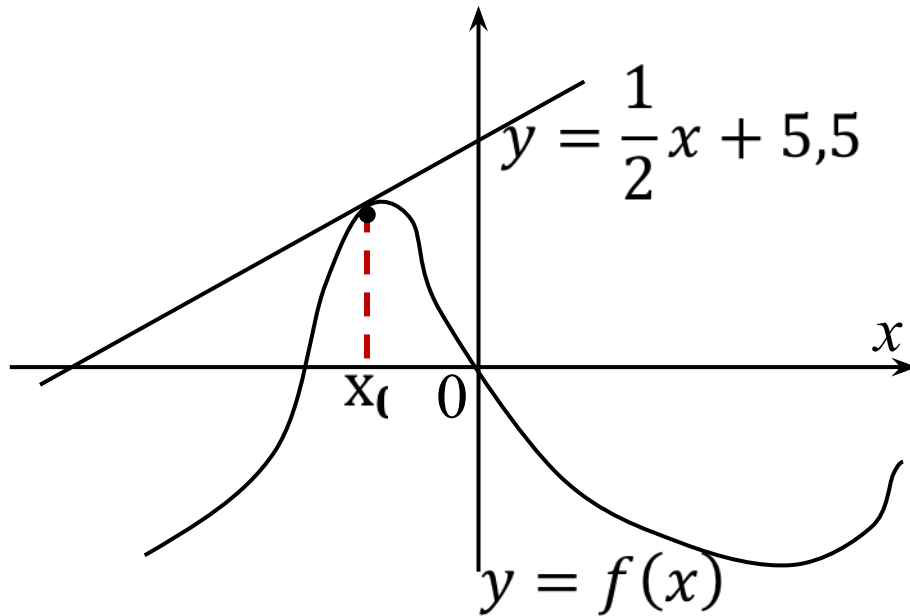
На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-11; 3)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Решение: На всём промежутке возрастания функции $f(x)$ её производная неотрицательна. На рисунке это промежутки: $(-11; -10)$, $(-6; -1)$, $(2; 3)$.

Наибольшую длину из них имеет промежуток $(-6; -1)$, длина которой равна 5, т.к. $-1 - (-6) = 5$.

Ответ: 5.

ЗАДАЧА (№27)



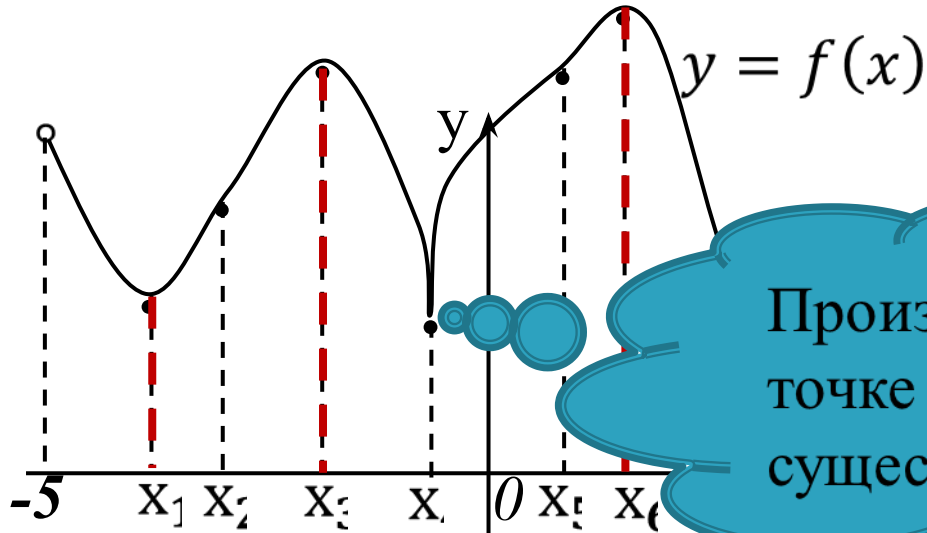
На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $y = 4f(x) + 7$ в точке x_0 .

Решение: $y'(x) = (4f(x) + 7)' = 4 \cdot f'(x)$; в точке x_0 значение производной функции равно угловому коэффициенту касательной к графику функции: $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, \Rightarrow
 $y'(x_0) = 4 \cdot f'(x_0) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

Ответ: 2.

ЗАДАЧА (№28)

Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-5; 6)$. На рисунке



изображён график функции $y = f(x)$.

Производная в точке x_4 не существует

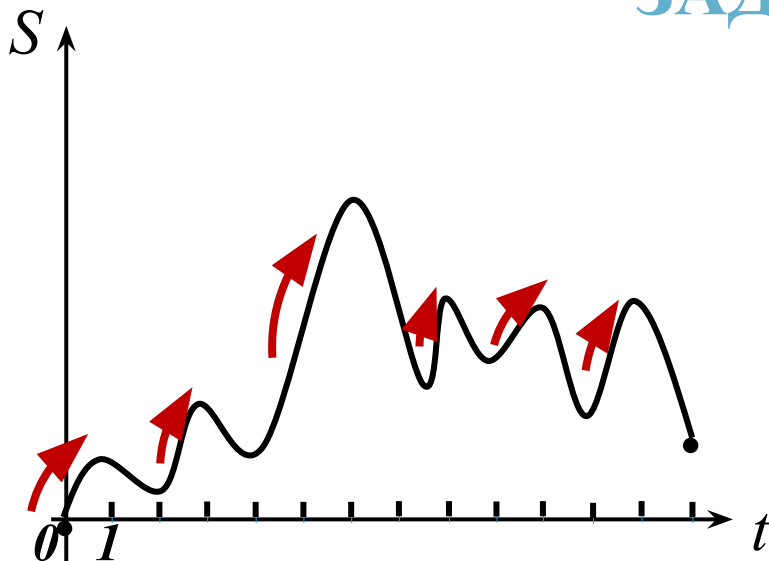
Среди точек $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ те, в которых

производная функции равна нулю. В ответ запишите количество найденных точек.

Решение: Производная функции в некоторой точке равна нулю тогда и только тогда, когда касательная к графику функции, проведённая в этой точке, горизонтальна. Этому условию удовлетворяют точки x_1, x_3, x_6 и x_7 , \Rightarrow количество найденных точек равно 4.

Ответ: 4.

ЗАДАЧА (№29)



на оси ординат – расстояние s в метрах. Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).

Решение: После начала движения, примерно через 1 с, график достиг верхней точки на этом участке, затем график уходит вниз, \Rightarrow точка остановилась и стала двигаться назад. Значит каждая вершина и впадина графика означает перемену направления движения точки M , т.е. в этих точках скорость равна 0. Всего на графике 11 вершин и 11 впадин, не считая начала и конца движения.

Ответ: 11.