

Урок №28

Формулы сложения

Синус, косинус, тангенс суммы и разности аргументов

Задание:

1. Записать конспект в рабочую тетрадь (на проверку присылать не надо)
2. Решить и прислать только решение примеров а),б), в),г).д)

Формулы сложения

- Синус суммы

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

- Косинус суммы

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Вывод формул

- Синус разности

$$\begin{aligned}\sin(x - y) &= \sin(x + (-y)) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) = \\ &= \sin x \cos y + \cos x(-\sin y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y\end{aligned}$$

- Косинус разности

$$\begin{aligned}\cos(x - y) &= \cos(x + (-y)) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) = \\ &= \cos x \cos y - \sin x(-\sin y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y\end{aligned}$$

- Тангенс суммы

$$tg(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \left(: \cos x \cos y, \text{ при } \cos x \cos y \neq 0 \right)$$

$$= \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y}} = \frac{tgx + tgy}{1 - tgx tgy}$$

- Тангенс разности

$$tg(x - y) = \frac{tgx - tgy}{1 + tgx tgy}$$

Примеры применения формул

1. Вычислить $\sin 75^\circ$ и $\cos 75^\circ$

Решение: воспользуемся тем, что $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$


$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Ответ: $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

2. Доказать тождество $\sin(\pi + x) = -\sin x$

Решение: $\sin(\pi + x) = \sin \pi \cos x + \cos \pi \sin x =$
 $= 0 \cdot \cos x + (-1) \sin x = -\sin x$

$\sin(\pi + x) = -\sin x$ 

3. Вычислить: $\sin \frac{4\pi}{15} \cos \frac{\pi}{15} + \cos \frac{4\pi}{15} \sin \frac{\pi}{15}$

Решение: «свернем» в синус суммы
данное выражение

$$\sin \frac{4\pi}{15} \cos \frac{\pi}{15} + \cos \frac{4\pi}{15} \sin \frac{\pi}{15} = \sin\left(\frac{4\pi}{15} + \frac{\pi}{15}\right) =$$

$$= \sin \frac{5\pi}{15} = \sin \frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Найдите значение выражения:

$$a) \cos 107^\circ \cos 17^\circ + \sin 107^\circ \sin 17^\circ$$

$$б) \sin 36^\circ \cos 24^\circ + \cos 36^\circ \sin 24^\circ$$

$$в) \sin 5x \cos 3x - \cos 5x \sin 3x$$

$$г) \cos 7x \cos 4x - \sin 7x \sin 4x$$

$$д) \frac{\operatorname{tg} 22^\circ + \operatorname{tg} 23^\circ}{1 - \operatorname{tg} 22^\circ \operatorname{tg} 23^\circ}$$