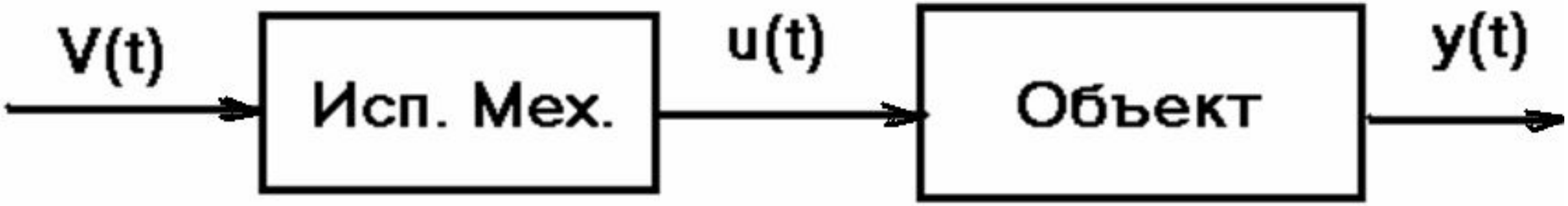
Пример 2 домашнего задания



$$W_{ОБ}(S) = \frac{4}{2 \cdot S^2 + 3 \cdot S + 1} \qquad W_{ИМ}(S) = \frac{0.5}{S}$$

Измеряются сигналы y(t) и $y^{|}$(t)

Дифференциальное уравнение объекта имеет вид:

$$2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=4u(t)\,.\quad x_1=y;\ x_2=\frac{dx_1}{dt}\,.$$

$$2\cdot x_1''+3\cdot x_1'+x_1=4\cdot u;\quad 2\cdot x_2'+3\cdot x_2+x_1=4\cdot u$$

Уравнение исполнительного механизма

$$\frac{du(t)}{dt}=0.5\cdot v(t);\quad x_3(t)=u(t)\,.\quad x_3'=0.5\cdot v$$ **. Тогда**

$$\begin{cases} x_1'=x_2; \\ x_2'=-0.5\cdot x_1-1.5\cdot x_2+2\cdot x_3; \\ x_3'=0.5\cdot v \end{cases}$$

$y(t) = x_1(t)$;
$y'(t) = x_2(t)$.

Перепишем уравнения в матричной форме

$$\begin{cases} x'(t) = A \cdot x(t) + B \cdot v(t); \\ \mathbf{Y(t)} = C \cdot x(t) \end{cases}$$

где $x'(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & -1.5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}$;

$\mathbf{Y(t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{y(t)} \\ \mathbf{y'(t)} \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Запишем матрицу наблюдаемости

$$M = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & -1.5 & 2 \\ -0.5 & -1.5 & 2 \\ 0.75 & 1.75 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ \\ + \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & -1.5 & 2 \end{bmatrix}$$

Rang (M) = 3 Система наблюдаема

Запишем матрицу управляемости

$$W = \begin{bmatrix} B & A \cdot B & \mathrm{A}^2 \cdot \mathrm{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1.5 \\ 0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

det (W)=-0,5 $\neq 0$

Следовательно, rang (W)=3. **Система управляема**

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПО МОДЕЛИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Характеристическое уравнение системы:

$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$, где I – единичная n x n матрица.

Пример:

$W(S) = \dfrac{2S-1}{S^2+4S+1}$. Характеристическое уравнение:

$S^2 + 4S + 1 = 0$. Запишем уравнение в операторной форме $(P^2 + 4P + 1)\cdot y(t) = (2P - 1)\cdot u(t)$. Разделим на произведение операторов:

$(2P - 1)^{-1} y(t) = (P^2 + 4P + 1)^{-1} \cdot u(t) = x_1(t)$, $\quad x_2 = x_1'$;

откуда $x_1'' + 4x_1' + x_1 = u$; $\; x_2' = - x_1 - 4x_2 + u$;

Тогда уравнения в пространстве состояний:

$x_1' = x_2$;

$x_2' = - x_1 - 4x_2 + u$; $\qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$, $\qquad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$

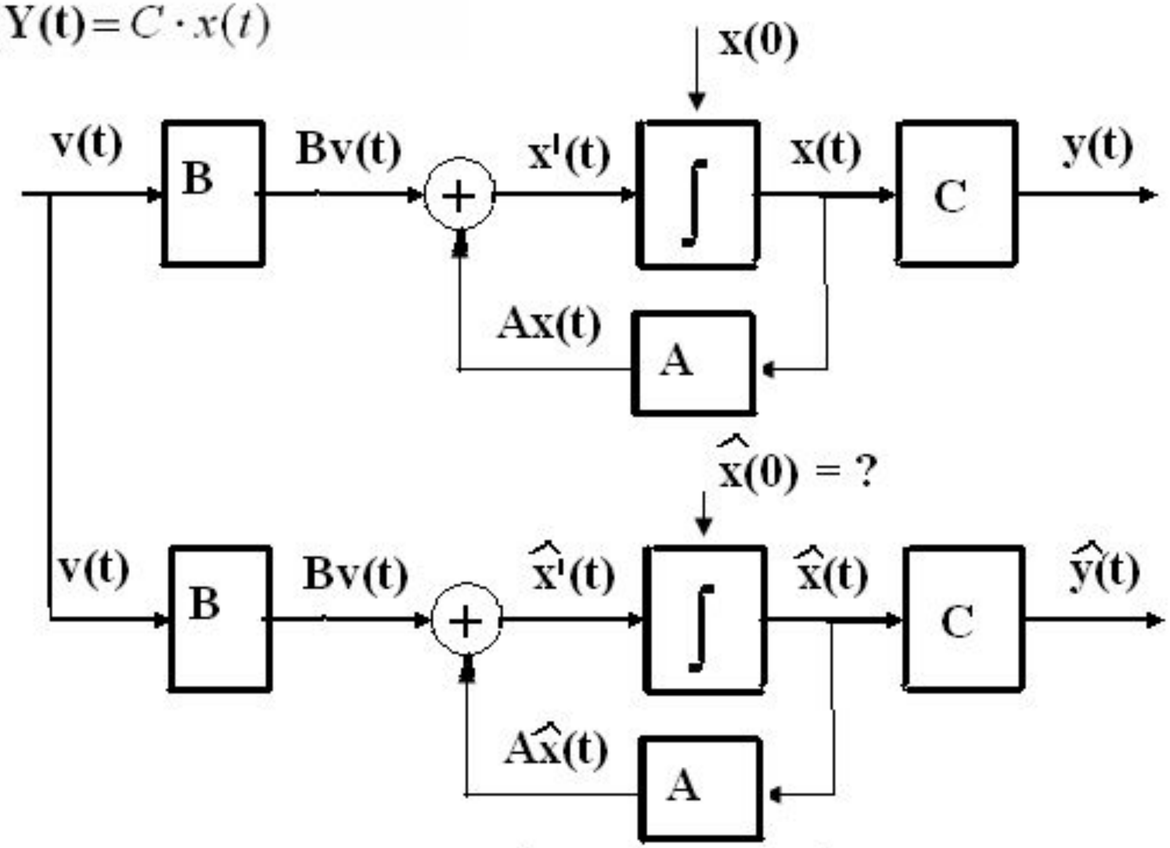
$$\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$$

Условие устойчивости динамической системы:
Все корни характеристического уравнения системы: $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$ должны иметь отрицательные вещественные части (лежать в левой полуплоскости).

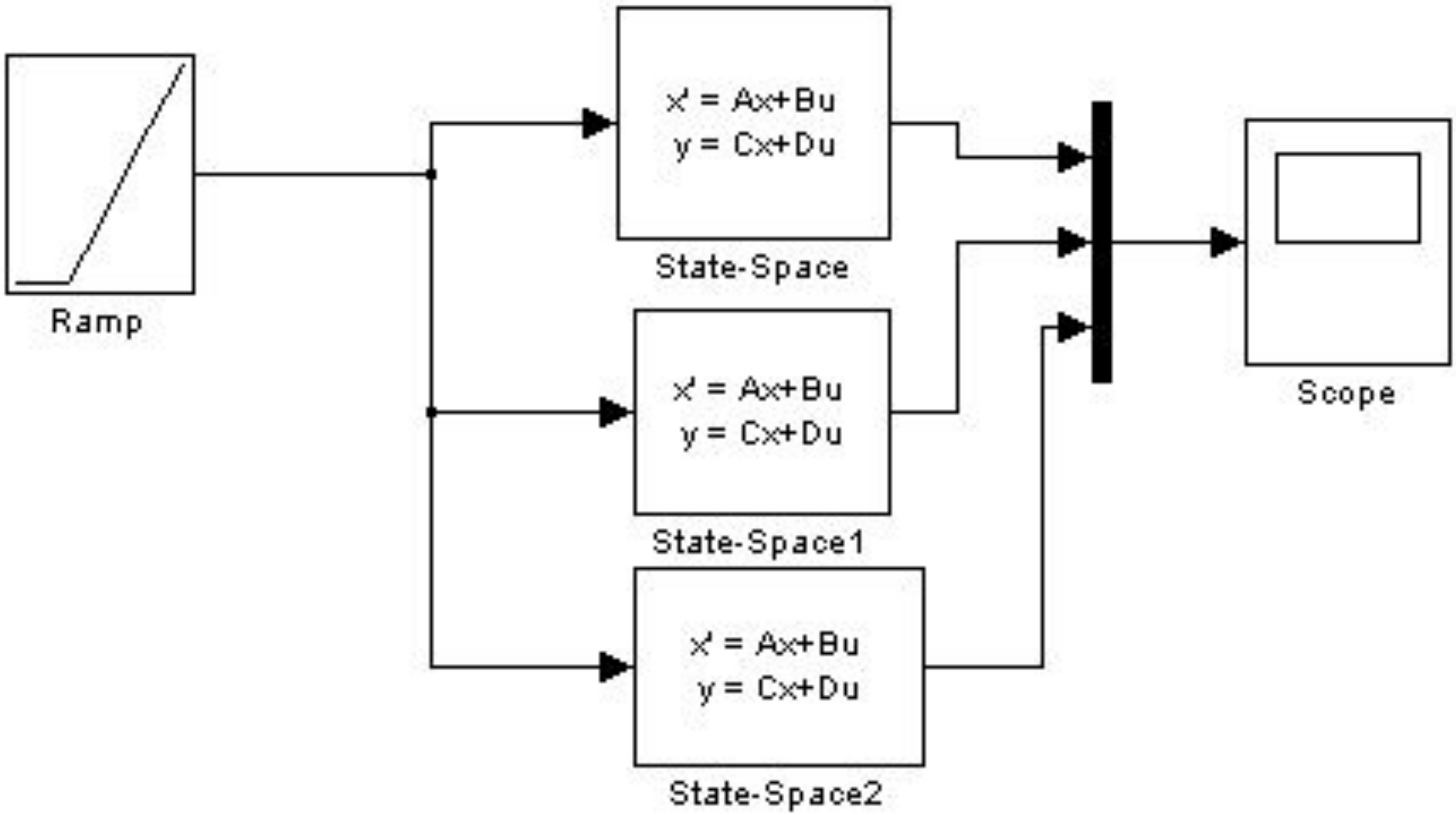
НАБЛЮДАТЕЛЬ СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Постановка задачи: Имеется устойчивая динамическая система. Необходимо по результатам **измерения** входа $v(t)$ и выхода системы $y(t)$ оценить изменение во времени **ВСЕХ** координат состояния.

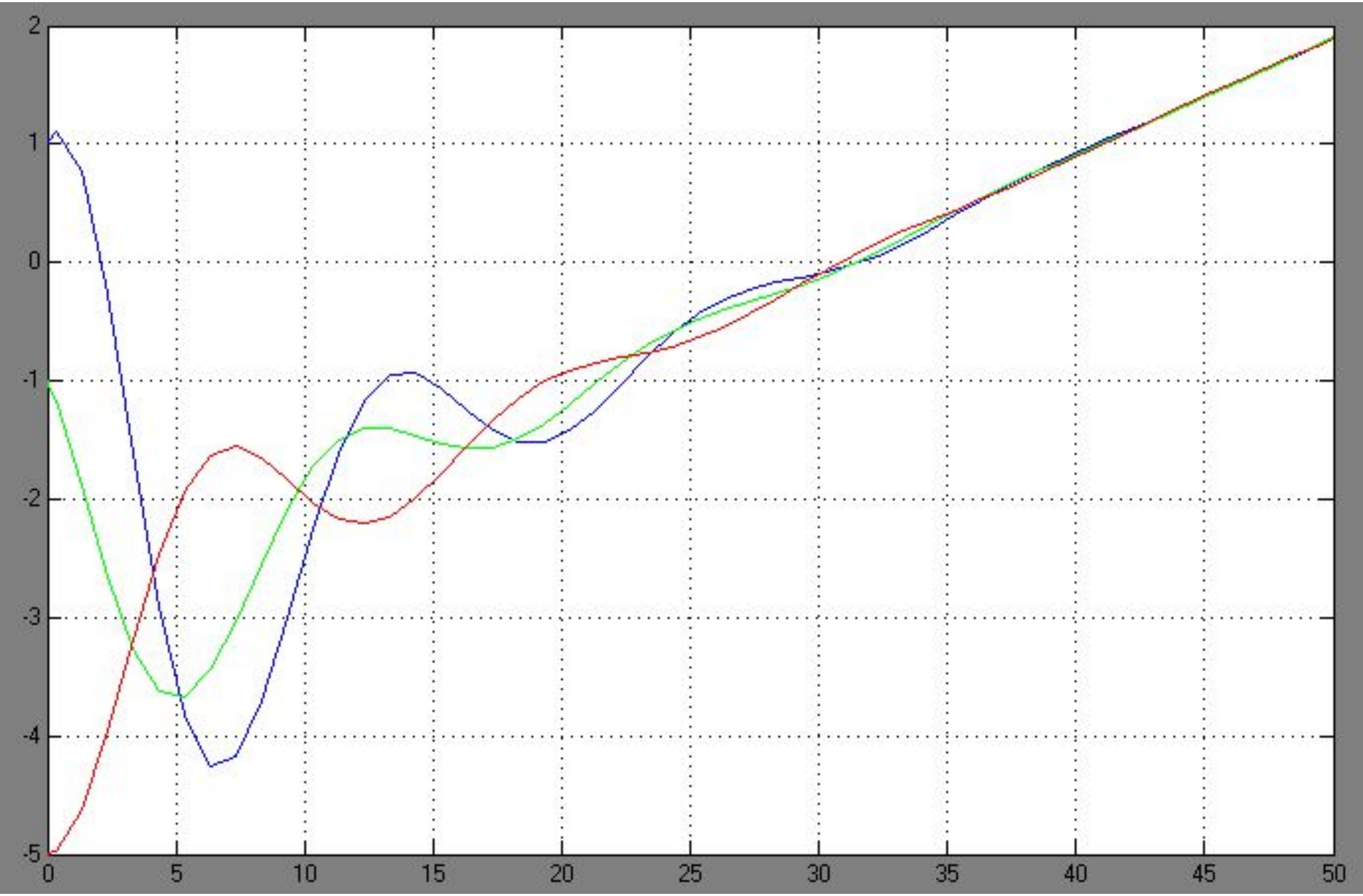
$$\begin{cases} x'(t) = A \cdot x(t) + B \cdot v(t); \\ Y(t) = C \cdot x(t) \end{cases}$$



С течением времени $\hat{x}(t) \longrightarrow x(t)$; $\hat{y}(t) \longrightarrow y(t)$

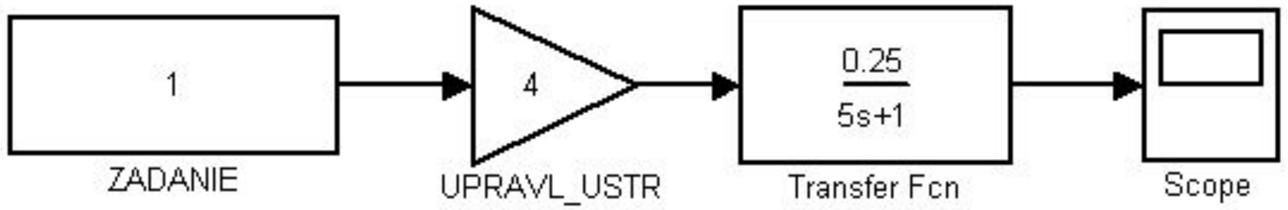


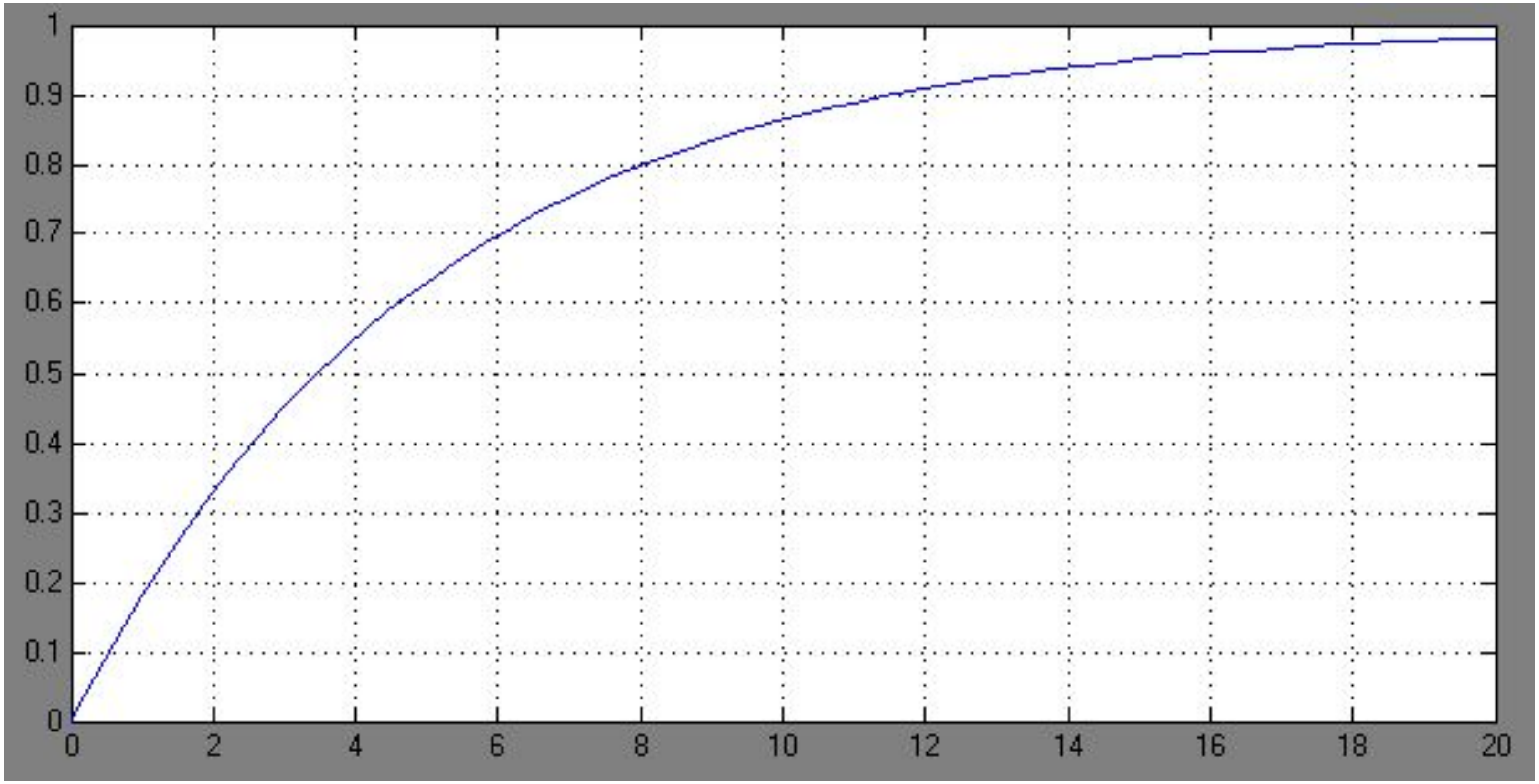
Ramp
x' = Ax+Bu
y = Cx+Du
State-Space
x' = Ax+Bu
y = Cx+Du
State-Space1
x' = Ax+Bu
y = Cx+Du
State-Space2
Scope



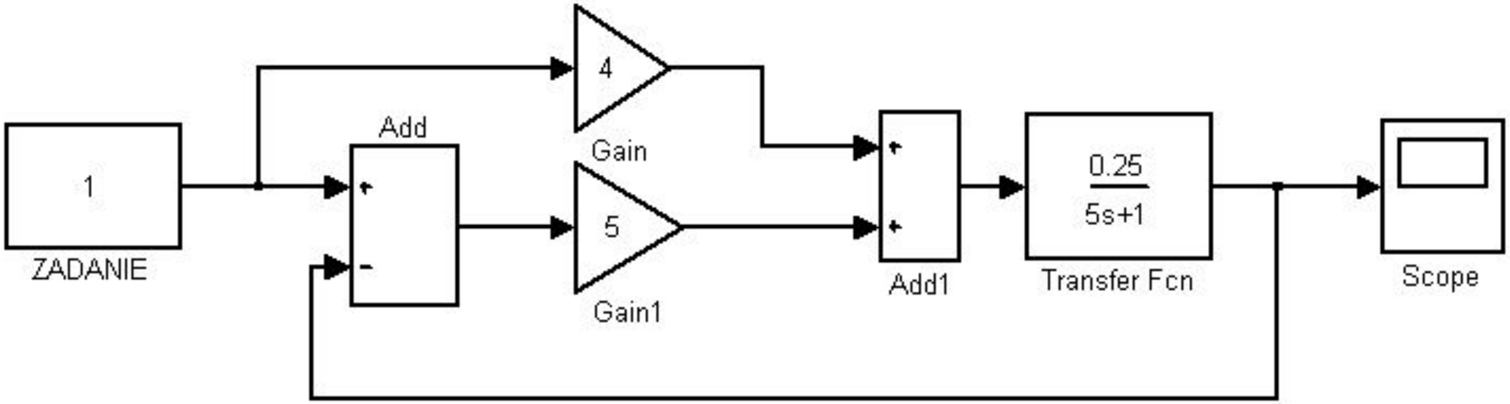
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

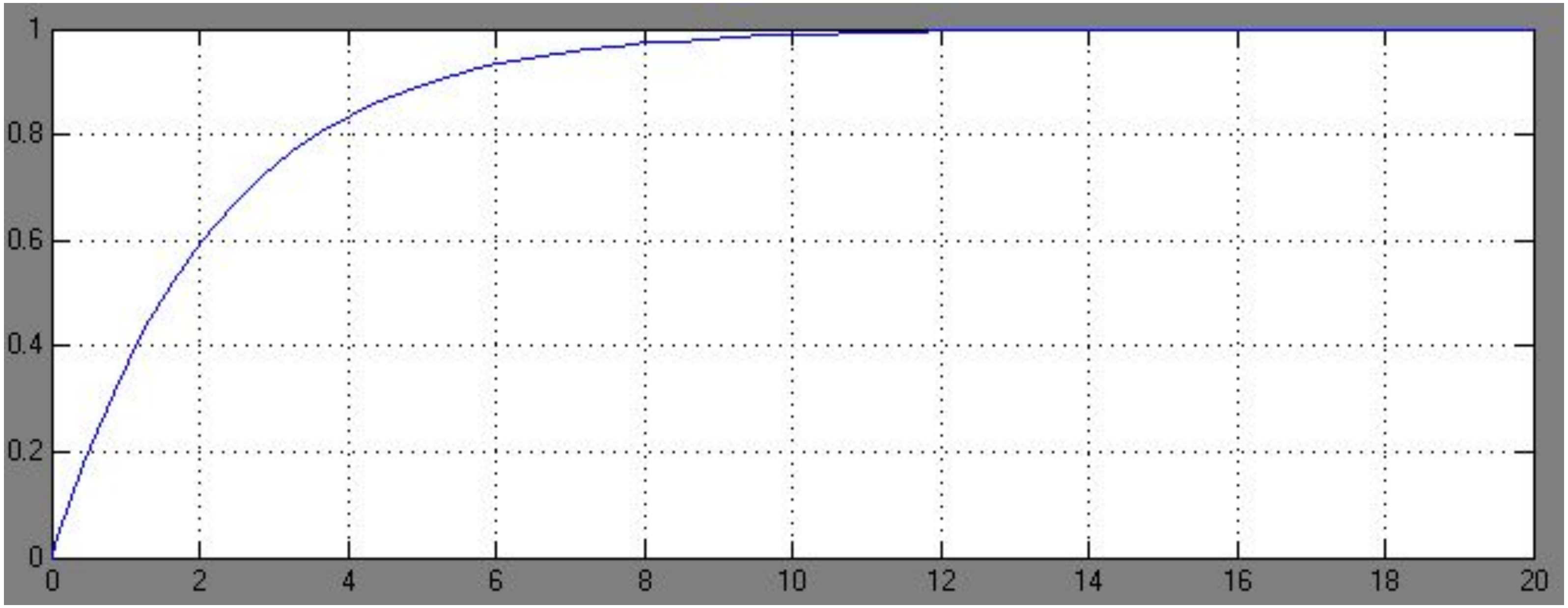
УПРАВЛЕНИЕ ВЫХОДОМ СИСТЕМЫ НА ЗАДАНИЕ



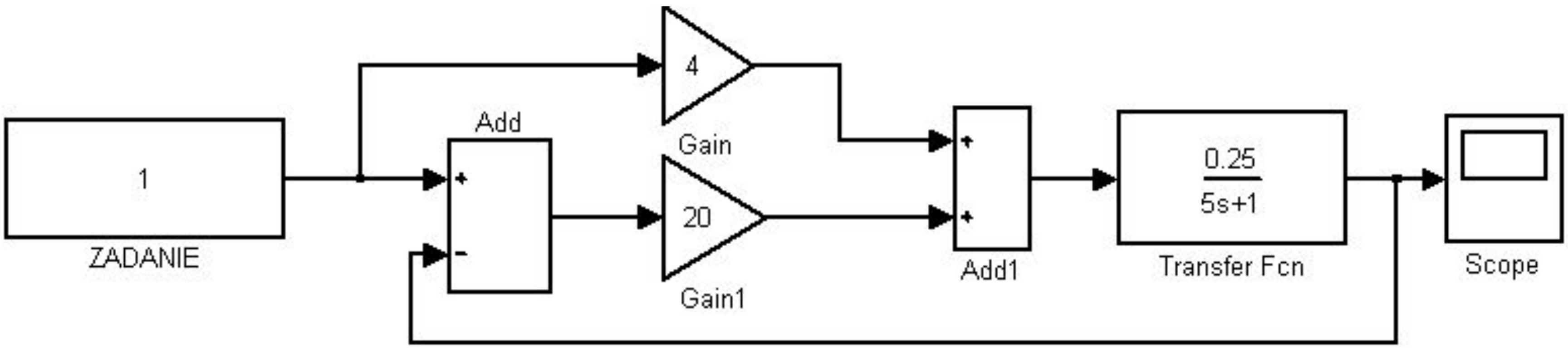


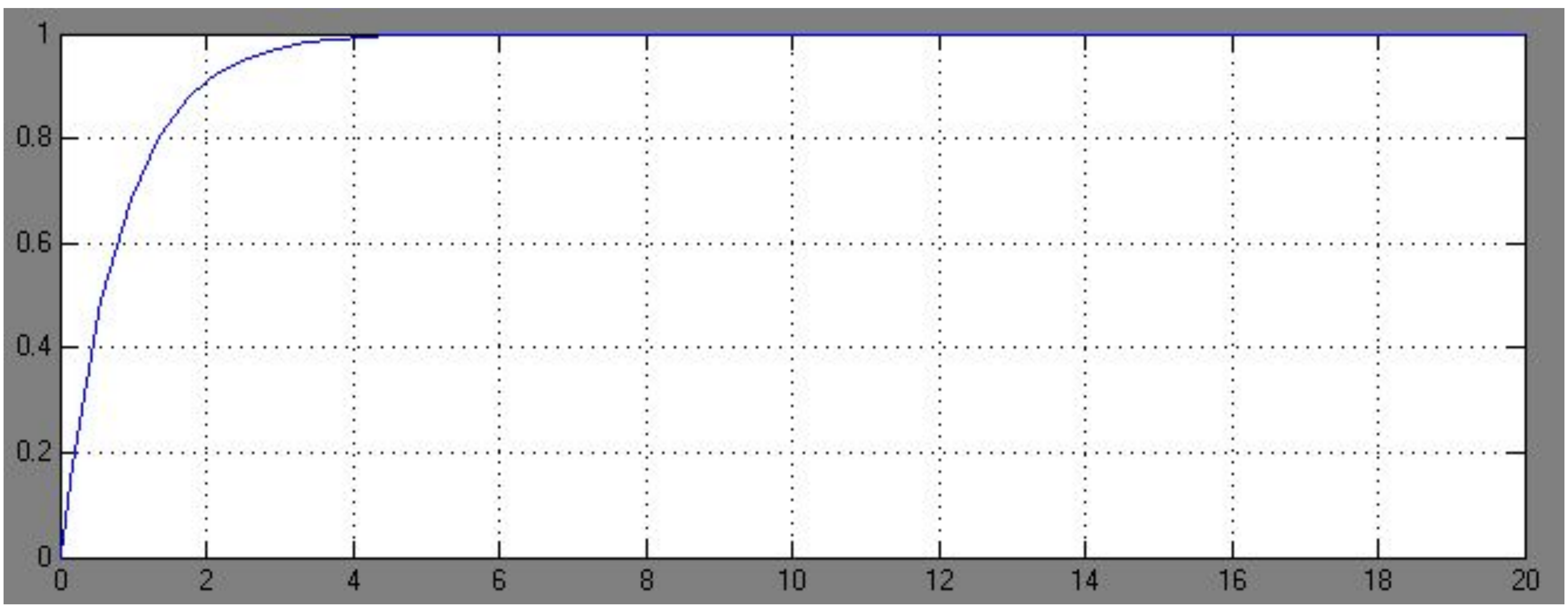
УПРАВЛЕНИЕ ВЫХОДОМ НА ЗАДАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОС



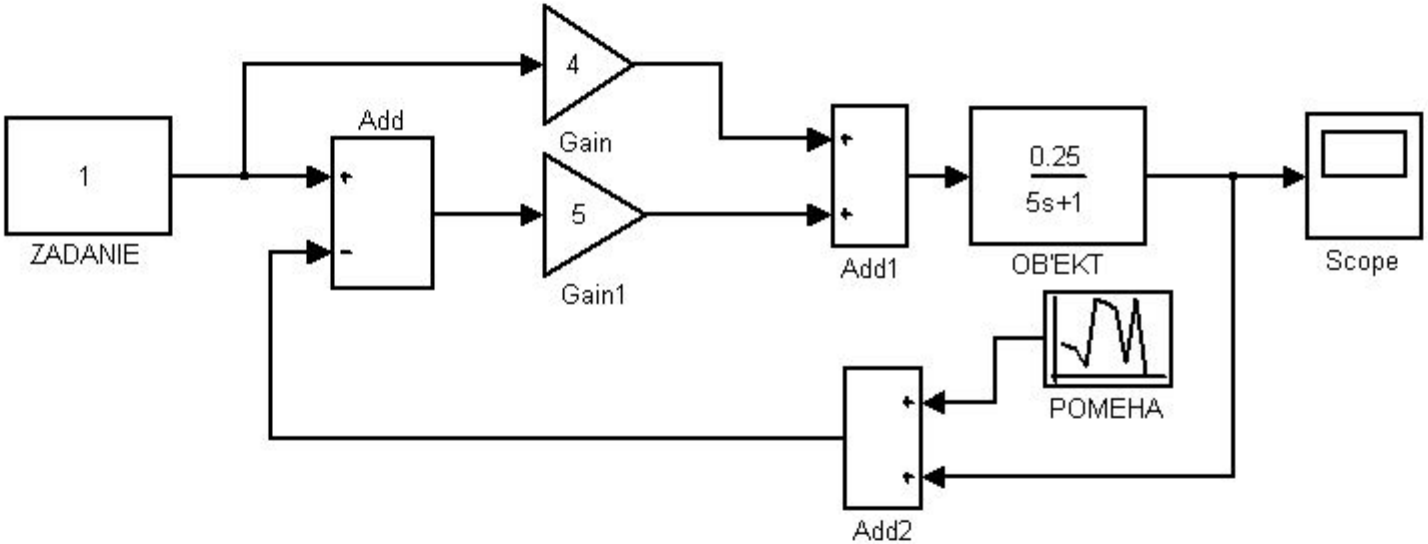


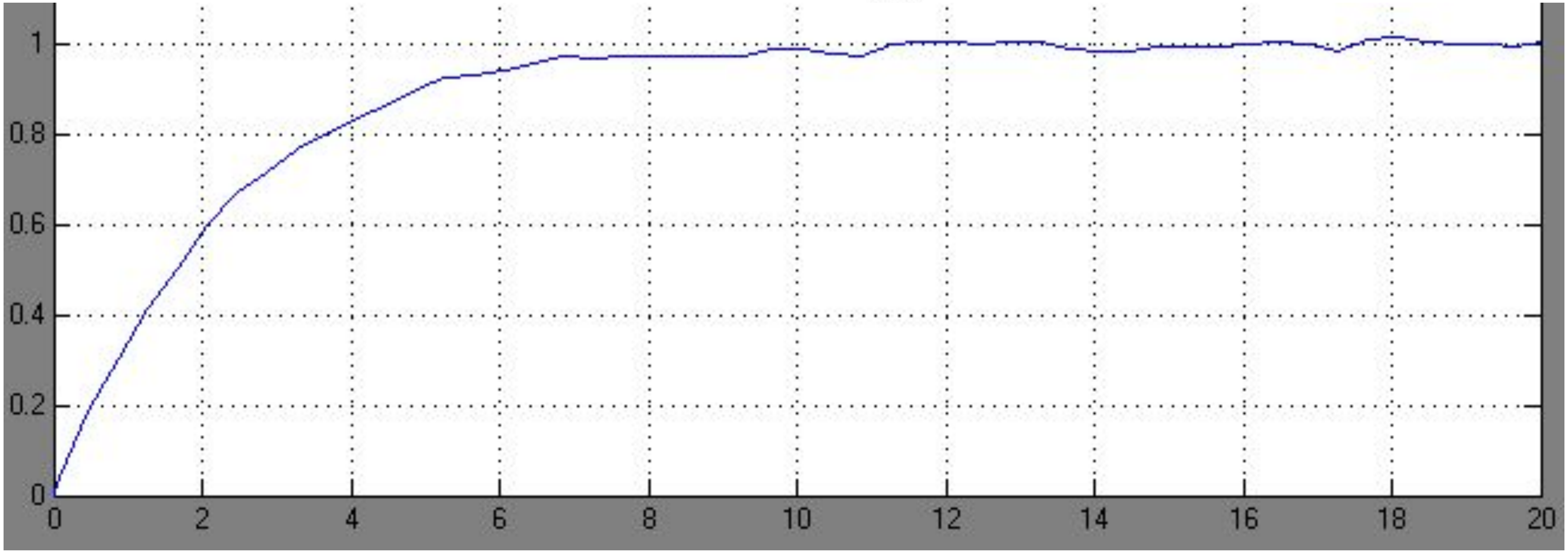
УПРАВЛЕНИЕ ВЫХОДОМ НА ЗАДАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОС



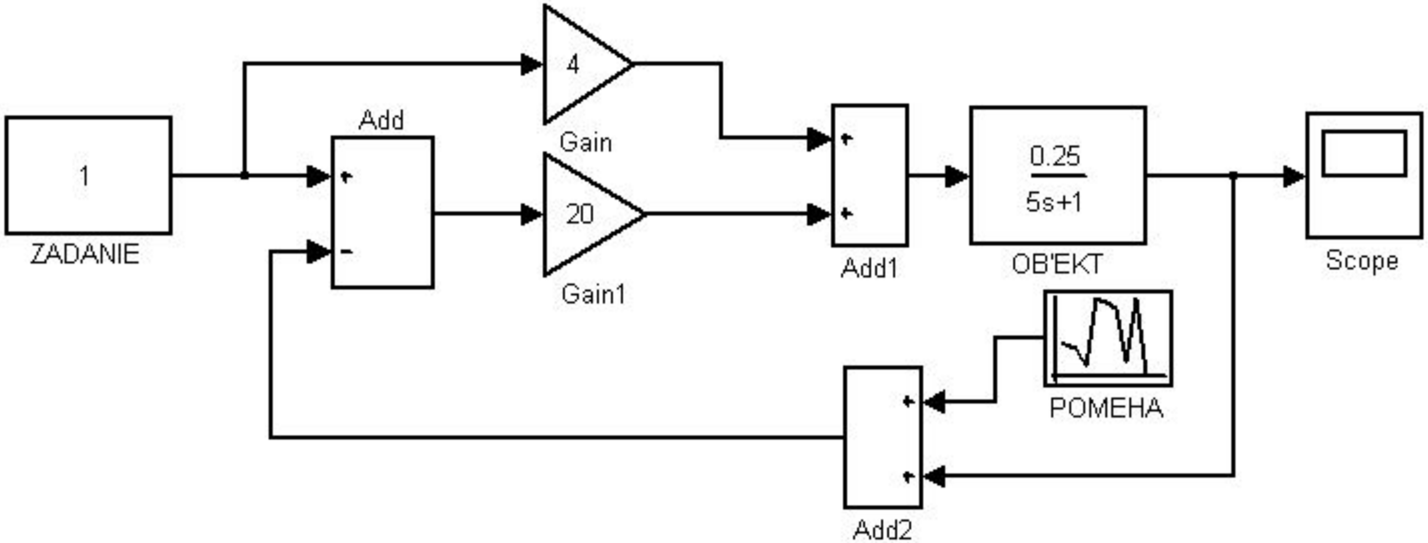


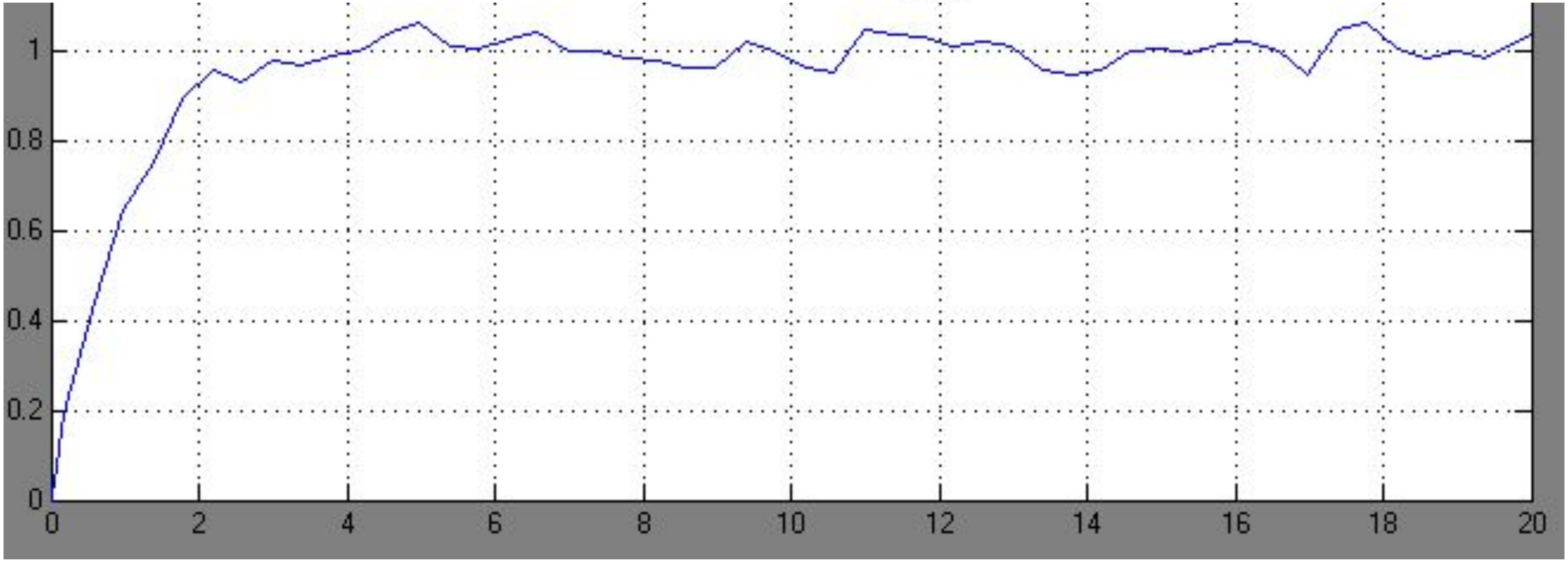
ВЛИЯНИЕ ПОМЕХИ ИЗМЕРЕНИЯ НА КАЧЕСТВО УПРАВЛЕНИЯ

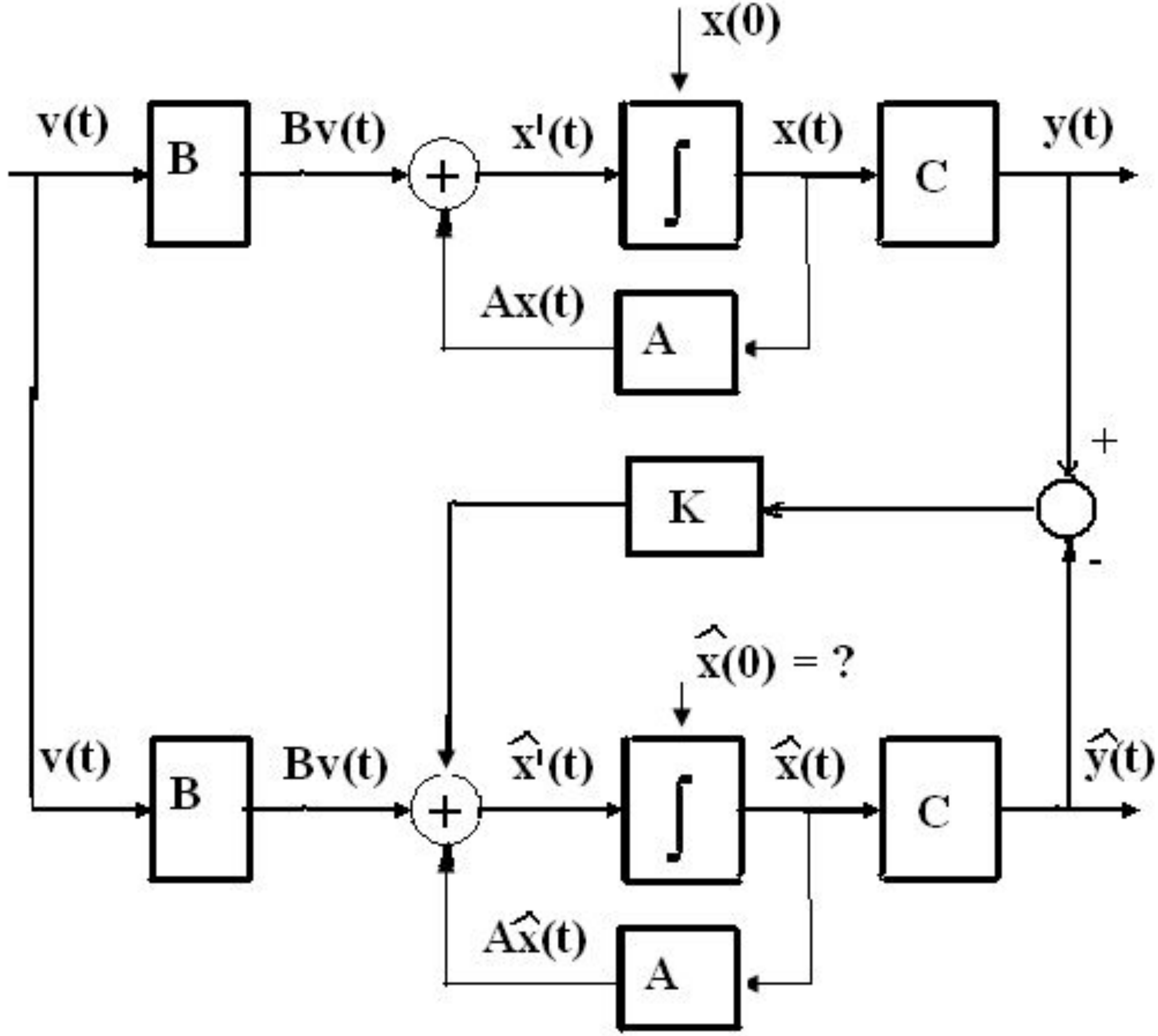


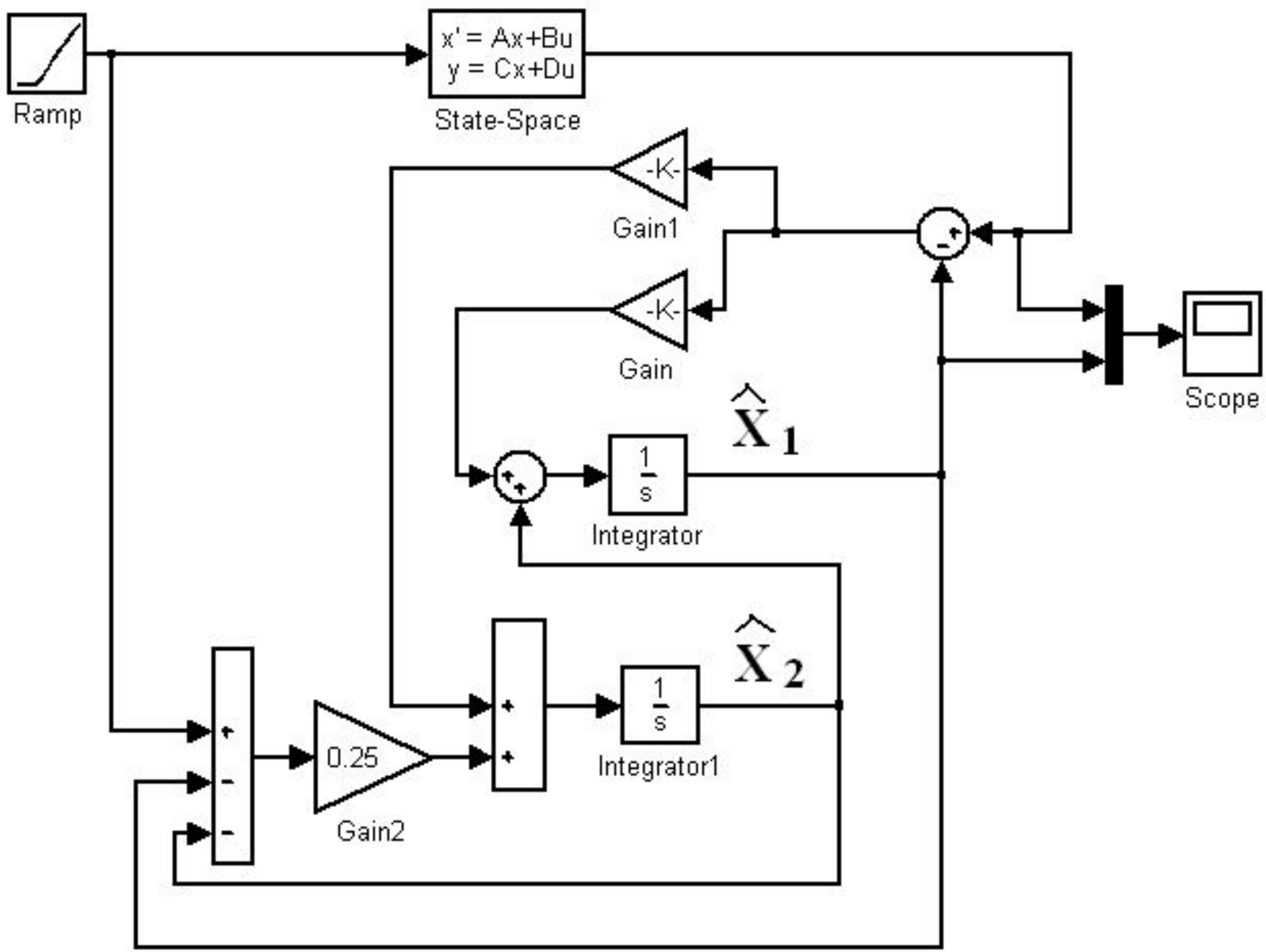


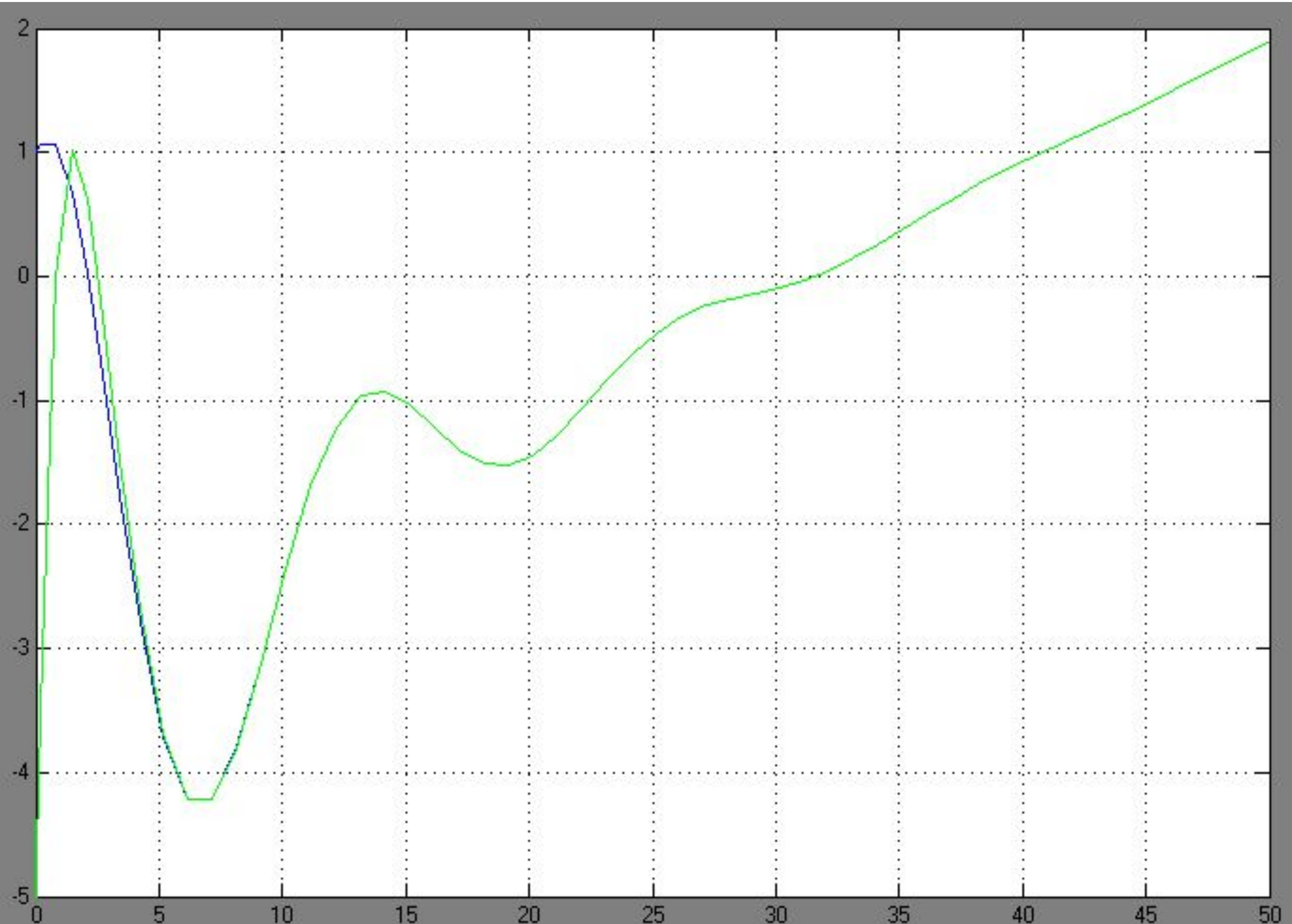
ВЛИЯНИЕ ПОМЕХИ ИЗМЕРЕНИЯ НА КАЧЕСТВО УПРАВЛЕНИЯ

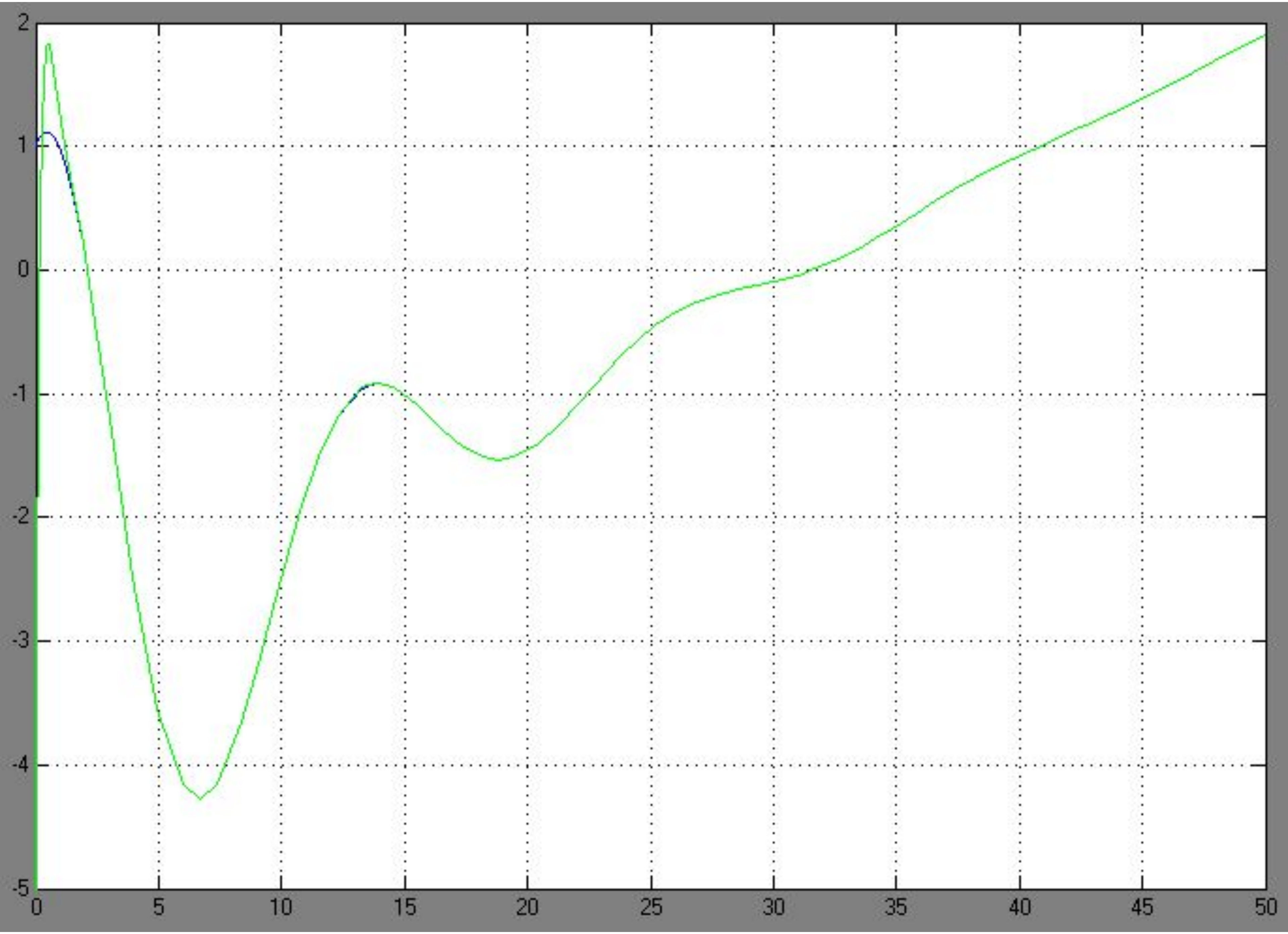


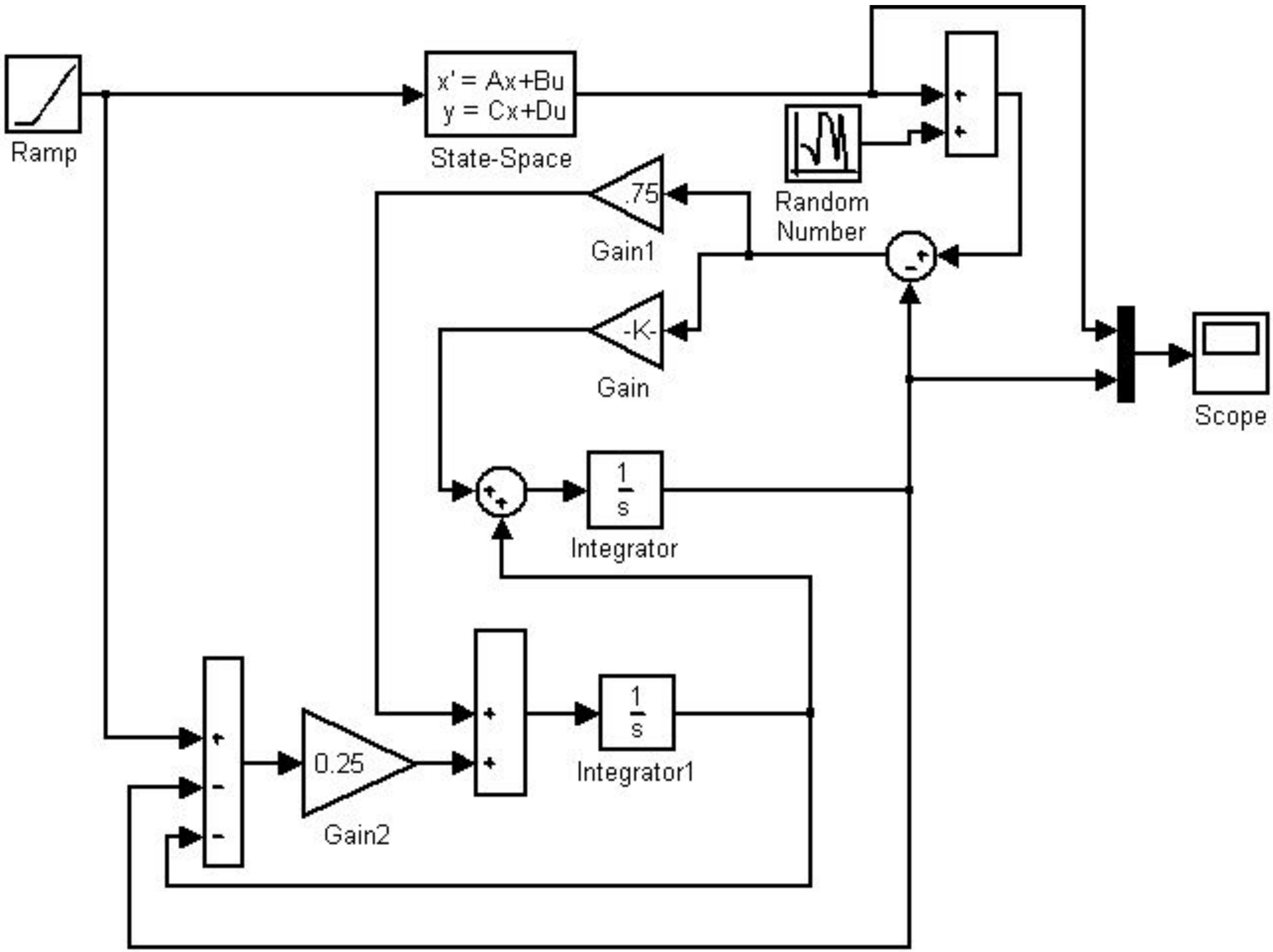



x(0)
v(t)
B
Bv(t)
+
x'(t)
∫
x(t)
C
y(t)
Ax(t)
A
+
K
-
x̂(0) = ?
v(t)
B
Bv(t)
+
x̂'(t)
∫
x̂(t)
C
ŷ(t)
Ax̂(t)
A

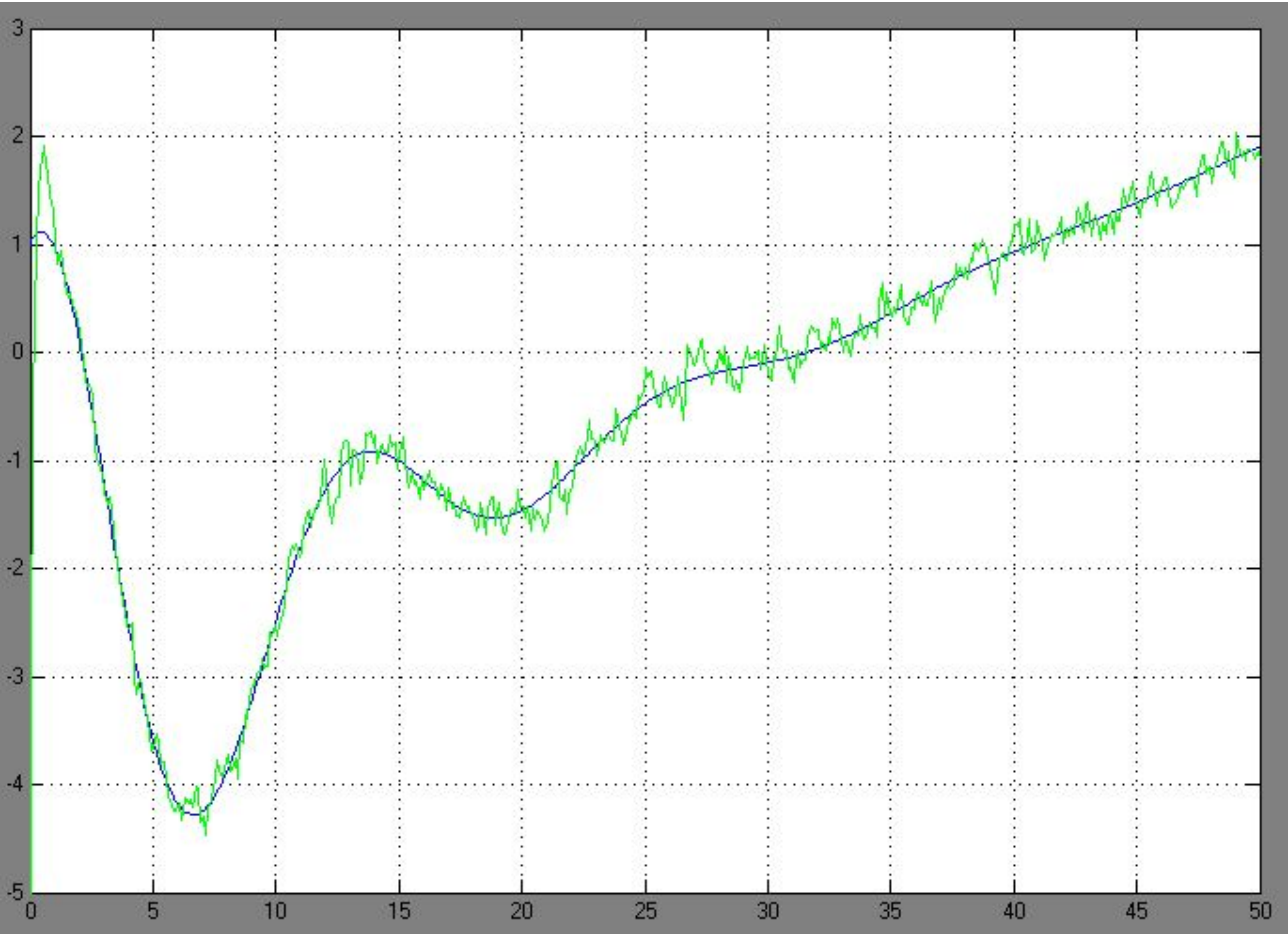

Ramp
x' = Ax+Bu
y = Cx+Du
State-Space
-K-
Gain1
-K-
Gain
Scope
$\hat{X}_1$
1/s
Integrator
$\hat{X}_2$
1/s
Integrator1
0.25
Gain2


2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

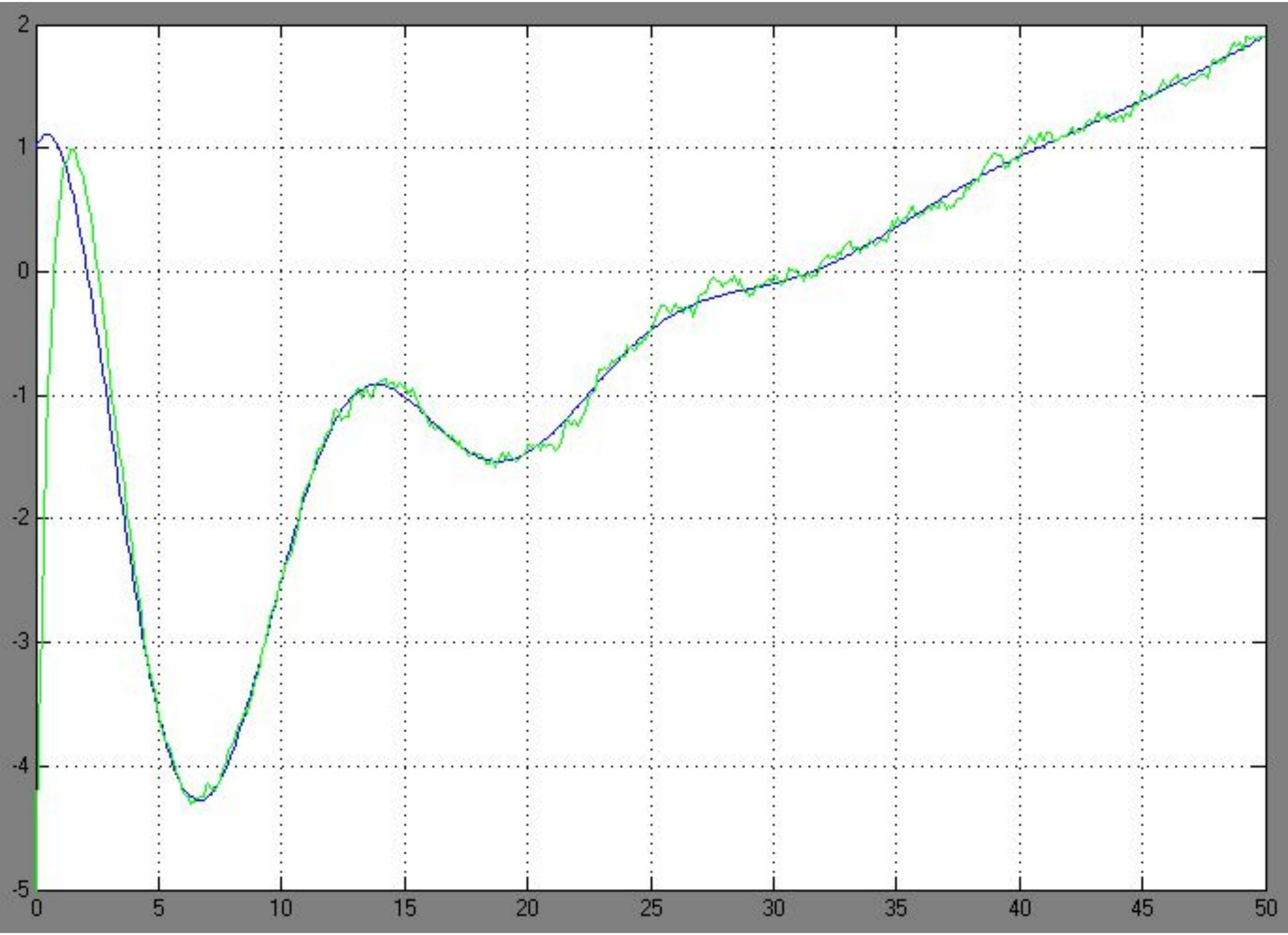

2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50



Ramp
x' = Ax+Bu
y = Cx+Du
State-Space
Random
Number
.75
Gain1
-K-
Gain
Scope
1
s
Integrator
0.25
Gain2
1
s
Integrator1



3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50


2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

Уравнение объекта:

$$\begin{cases} x'(t) = A \cdot x(t) + B \cdot v(t); \\ \mathbf{Y(t)} = C \cdot x(t) \end{cases} \qquad (1)$$

Уравнение наблюдателя

$$\begin{cases} \hat{x}'(t) = A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot v(t) + K \cdot (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C \cdot \hat{x}(t) \end{cases} \qquad (2)$$

Вычтем из (1) (2), получим

$$\tilde{x}'(t) = A \cdot \tilde{x}(t) - K \cdot (C \cdot x(t) - \hat{x}(t)) = (A - K \cdot C) \cdot \tilde{x}(t),$$

Где $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ - ошибка наблюдения. Движение ошибки зависит от матрицы А – КС. Нужно так выбрать К, чтобы ошибка стремилась к 0.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы корни λ_i характеристического уравнения $\det(A - K \cdot C - \lambda \cdot I) = 0$ располагались в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Для рассмотренного ранее примера,

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$. Имеем

$A - KC - \lambda I = \begin{bmatrix} -k_1 - \lambda & 1 \\ -1 - k_2 & -4 - \lambda \end{bmatrix}$. Тогда

$\lambda^2 + (4 + k_1) \cdot \lambda + 4 \cdot k_1 + 1 + k_2 = 0$. Пусть мы хотим получить корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Тогда полином должен иметь вид $\lambda^2 + 2\lambda + 1$ и тогда k_1=-2; k_2=8.

Если корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$. Тогда полином должен иметь вид $\lambda^2 + 8\lambda + 16$ и тогда k_1=4; k_2=-1.

Объект $\dfrac{2}{S\cdot(S^2+4\cdot S+1)}$ **. Дифференциальное уравнение** $y'''+4y''+y'=2u$ **. Измеряется y(t).**

$$x_1=y;\quad x_2=x_1'=y';\quad x_3=x_2'=y''.\quad \begin{cases} x_1'=x_2\\ x_2'=x_3\\ x_3'=-x_2-4x_3+2u\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-1&-4\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix};\quad K=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}.$$

$$M=\begin{bmatrix}C\\C\cdot A\\C\cdot A^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.\ \det(M)=1\neq 0$$ **. Система наблюдаема.**

$$W=\begin{bmatrix}B & A\cdot B & A^2\cdot B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&2&-8\\2&-8&30\end{bmatrix}.\quad \det(W)=-6\neq 0.$$

Система управляема.

ПОСТРОЕНИЕ НАБЛЮДАТЕЛЯ СОСТОЯНИЯ

$$A - K \cdot C - \lambda \cdot I = \begin{bmatrix} -k_1 - \lambda & 1 & 0 \\ -k_2 & -\lambda & 1 \\ -k_3 & -1 & -4-\lambda \end{bmatrix}. \quad \det(A - KC - \lambda I) =$$

$$-\lambda[\lambda^2 + \lambda(4 + k_1) + 4k_1] - k_3 - \lambda - k_1 - 4k_2 - \lambda \cdot k_2 = 0$$

$$\lambda^3 + \lambda^2(4 + k_1) + \lambda(4k_1 + 1 + k_2) + k_1 + 4k_2 + k_3 = 0. \quad \textbf{(1)}$$

Пусть все λ_i = -1. Тогда $(\lambda+1)^3 = 0.\ \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$. **(2)**

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ в (1) и (2) получим

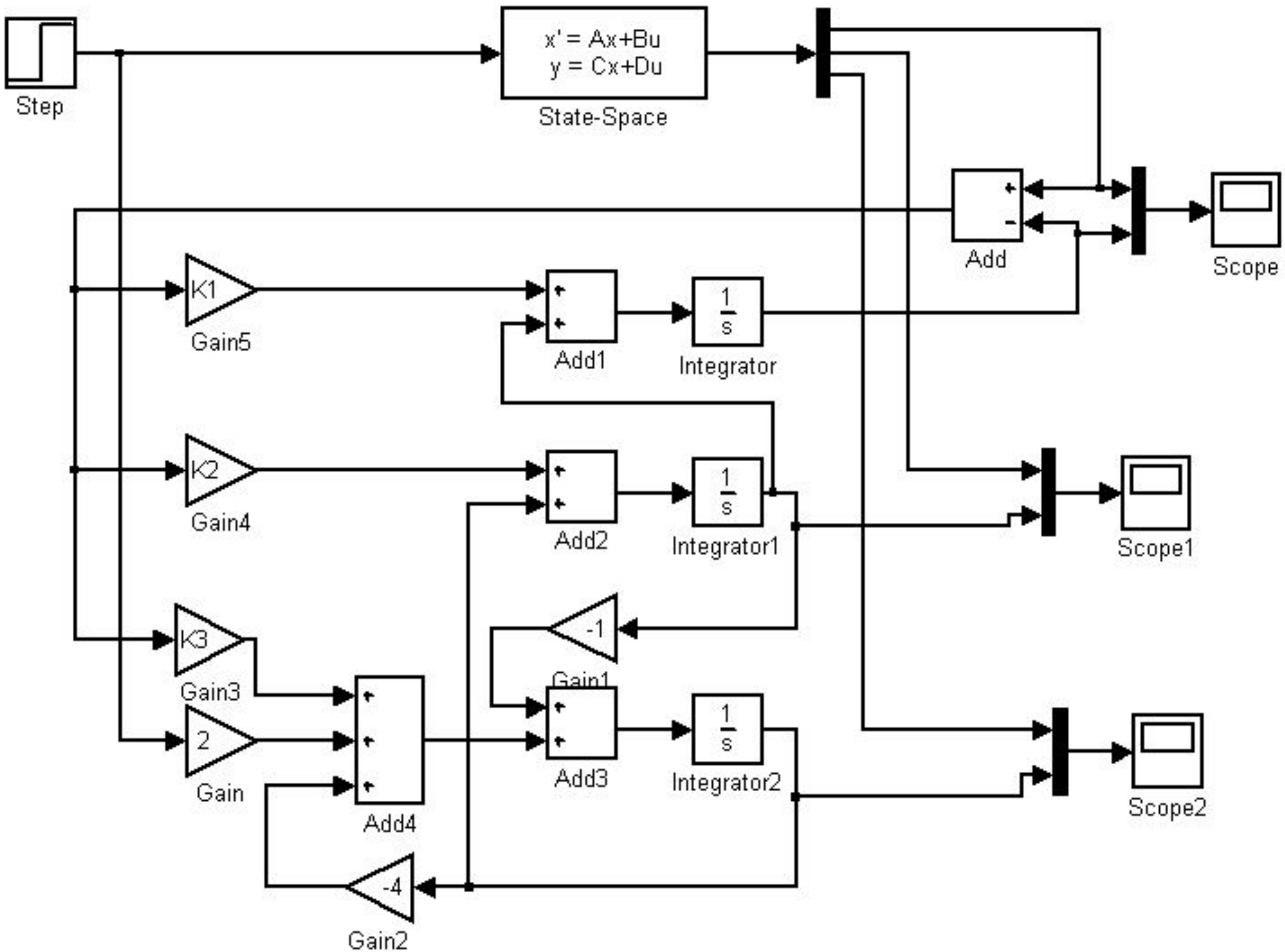
$$\begin{cases} 4 + k_1 = 3 \\ 4k_1 + 1 + k_2 = 3 \\ k_1 + 4k_2 + k_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 6 \\ k_3 = -22 \end{cases}$$

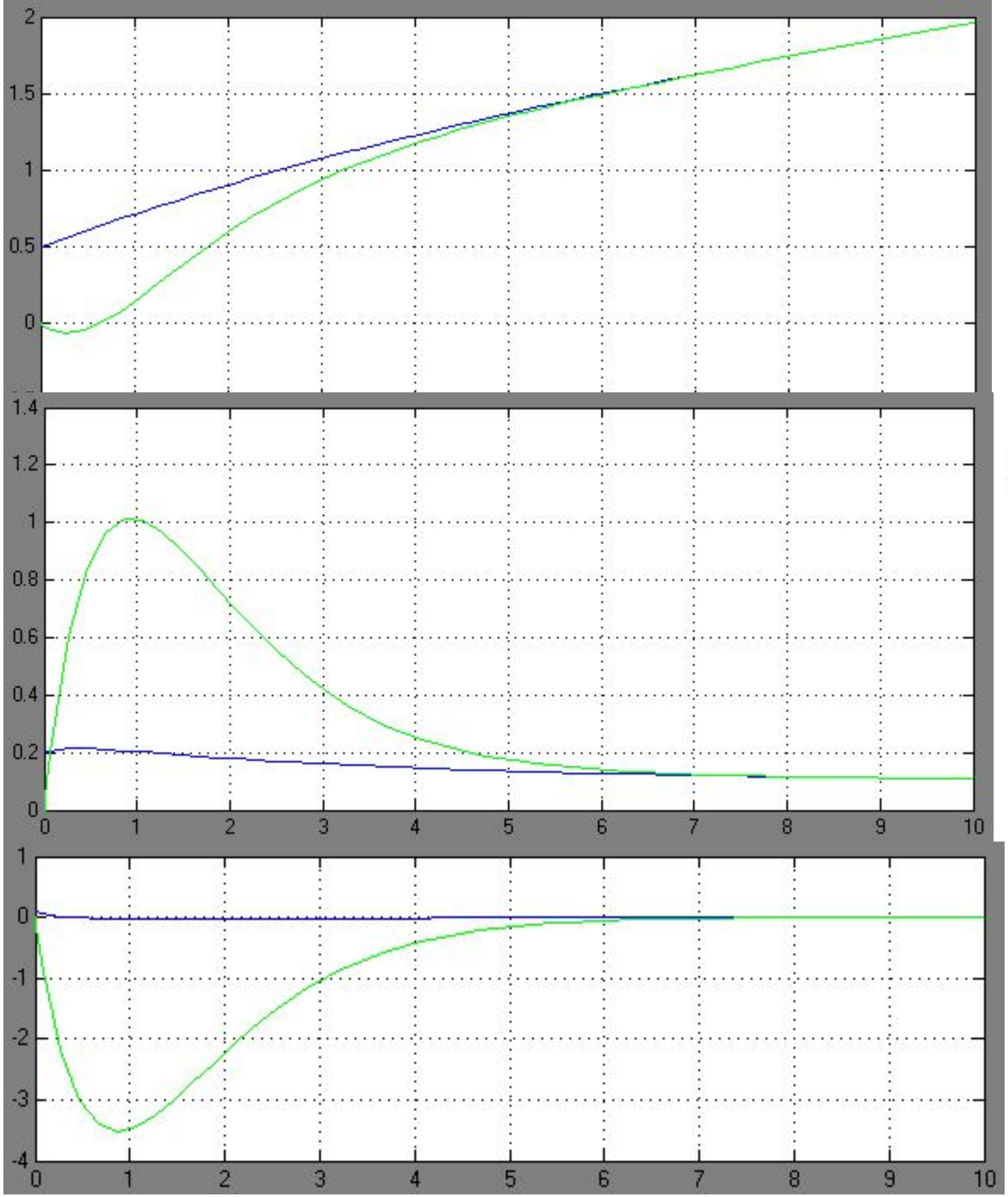
Пусть все λ_i = -2. Тогда $(\lambda+2)^3 = 0.\ \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = 0$. **(3)**

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ в (1) и (3) получим

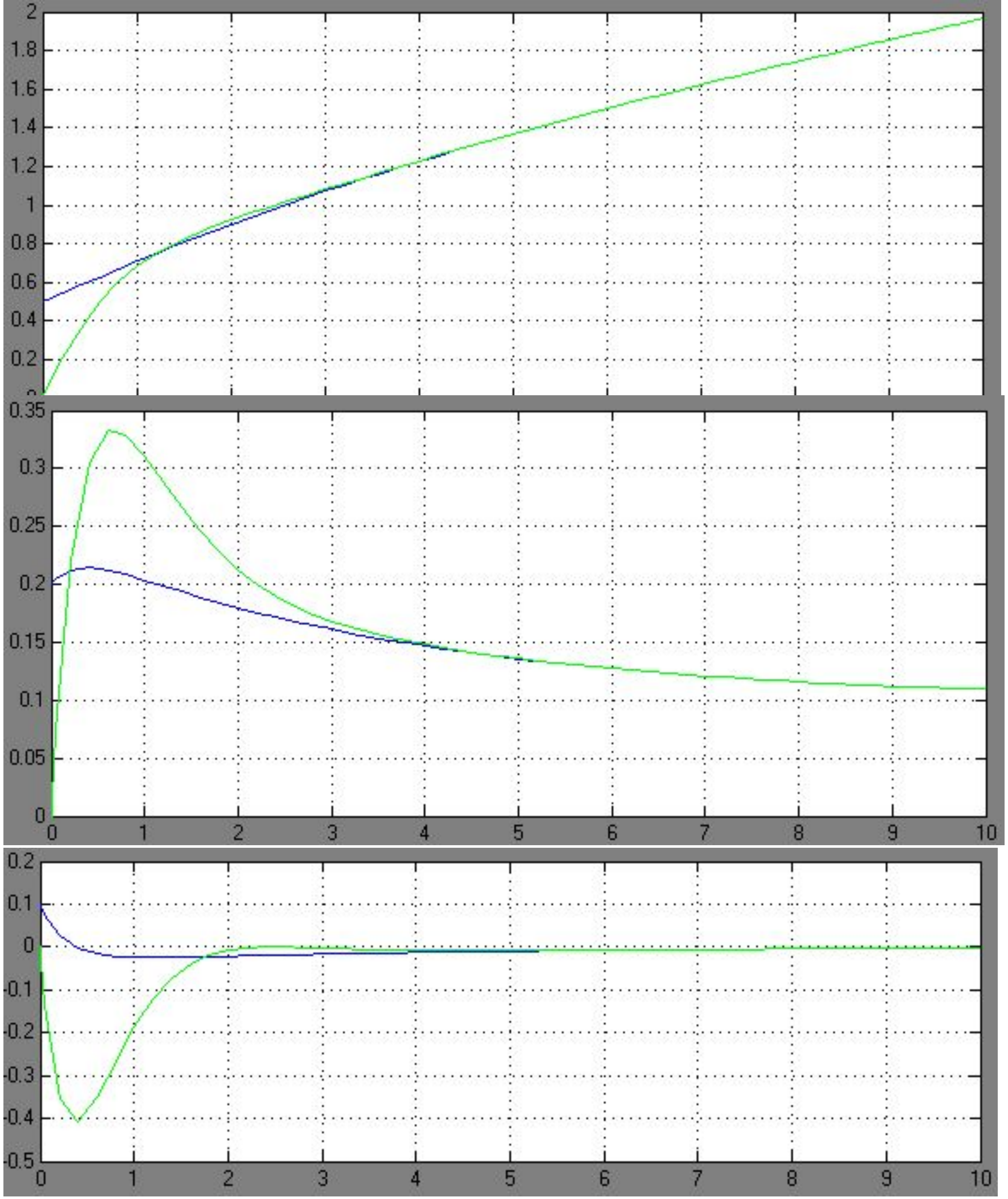
$$\begin{cases} 4 + k_1 = 6 \\ 4k_1 + 1 + k_2 = 12 \\ k_1 + 4k_2 + k_3 = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = 3 \\ k_3 = -6 \end{cases}$$

СИСТЕМА С НАБЛЮДАТЕЛЕМ В MATLAB





$$\lambda_i = -1; \quad k_1 = -1, \quad k_2 = 6, \quad k_3 = -22$$



$$\lambda_i = -2; \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 3, \quad k_3 = -6$$

Объект $\dfrac{2}{S\cdot(S^2+4\cdot S+1)}$ **. Дифференциальное уравнение**

$y''' + 4y'' + y' = 2u$ **. Измеряется** $y'(t)$ **.**

$x_1 = y; \quad x_2 = x_1' = y'; \quad x_3 = x_2' = y''$. $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = -x_2 - 4x_3 + 2u \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}.$$

$M = \begin{bmatrix} C \\ C\cdot A \\ C\cdot A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$. $\det(M) = 0$ **. Система не наблюдаема.**

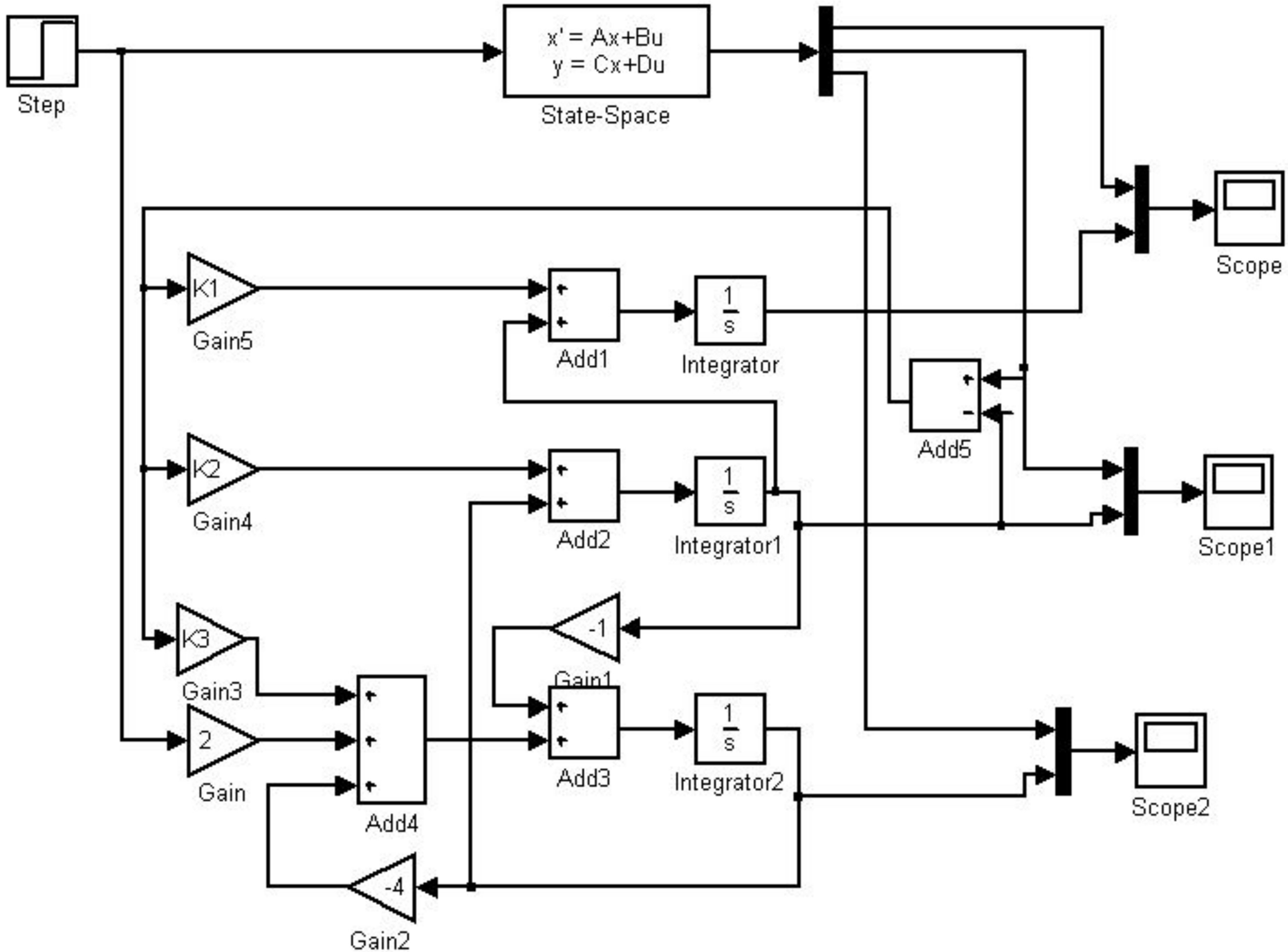
$W = \begin{bmatrix} B & A\cdot B & A^2\cdot B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \\ 2 & -8 & 30 \end{bmatrix}$. $\det(W) = -6 \neq 0$.

Система управляема.

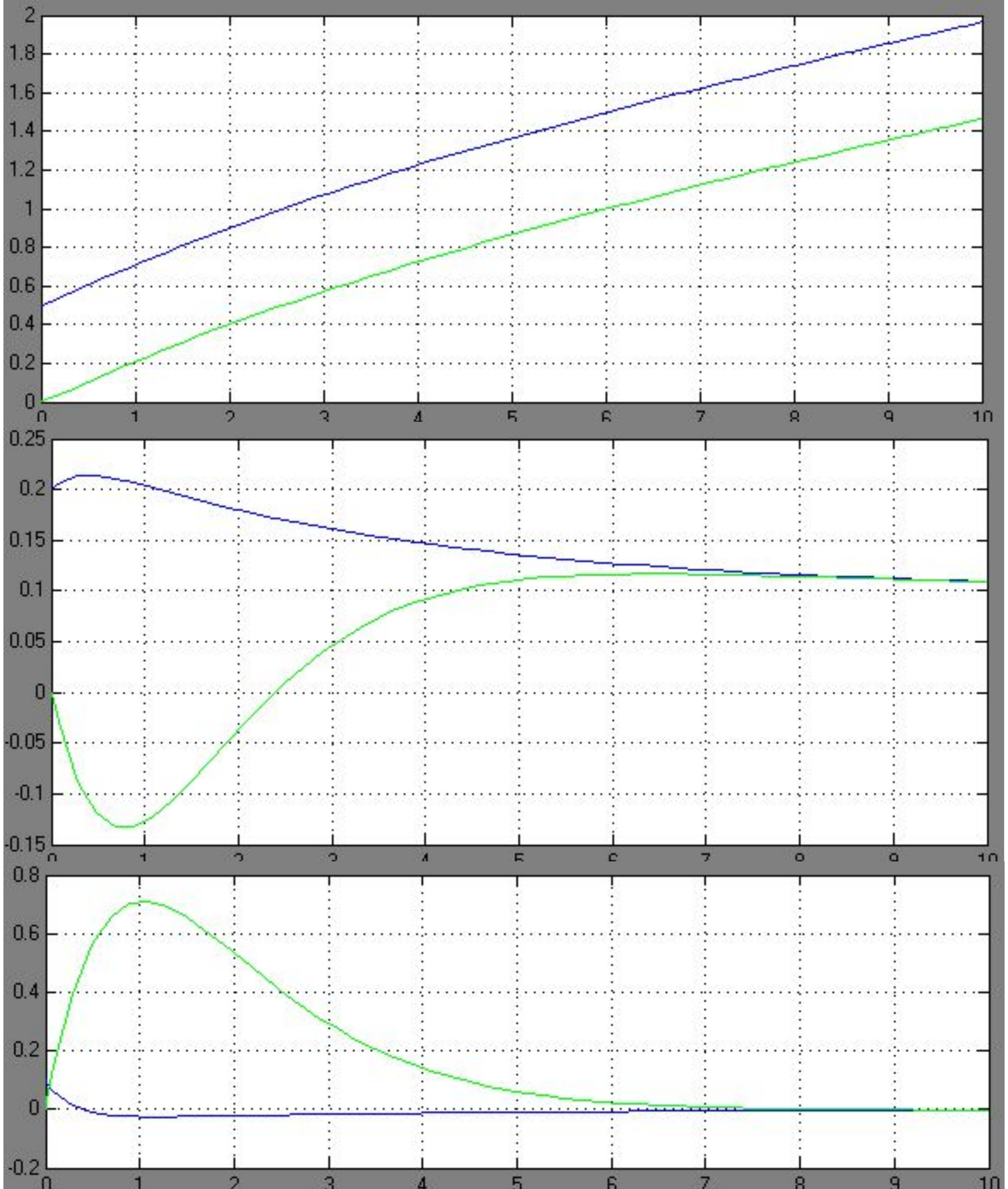
$A - K\cdot C - \lambda\cdot I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1-k_1 & 0 \\ 0 & -\lambda - k_2 & 1 \\ 0 & -1-k_3 & -4-\lambda \end{bmatrix}$. $\det(A - KC - \lambda I) =$.

$-\lambda[\lambda^2 + \lambda(4+k_2) + 4k_2 + k_3 + 1] = 0 \quad \lambda_1 = 0. \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$

Тогда $(\lambda+1)^2 = 0.\ \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0;\ k_2 = -2;\ k_3 = 8$.



Step
x' = Ax+Bu
y = Cx+Du
State-Space
Scope
K1
Gain5
Add1
1
s
Integrator
Add5
K2
Gain4
Add2
Integrator1
Scope1
-1
Gain1
K3
Gain3
2
Gain
Add4
Add3
Integrator2
Scope2
-4
Gain2



2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
-0.05
-0.1
-0.15
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

$$k_2 = -2; \quad k_3 = 8$$