

Векторный анализ

Выполнили: ст. гр. БУС-16-31
Богданов Э. Юрасов А.

Стерлитамак
2017г.

1. ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ. ВЕКТОРНЫЕ ЛИНИИ И ИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Определение 1.1. Векторным полем точки M называется векторная функция $\vec{a}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$ точки M вместе с областью ее определения.

Задание векторного пространственного поля равносильно заданию трех скалярных функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, являющихся проекциями вектора $\vec{a}(M)$ на координатные оси. Примерами векторных полей являются поле магнитной напряженности, поле сил тяготения, поле скоростей установившегося потока жидкостей и т.д.

Определение 1.2. Векторной линией поля $\vec{a}(M)$ называется такая линия, в каждой точке которой касательная совпадает с направлением вектора $\vec{a}(M)$. Векторная линия обычно называется линией тока для поля скоростей, силовой линией – для силового поля.

Как известно, направляющие косинусы касательной пропорциональны дифференциалам dx , dy , dz . Для нахождения векторных линий поля $\vec{a}(M)$ векторов (dx, dy, dz) и $\vec{a}(M)$

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} \quad (1.1)$$

где P, Q, R - проекция вектора $\vec{a}(M)$ на координатные оси.

Уравнения (1.1) называются дифференциальными уравнениями векторных линий поля $\vec{a}(M)$. Если P, Q, R - непрерывно дифференцируемые функции и в точке M вектор $\vec{a}(M)$ отличен от нуля, то через точку M проходит одна определенная векторная линия поля $\vec{a}(M)$.

Пример 1.1. Найти векторные линии поля $\vec{a}(M) = y\vec{i} - x\vec{j}$.

Решение. Дифференциальные уравнения векторных линий имеют вид

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}, \quad dz = 0;$$

$x dx + y dy, dz = 0$. Интегрируя, получим $x^2 + y^2 = c_1^2$ и $z = c_2$, где c_1 и c_2 - произвольные постоянные. Векторными линиями являются окружности, расположенные в плоскостях, параллельных плоскости OXY и в самой плоскости OXY при $c_2 = 0$.

2. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ

Определение 2.1. Поток Π векторного поля \vec{a} через двустороннюю поверхность S называется поверхностный интеграл второго рода.

$$\Pi = \int \int_S \vec{a} n^0 ds = \int \int_S \vec{a}_n ds, \quad (2.1)$$

где n^0 - единичный вектор нормали к S , указывающей её ориентацию; ds - элемент площади поверхности S ; \vec{a}_n - проекция вектора \vec{a} на направление \vec{n} .

Дадим физическое истолкование формулы (2.1). Пусть \vec{V} - скорость жидкости, протекающей через произвольную (двустороннюю) поверхность S . Рассмотрим разбиение $\{S_k\}$ поверхности на n частей S_k с площадками ΔS_k . Тогда произведение $V_k n_k \Delta S_k$ равно количеству жидкости, протекающей через

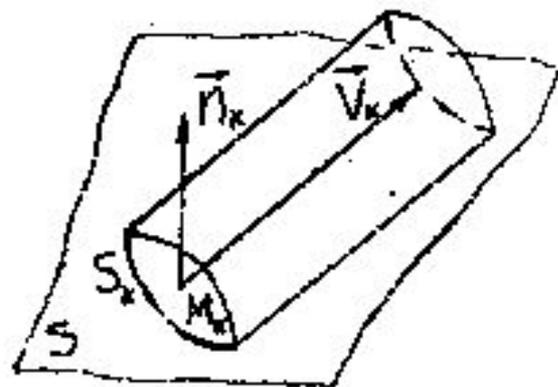


Рис.2.1

поверхность S_k за единицу времени в направлении вектора n_k (рис.2.1).

Интеграл $\iint_S \vec{V} n ds$, являющийся

пределом интегральной суммы

$$\sum_{k=1}^n \overline{V_k n_k \Delta S_k},$$

дает полное количество жидкости,

протекающей в единицу времени через S в положительном направлении. Пусть $\vec{a}(M)$ - поле скоростей в стационарном течении жидкости, так что ее скорость \vec{a} в точке M зависит лишь от M , но не зависит от времени. Из сказанного выше следует, что поток скорости через ориентированную поверхность S за единицу времени в том направлении, в котором ориентирована эта поверхность (физический смысл потока).

■ 2.1. Вычисление потока

■ 2.1.1. Вычисление методом проектирования на одну из координатных плоскостей

Пусть поверхность S задана уравнением $F(x, y, z) = 0$.

Единичный вектор нормали $\vec{n}^\sigma = \vec{n} / |\vec{n}|$, но, как известно,

$\vec{n} = \text{grad}F(x, y, z)$. Следовательно,

$$\vec{n} = \pm \text{grad}F(x, y, z) / |\text{grad}F(x, y, z)| =$$

$$= \pm \left(\frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k} \right) / \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2}.$$

Знак в правой части берется так, чтобы получить нормальный вектор \vec{n} именно к выбранной стороне поверхности.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то

$$\vec{n}^\sigma = \pm \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \vec{k} \right) / \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1}.$$

Знак «+» соответствует выбору верхней стороны поверхности, нормаль к которой образует острый угол с осью OZ и, следовательно, направляющий косинус положителен.

Известно также, что $\vec{n}^\sigma = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$ и $dS |\cos \gamma| = dx dy$.

Пусть поверхность S взаимно однозначно проектируется на плоскость OXY в область D_{xy} , тогда вычисление потока векторного поля через поверхность S сводится к вычислению двойного интеграла

$$\text{по области } D_{xy}: \Pi = \iint_S \overline{an}^\sigma dS = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{\overline{an}^\sigma}{|\cos \gamma|} \right|_{z=z(x,y)} dx dy \quad (2.2)$$

Аналогично, если поверхность S взаимно однозначно проектируется на плоскость OXY или OZX , то поток вычисляется по формулам

$$\Pi = \iint_{D_{yz}} \left. \frac{\overline{an}^\sigma}{|\cos \alpha|} \right|_{x=x(y,z)} dy dz; \quad \Pi = \iint_{D_{xz}} \left. \frac{\overline{an}^\sigma}{|\cos \beta|} \right|_{y=y(x,z)} dx dz$$

Пример 2.1. Найти поток векторного поля $\overline{a} = y\overline{i} - x\overline{j} + z\overline{k}$ через поверхность конуса $x^2 + y^2 = z^2$ и плоскость $z = 1$.

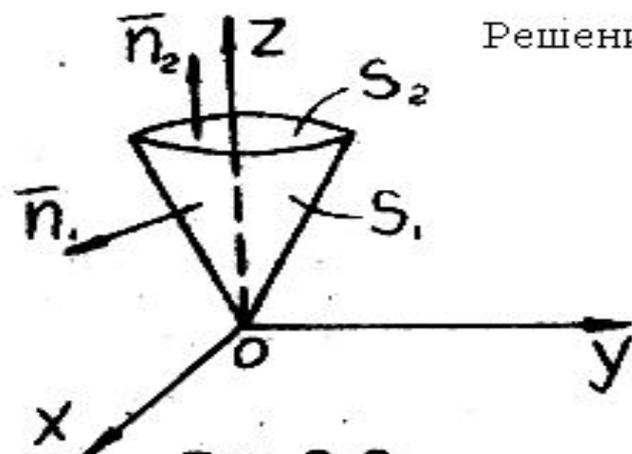


Рис. 2.2

Решение. Обозначим потоки векторного поля: Π_1 через боковую поверхность конуса (S_1) и Π_2 через плоскость $z = 1$ (S_2). Тогда весь поток $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 =$

$$= \iint_{S_1} \overline{an}_1^\sigma dS + \iint_{S_2} \overline{an}_2^\sigma dS.$$

Вычислим Π_1 . Уравнение $S_1: x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow F = x^2 + y^2 - z^2$.

Проекция вектора \bar{n}_1 на ось OZ отрицательна.

$$\bar{n}_1 = \text{grad}F = \text{grad}(x^2 + y^2 - z^2) = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} - 2z\bar{k};$$

$$\begin{aligned} \bar{n}_1^\sigma &= 2(x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}) / 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \\ &= (x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}) / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

$$\cos \alpha_1^\sigma = \frac{xy - xy - z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{z^2 = x^2 + y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} = -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{2}}.$$

Из выражения для (2.2.) найдем

$$|\cos \gamma| = \frac{|-z|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\Pi_1 = \iint_{S_1} \overline{an_1^\sigma} dS = \iint_{D_{xy}} \frac{-\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{2}} \sqrt{2} dx dy = - \int_0^{2\pi} d\theta \int \rho^2 d\rho = -\frac{2}{3}\pi.$$

Вычислим Π_2 . Уравнения поверхности S_2 : $z = 1$, $\overline{n_2^\sigma} = \overline{k}$, $\overline{a} \cdot \overline{n_2^\sigma} = z = 1$ (На поверхности S_2),

$$\Pi_2 = \iint_{S_2} \overline{an_2^\sigma} dS = \iint_D 1 dx dy = \pi R^2 = \pi.$$

Следовательно, $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -2/3\pi + \pi = 1/3\pi$.

2.1.2. Вычисление потока методом проектирования на все три координатные плоскости

Пусть поверхность S взаимно однозначно проектируется на все три координатные плоскости:

$$\begin{aligned}\overline{an}^{\sigma} &= (P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{k})(\cos\alpha\bar{i} + \cos\beta\bar{j} + \cos\gamma\bar{k}) = \\ &= P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma.\end{aligned}$$

Тогда поток векторного поля \bar{a} равен

$$\begin{aligned}\Pi &= \iint_S \overline{an}^{\sigma} dS = \iint_S (P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma) dS = \\ &= \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dy dz \pm \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy \pm \iint_{D_{xz}} Q[x, y(x, z), z] dx dz,\end{aligned}\quad (2.3.)$$

где знак перед каждым из двойных интегралом берется соответственно таким, каков знак $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ на поверхности S .

Пример 2.3. Найти поток векторного поля

$\bar{a} = (x - 2z)\bar{i} + (x + 3y + z)\bar{j} + (5x + y)\bar{k}$ через треугольник, получаемый при пересечении плоскости $x + y + z = 1$ с координатными плоскостями (выбор указан на рис. 2.5).

Решение. Найдем P, Q, R . $P[x(y,z), y, z] = (1-y-z) - 2z = 1-y-3z$

(выразили из уравнения плоскости)

$$Q[x, y(x, z), z] = x + 3(1-x-z) + z = 3 - 3x - 2z.$$

$$R[x, y, z(x, y)] = 5x - y.$$

По формуле (2.3) получим

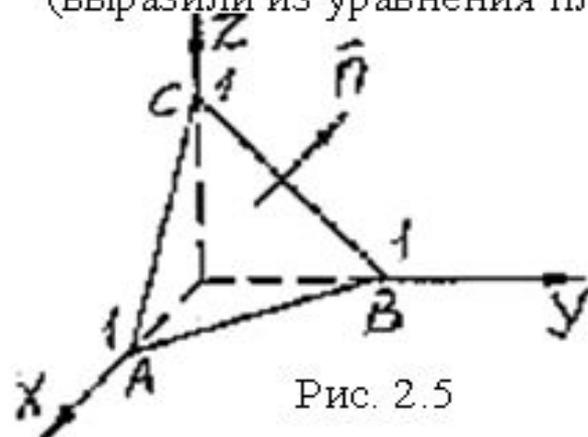


Рис. 2.5

$$\Pi = \iint_{OBC} (1-y-3z) dy dz + \iint_{AOC} (3-2x-2z) dx dz +$$

$$+ \iint_{AOB} (5x+y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1-y-3z) dz + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (3-2x-2z) dz +$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (5x+y) dy = \int_0^1 \left[(1-y)z - 3\frac{z^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-y)^2 dy +$$

$$+ \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_0^1 \left[5x - 5x^2 + (1-x)^2 / 2 \right] dx = \frac{5}{3}.$$

При вычислении потока векторного поля через боковую поверхность кругового цилиндра или через сферу удобно пользоваться соответственно цилиндрическими или сферическими координатами.

■ 2.1.3. Вычисление потока методом введения криволинейных координат на поверхности

В некоторых случаях при вычислении потока векторного поля через данную поверхность S возможно выбрать на самой поверхности простую систему координат, в которой удобно вычислять поток, не применяя проектирования на координатные плоскости.

Рассмотрим частные случаи.

Случай 1). Пусть поверхность S является частью кругового цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченного поверхностями $z = f_1(x, y)$ и $z = f_2(x, y)$.

Полагая $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $z = z$, будем иметь для данной поверхности $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,

$f_1(R \cos \varphi, R \sin \varphi) \leq z \leq f_2(R \cos \varphi, R \sin \varphi)$, а для элемента площади dS получаем следующее выражение (рис. 2.6.):

$$dS = R d\varphi dz.$$

Тогда поток векторного поля \mathbf{a} через внешнюю сторону поверхности S вычисляется по формуле

$$\Pi = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{f_1(R \cos \varphi, R \sin \varphi)}^{f_2(R \cos \varphi, R \sin \varphi)} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) dz, \quad (2.4)$$

где

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\text{grad}(x^2 + y^2 - R^2)}{|\text{grad}(x^2 + y^2 - R^2)|} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{R}.$$

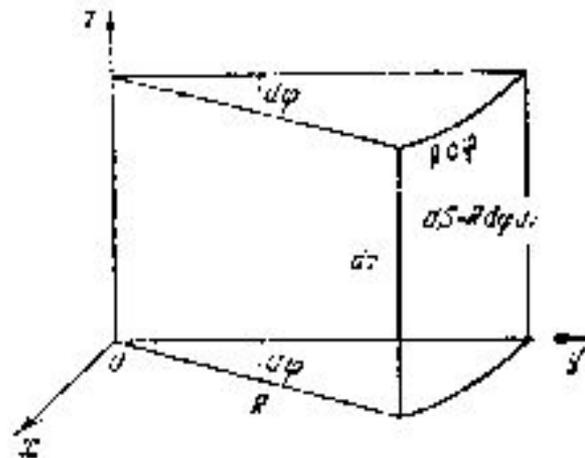


Рис. 2.6

Пример 2.5. Вычислить поток радиуса-вектора $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через боковую поверхность кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, ограниченного снизу плоскостью $x + y + z = 1$, а сверху – плоскостью $x + y + z = 2$.

Решение. В данном случае (рис. 2.7) имеем $R = 1$, $f_1(x, y) = 1 - x - y$, $f_2(x, y) = 2 - x - y$.

Переходя к координатам на цилиндре $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, $z = z$, будем иметь

$$f_1(x, y) = 1 - \cos \varphi - \sin \varphi,$$

$$f_2(x, y) = 2 - \cos \varphi - \sin \varphi.$$

Согласно формуле (2.4) поток вектора \mathbf{r} будет равен

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1-\cos \varphi - \sin \varphi}^{2-\cos \varphi - \sin \varphi} (\mathbf{r}, \mathbf{n}^0) dz.$$

Но так как на цилиндре $x^2 + y^2 = 1$

$$\mathbf{n}^0 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \cos \varphi \cdot \mathbf{i} + \sin \varphi \cdot \mathbf{j},$$

то $(\mathbf{r}, \mathbf{n}^0) = x^2 + y^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$

и, следовательно, $\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1-\cos \varphi - \sin \varphi}^{2-\cos \varphi - \sin \varphi} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$.

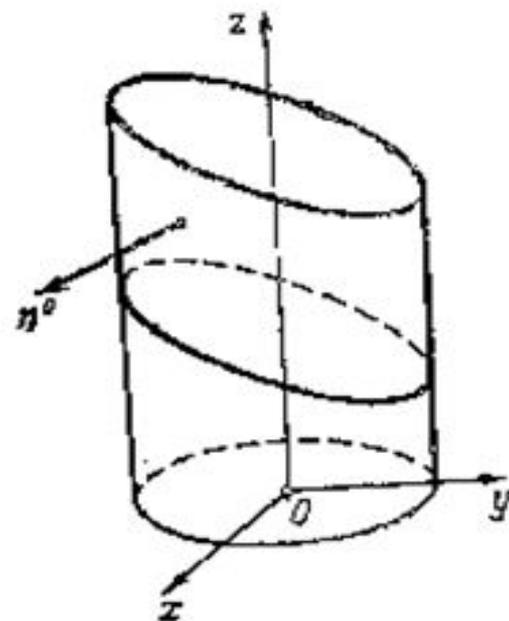
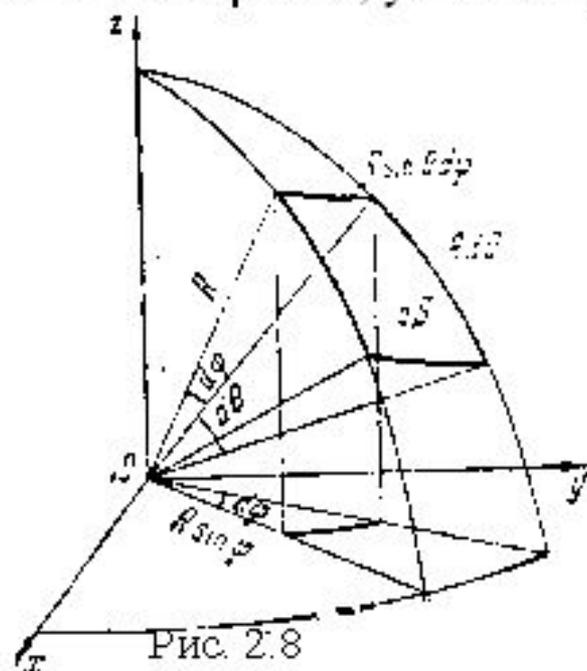


Рис. 2.7

Случай 2). Пусть поверхность S является частью сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, ограниченной коническими поверхностями, уравнения которых в сферических координатах имеют вид $\theta = f_1(\varphi)$, и полуплоскостями $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$.

Положим для точек данной сферы
 $x = R \cos \varphi \sin \theta, y = R \sin \varphi \sin \theta, z = R \cos \theta,$



где $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.

Тогда для элемента площади dS получим (рис. 2.7)

$$ds = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

В этом случае поток векторного поля \mathbf{a} через внешнюю часть S сферы вычисляется по формуле

$$\Pi = R^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (2.5)$$

где

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\text{grad}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)}{|\text{grad}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)|} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{R}.$$

3. ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО

3.1. Вычисление дивергенции

Определение 3.1. Отношение потока векторного поля через поверхность S к величине объема V называется средней объемной плотностью потока векторного поля.

В поле скоростей жидкости это отношение при $\Pi > 0$ определяет среднее количество жидкости, поступающей из единицы объема внутри поверхности S за единицу времени. При $\Pi < 0$ определяет среднее количество жидкости, поглощаемой единицей объема за единицу времени.

Определение 3.2. Дивергенцией (или расходимостью) векторного поля $\bar{a}(M) = P(M)\bar{i} + Q(M)\bar{j} + R(M)\bar{k}$ называется объемная

плотность потока векторного поля \bar{a} в этой точке: $div\bar{a}(M) = \lim_{S \rightarrow M} \frac{1}{V} \iint_S \bar{a} \bar{n}^o dS$,

где V -объем, ограниченный замкнутой поверхностью S , содержащей точку M .

Если координаты вектора $\bar{a}(M)$ непрерывны вместе со своими частными производными P'_x , Q'_y , R'_z , то в декартовой системе координат дивергенция вычисляется по формуле $div\bar{a}(M) = P'_x(x, y, z) + Q'_y(x, y, z) + R'_z(x, y, z)$, (3.1) где частные производные вычислены в точке M .

Пример 3.1. Вычислить дивергенцию поля радиус-вектора $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

Решение. $div\bar{r} = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3 > 0$.

Следовательно, в каждой точке поля радиус-вектора имеется источник, плотность которого равна трем единицам.

3.2. Формула Остроградского в векторной форме

Равенство (3.1) позволяет записать формулу Остроградского в векторной форме.

Если учесть, что
$$\iint_S \bar{a} n^{\sigma} dS = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \quad (3.1)$$

является потоком векторного поля, тогда равенство

$$\iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$
 примет следую-

щий вид:
$$\Pi = \iint_S \bar{a} n^{\sigma} dS = \iiint_V \operatorname{div} \bar{a} dV. \quad (3.2)$$

Физический смысл формулы Остроградского заключается в том, что, если $\bar{V} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ - вектор скорости жидкости, протекающей через тело V , тогда подынтегральное выражение в правой части равенства (3.2) дает полное количество жидкости, вытекающей из тела V или через поверхность S за единицу времени (или втекающей в тело V , если интеграл отрицателен). Если дивергенция равна нулю, то количество жидкости, втекающей внутрь тела, равно количеству жидкости, вытекающей из него.

Формула (3.2) позволяет упростить вычисления потоков через замкнутую поверхность.

Пример 3.2. Вычислить поток поля $\vec{a} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + \frac{z^3}{3}\vec{k}$ через полную по-

верхность цилиндра

$$x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq H.$$

Решение. Найдем дивергенцию

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z^3}{3}\right) = y^2 + x^2 + z^2.$$

По формуле (3.2)

$$\Pi = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV.$$

Перейдем к циклическим координатам, тогда

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho d\rho \int_0^H (\rho^2 + z^2) dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \left(\rho^3 H + \rho \frac{H^3}{3} \right) d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^4}{4} H + \frac{R^2}{2} \cdot \frac{H^3}{3} \right) d\theta = \frac{R^2 H}{2} \left(\frac{R^2}{2} + \frac{H^2}{3} \right) 2\pi = \frac{\pi R^2 H}{3} (3R^2 + 2H^2). \end{aligned}$$

4. ЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ В ВЕКТОРНОМ ПОЛЕ. ЦИРКУЛЯЦИЯ. ПЛОТНОСТЬ ЦИРКУЛЯЦИИ

4.1. Определение и вычисление циркуляции

Пусть L -пространственная кусочно-гладкая направленная линия и $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ - непрерывное векторное поле, заданное в $L \in T \in R^3$, где $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ - проекции $\vec{a}(M)$ на координатные оси.

Определение 4.1.1. Криволинейный интеграл вида

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz ,$$

взятый по некоторой направленной линии L , называется линейным интегралом от вектора \vec{a} вдоль линии L .

Пример 4.1. Вычислить работу силового поля

$F = yi + xj + (x + y + z)k$ вдоль отрезка AB прямой, проходящей через точки $M_1(2,3,4)$ и $M_2(3,4,5)$.

Решение. Работа данного силового поля будет равна линейному интегралу вдоль отрезка M_1M_2 : $A = \int_{M_1M_2} (F, dr) = \int_{M_1M_2} ydx + xdy + (x + y + z)dz$.

Находим канонические уравнения прямой M_1M_2 . Имеем $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{1}$.

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} y &= x + 1, \\ z &= x + 2, \end{aligned} \right\}$$

$$dy = dx, dz = dx.$$

Здесь x изменяется в пределах от 2 до 3 (так как абсцисса точки M_1 равна 2, а абсцисса точки M_2 равна 3). Искомая работа будет равна

$$A = \int_2^3 (x + 1 + x + x + x + 1 + x + 2) dx = \int_2^3 (5x + 4) dx = \frac{33}{2}.$$

Определение 4.1.2. Циркуляцией векторного поля $\vec{a} = (P, Q, R)$ по замкнутой линии L в области $T \in R^3$ называется линейный интеграл по этой замкнутой линии L , обозначаемый через \oint и определяемый формулой $\oint \vec{a} d\vec{r}$, где $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ - вектор-дифференциал.

В том случае, когда \vec{a} - силовое поле, линейный интеграл от вектора \vec{a} равен работе сил поля при перемещении тока по линии L (физический смысл циркуляции).

Найдем скалярное произведение векторов $\vec{a}(M)$ и $d\vec{r}$. Вектор $d\vec{r}$ направлен по касательной к кривой L .

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = P(x, y, z)dx - Q(x, y, z)dy - R(x, y, z)dz.$$

Тогда циркуляция принимает вид

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

4.2. Плотность циркуляции векторного поля

Пусть в векторном поле $\vec{a}(M)$ на поверхности S дан замкнутый контур L , заключающий в себе точку M (рис. 4.2).

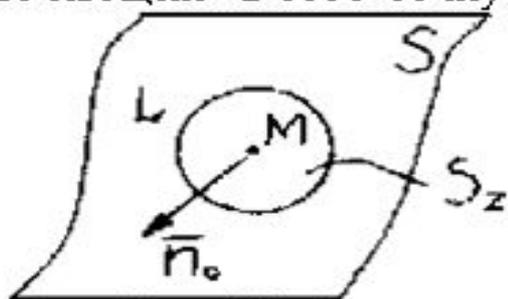


Рис. 4.3

\vec{n}^σ - единичный вектор нормали к поверхности S в т. M ; $n^\sigma = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Пусть S_L - площадь поверхности, ограниченной контуром L .

Определение 4.2.1. Плотностью циркуляции в точке M называется предел отношения циркуляции к площади поверхности S при условии стягивания контура L к точке M .

$$\rho_{Ц} = \lim_{z \rightarrow M} \frac{1}{S_L} \oint_L \vec{a} d\vec{r}. \quad (4.2)$$

В проекциях плотность циркуляции выражается в виде

$$\rho_{Ц} = \lim_{z \rightarrow M} \frac{1}{S_L} \oint_L P dx + Q dy + R dz.$$

Если подынтегральное выражение преобразовать по формуле Стокса, то получим

$$\rho_{Ц}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma. \quad (4.3)$$

Частные производные вычислены в данной точке M .

5. РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ТЕОРЕМА СТОКСА В ВЕКТОРНОЙ ФОРМЕ

Определение 5.1. Ротор (или вихрь) векторного поля точки M обозначается $rot\bar{a}(M)$

и определяется формулой $rot\bar{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k}$, (5.1)

где частные производные вычислены в точке M .

Для лучшего запоминания этот вектор можно записать в виде следующего сим-

волического определителя: $rot\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ (5.2)

Смысловое определение ротора вытекает из его связи с плотностью циркуляции поля; сравнивая формулы (4.3) и (5.1), можно записать

$$\rho_{\Omega} = rot\bar{a} \cdot \bar{n} = |rot\bar{a}| |\bar{n}^{\sigma}| \cos \left(rot\bar{a}, \bar{n}^{\sigma} \right) = |rot\bar{a}| \cos(rot\bar{a}, \bar{n}^{\sigma}).$$

Если значение косинуса равно 1, то из последнего равенство $\max(\rho_{\Omega}) = |rot\bar{a}|$.

Таким образом, плотность циркуляции в точке M будет наибольшей в направлении ротора и равна его численному значению. Физический смысл ротора в поле скоростей \bar{V} заключается в том, что ротор представляет собой мгновенную угловую скорость вращения тела.

Пример 5.1. Найти ротор векторного поля $\vec{a}(x, y, z) = z^2 \vec{i} + x^2 \vec{j} + y^2 \vec{k}$.

Решение. Используя формулу (5.1), найдем проекции ротора

$$\text{rot}_x \vec{a} = \frac{\partial(y^2)}{\partial y} - \frac{\partial(x^2)}{\partial z} = 2y ;$$

$$\text{rot}_y \vec{a} = \frac{\partial(z^2)}{\partial z} - \frac{\partial(y^2)}{\partial x} = 2z ;$$

$$\text{rot}_z \vec{a} = \frac{\partial(x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(z^2)}{\partial y} = 2x .$$

Следовательно, $\text{rot} \vec{a} = 2y \vec{i} + 2z \vec{j} + 2x \vec{k}$.

С помощью введ. $\text{rot} \vec{a}$ можно записать формулу Стокса в векторной форме. Так как

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma$$

следовательно, в векторной форме это равенство имеет вид $\oint_L \vec{a} d\vec{r} = \iint_S \text{rot} \vec{a} \cdot \vec{n} dS$. (5.3)

Итак, поток вектора $\text{rot} \vec{a}$ через ориентированную поверхность S равен циркуляции вектора \vec{a} вдоль положительного направления обхода контура L этой поверхности.

6. КЛАССИФИКАЦИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

6.1. Безвихревое поле

Определение 6.1. Векторное поле, ротор которого тождественно равен нулю, называется безвихревым.

Теорема 6.1. Для того, чтобы векторное поле, заданное в односвязной области, было безвихревым, необходимо и достаточно, чтобы циркуляция по любому замкнутому контуру, лежащему в этой области, равнялась нулю.

6.2. Потенциальное поле

Определение 6.2. Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется потенциальным, если оно является градиентом некоторого скалярного поля

$U(x, y, z)$.

Теорема 6.2. Для того, чтобы векторное поле, заданное в односвязной области, было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы в этой области оно было безвихревым. Из данной теоремы следует условие потенциальности векторного поля

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (6.1)$$

Потенциал поля находится по формуле

$$U(M) = \int_{M_0}^M P dx + Q dy + R dz,$$

где M_0M – произвольный путь интегрирования от точки M_0 до точки M .

Обычно в качестве такого пути выбирают ломанную $M_0M_1M_2M$, звенья которой параллельны осям координат. В этом случае формула для вычисления потенциала имеет вид

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz. \quad (6.2)$$

6.3. Соленоидальные поля

Определение 6.3. Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется соленоидальным в области T , если дивергенция равна нулю в каждой точке

области, т.е. $\operatorname{div} \vec{a} = 0$. Соленоидальное поле также называют трубчатым. Векторные линии его уходят в бесконечность или замкнуты.

Если выделить в поле векторную трубку часть пространства, ограниченного векторными линиями (рис. 6.3.1), пересечь трубку двумя поперечными сечениями и вычислить поток поля через замкнутую поверхность, образованную сечениями S_1 и S_2 и частью боковой поверхности трубки, то можно показать (используя теорему Остроградского),

что поток соленоидального поля через любое поперечное сечение векторной трубки имеет одно и то же значение.

Теорема 6.3. Для того, чтобы векторное поле \vec{a} было в области T соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы поток этого поля через любую замкнутую поверхность область T был равен нулю.

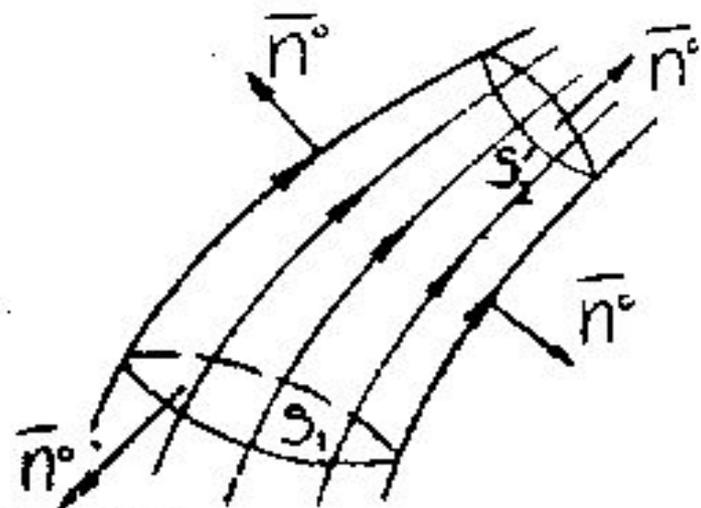


Рис. 6.3.1

Пример 6.3.1. Будет ли векторное поле $\vec{a} = (4x - 3yz)\vec{i} + (4y - 3xz)\vec{j} + (4z - 3xy)\vec{k}$ потенциальным или соленоидальным? Найти потенциал поля, если оно является потенциальным.

Решение. Проверим условие соленоидальности поля, т.е. $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ во всех точках

поля.
$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(4x - 3yz) + \frac{\partial}{\partial y}(4y - 3xz) + \frac{\partial}{\partial z}(4z - 3xy) = 12 \neq 0$$

Поле не является соленоидальным.

Вычислим ротор поля:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4x - 3yz & 4y - 3xz & 4z - 3xy \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = (-3x + 3x)\vec{i} - \vec{j}(-3y + 3y) + \vec{k}(-3z + 3z) = 0.$$

По формуле (6.2) найдем потенциал поля:

$$U(x, y, z) = \int_{\Gamma} (4x - 3yz)dx + (4y - 3xz)dy + (4z - 3xy)dz.$$

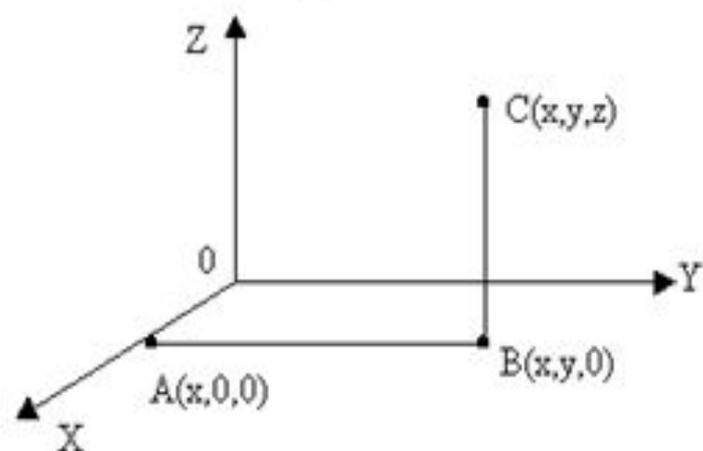


Рис. 6.3.2

В каждом пути интегрирования Γ возьмем ломаную $OABC$ (рис. 6.3.2), точка O совпадает с начальной координатой $O(0,0,0)$.

$$U(x, y, z) = \int_0^x 4x dx + \int_0^y 4y dy +$$

$$+ \int_0^z (4z - 3xy) dz =$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 3xyz$$