Векторный анализ

Выполнили: ст. гр. БУС-16-31
Богданов Э. Юрасов А.

Стерлитамак
2017г.

1.ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ. ВЕКТОРНЫЕ ЛИНИИ И ИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Определение 1.1. Векторным полем точки М называется векторная функция $\bar{a}(M) = P(M)\bar{i} + Q(M)\bar{j} + R(M)\bar{k}$ точки М вместе с областью ее определения.

Задание векторного пространственного поля равносильно заданию трех скалярных функций $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, являющихся проекциями вектора $\vec{a}(M)$ на координатные оси. Примерами векторных полей являются поле магнитной напряженности, поле сил тяготения, поле скоростей установившегося потока жидкостей и т.д.

Определение 1.2. Векторной линией поля $\vec{a}(M)$ называется такая линия, в каждой точке которой касательная совпадает с направлением вектора $\vec{a}(M)$. Векторная линия обычно называется линией тока для поля скоростей, силовой линией – для силового поля.

Как известно, направляющие косинусы касательной пропорциональны дифференциалам dx, dy, dz. Для нахождения векторных линий поля $\vec{a}(M)$ векторов (dx, dy, dz) и $\vec{a}(M)$

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} \qquad (1.1)$$

где P, Q, R - проекция вектора $\vec{a}(M)$ на координатные оси.

Уравнения (1.1) называются дифференциальными уравнениями векторных линий поля $\vec{a}(M)$. Если P, Q, R - непрерывно дифференцируемые функции и в точке М вектор $\vec{a}(M)$ отличен от нуля, то через точку М проходит одна определенная векторная линия поля $\vec{a}(M)$.

Пример 1.1. Найти векторные линии поля $\vec{a}(M) = y\vec{i} - x\vec{j}$.

Решение. Дифференциальные уравнения векторных линий имеют вид $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0}$ или $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$, $dz = 0$;

$xdx + ydy$, $dz = 0$. Интегрируя, получим $x^2 + y^2 = c_1^2$ и $z = c_2$, где c_1 и c_2 - произвольные постоянные. Векторными линиями являются окружности, расположенные в плоскостях, параллельных плоскости OXY и в самой плоскости OXY при $c_2 = 0$.

2.ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ

Определение 2.1. Потоком П векторного поля $\vec{a}$ через двустороннюю поверхность S называется поверхностный интеграл второго рода.

$$\Pi = \iint_s \vec{a}\vec{n}^0 ds = \iint_s \overline{a_n} ds, \qquad (2.1)$$

где n^0 - единичный вектор нормали к S, указывающей её ориентацию; ds - элемент площади поверхности S; a_n - проекция вектора $\vec{a}$ на направление $\vec{n}$.

Дадим физическое истолкование формулы (2.1). Пусть $\vec{V}$ - скорость жидкости, протекающей через произвольную (двустороннюю) поверхность S. Рассмотрим разбиение $\{S_k\}$ поверхности на n частей S_k с площадками ΔS_k. Тогда произведение $\vec{V}_k \vec{n}_k \Delta S_k$ равно количеству жидкости, протекающей через поверхность S_k за единицу времени в направлении вектора $\vec{n}_k$ (рис.2.1).

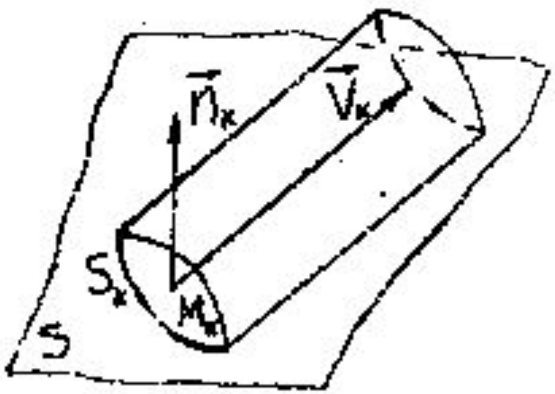

Рис.2.1

Интеграл $\iint\limits_S \vec{V}\vec{n}ds$, являющийся пределом интегральной суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{V_k}\,\overline{n_k}\Delta S_k$, дает полное количество жидкости, протекающей в единицу времени через S в положительном направлении. Пусть $\vec{a}(M)$ - поле скоростей в стационарном течении жидкости, так что ее скорость $\vec{a}$ в точке М зависит лишь от М, но не зависит от времени. Из сказанного выше следует, что поток скорости через ориентированную поверхность S за единицу времени в том направлении, в котором ориентирована эта поверхность (физический смысл потока).

2.1. Вычисление потока

2.1.1. Вычисление методом проектирования на одну из координатных плоскостей

Пусть поверхность S задана уравнением $F(x,y,z)=0$.

Единичный вектор нормали $\overline{n^o}=\bar{n}/|\bar{n}|$, но, как известно,

$\bar{n}=gradF(x,y,z)$. Следовательно,

$$\bar{n}=\pm gradF(x,y,z)/|gradF(x,y,z)|=$$

$$=\pm\left(\frac{\partial F}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\bar{k}\right)\Bigg/\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

Знак в правой части берется так, чтобы получить нормальный вектор $\bar{n}$ именно к выбранной стороне поверхности.

Если поверхность задана уравнением $z=f(x,y)$, то

$$\overline{n^o}=\pm\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\bar{i}-\frac{\partial f}{\partial y}\bar{j}+\bar{k}\right)\Bigg/\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}.$$

Знак «+» соответствует выбору верхней стороны поверхности, нормаль к которой образует острый угол с осью OZ и, следовательно, направляющий косинус положителен.

Известно также, что $\overline{n^o}=\cos\alpha\bar{i}+\cos\beta\bar{j}+\cos\gamma\bar{k}$ и $dS|\cos\gamma|=dxdy$.

Пусть поверхность S взаимно однозначно проектируется на плоскость OXY в область D_{xy}, тогда вычисление потока векторного поля через поверхность S сводится к вычислению двойного интеграла по области D_{xy}:

$$\Pi = \iint\limits_{S} \bar{a}\overline{n^{o}}dS = \iint \frac{\bar{a}\overline{n^{o}}}{|\cos\gamma|}\Bigg|_{z=z(x,y)} dxdy \qquad (2.2)$$

Аналогично, если поверхность S взаимно однозначно проектируется на плоскость OXY или OZX, то поток вычисляется по формулам

$$\Pi = \iint\limits_{D_{YZ}} \frac{\bar{a}\overline{n^{o}}}{|\cos\alpha|}\Bigg|_{x=x(y,z)} dydz; \qquad \Pi = \iint\limits_{D_{XZ}} \frac{\bar{a}\overline{n^{o}}}{|\cos\beta|}\Bigg|_{y=y(x,z)} dxdz.$$

Пример 2.1. Найти поток векторного поля $\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + z\bar{k}$ через поверхность конуса $x^2 + y^2 = z^2$ и плоскость $z = 1$.

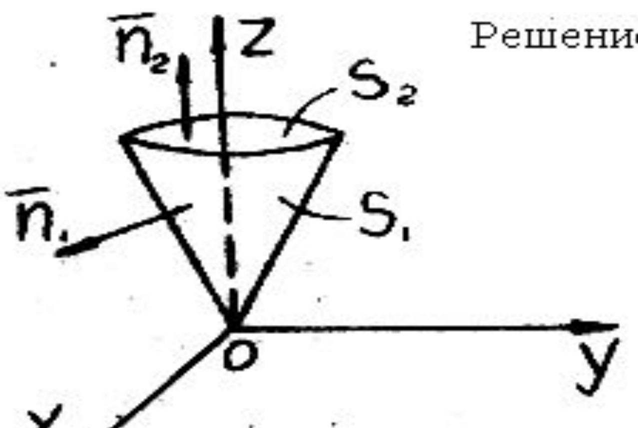

Рис.2.2

Решение. Обозначим потоки векторного поля: Π_1 через боковую поверхность конуса (S_1) и Π_2 через плоскость $z = 1(S_2)$.

Тогда весь поток $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 =$

$$= \iint\limits_{S_1} \bar{a}\overline{n_1^{o}}dS + \iint\limits_{S_2} \bar{a}\overline{n_2^{o}}dS.$$

Вычислим Π_1. Уравнение S_1: $x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow F = x^2 + y^2 - z^2$.

Проекция вектора $\overline{n_1}$ на ось OZ отрицательна.

$$\overline{n_1} = \mathrm{grad}F = \mathrm{grad}\left(x^2 + y^2 - z^2\right) = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} - 2z\bar{k};$$

$$\overline{n_1^o} = 2\left(x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}\right) / 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} =$$

$$= \left(x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}\right) / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$\bar{a}\overline{n_1^o} = \frac{xy - xy - z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\Bigg|_{z^2 = x^2 + y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{2\left(x^2 + y^2\right)}} = -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{2}}.$$

Из выражения для (2.2.) найдем

$$|\cos\gamma| = \frac{|-z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1} \overline{a}\,\overline{n_1^o}\,dS = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\,dxdy = -\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int \rho^2 d\rho = -\frac{2}{3}\pi.$$

Вычислим Π_2. Уравнения поверхности S_2: $z=1$, $\overline{n_2^o} = \overline{k}$, $\overline{a}\cdot\overline{n_2^o} = z = 1$ (На поверхности S_2),

$$\Pi_2 = \iint\limits_{S_2} \overline{a}\,\overline{n_2^o}\,dS = \iint\limits_{D} 1\,dxdy = \pi R^2 = \pi.$$

Следовательно, $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -2/3\,\pi + \pi = 1/3\,\pi$.

2.1.2. Вычисление потока методом проектирования на все три координатные плоскости

Пусть поверхность S взаимно однозначно проектируется на все три координатные плоскости:

$$\overline{a}\,\overline{n^o} = \left(P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{k}\right)\left(\cos\alpha\,\overline{i} + \cos\beta\,\overline{j} + \cos j\,\overline{k}\right) =$$
$$= P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma.$$

Тогда поток векторного поля $\overline{a}$ равен

$$\Pi = \iint\limits_{S} \overline{a}\,\overline{n^o}\,dS = \iint\limits_{S} \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right)dS =$$
$$= \pm\iint\limits_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]\,dydz \pm \iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\,dxdy \pm \iint Q[x,y(x,z),z]\,dxdz, \qquad (2.3.)$$

где знак перед каждым из двойных интегралом берется соответственно таким, каков знак $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ на поверхности S.

Пример 2.3. Найти поток векторного поля

$\overline{\mathrm{a}} = (\mathrm{x} - 2\mathrm{z})\overline{\mathrm{i}} + (\mathrm{x} + 3\mathrm{y} + \mathrm{z})\overline{\mathrm{j}} + (5\mathrm{x} + \mathrm{y})\overline{\mathrm{k}}$ через треугольник, получаемый при пересечении плоскости $x + y + z = 1$ с координатными плоскостями (выбор указан на рис. 2.5).

Решение. Найдем P, Q, R. $P[x(y,z),y,z]=(1-y-z)-2z=1-y-3z$

(выразили из уравнения плоскости)

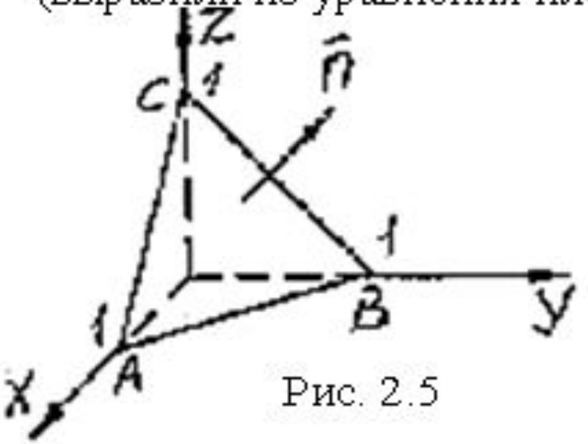

Рис. 2.5

$$Q[x, y(x,z), z] = x + 3(1 - x - z) + $$
$$+ z = 3 - 3x - 2z.$$
$$R[x, y, z(x,y)] = 5x - y.$$

По формуле (2.3) получим

$$\Pi = \iint\limits_{OBC} (1 - y - 3z)dydz + \iint\limits_{AOC} (3 - 2x - 2z)dxdz +$$

$$+ \iint\limits_{AOB} (5x + y)dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1 - y - 3z)dz + + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (3 - 2x - 2z)dz +$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (5x + y)dy = = \int_0^1 \left[(1-y)z - 3\frac{z^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)^2 dy +$$

$$+ \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)dx + \int_0^1 \left[5x - 5x^2 + (1-x)^2/2\right]dx = 5/3.$$

При вычислении потока векторного поля через боковую поверхность кругового цилиндра или через сферу удобно пользоваться соответственно цилиндрическими или сферическими координатами.

2.1.3. Вычисление потока методом введения криволинейных координат на поверхности

В некоторых случаях при вычислении потока векторного поля через данную поверхность S возможно выбрать на самой поверхности простую систему координат, в которой удобно вычислять поток, не применяя проектирования на координатные плоскости.

Рассмотрим частные случаи.

Случай 1). Пусть поверхность S является частью кругового цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченного поверхностями $z = f_1(x,y)$ и $z = f_2(x,y)$.

Полагая $x = R\cos\varphi, y = \sin\varphi, z = z$, будем иметь для данной поверхности $0 \le \varphi \le 2\pi$,

$f_1(R\cos\varphi, R\sin\varphi) \le z \le f_2(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$, а для элемента площади dS получаем следующее выражение (рис. 2.6.):

$$dS = R\,d\varphi\,dz.$$

Тогда поток векторного поля $\mathbf{a}$ через внешнюю сторону поверхности S вычисляется по формуле

$$\Pi = R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{f_1(R\cos\varphi, R\sin\varphi)}^{f_2(R\cos\varphi, R\sin\varphi)} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\,dz, \qquad (2.4)$$

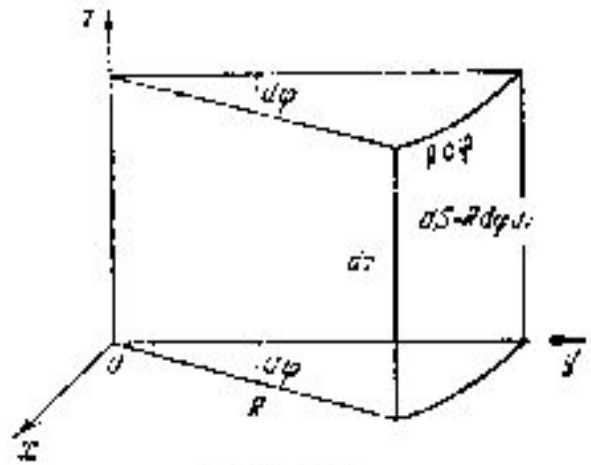

Рис. 2.6

где

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\operatorname{grad}(x^2 + y^2 - R^2)}{\left|\operatorname{grad}(x^2 + y^2 - R^2)\right|} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{R}.$$

Пример 2.5. Вычислить поток радиуса-вектора

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{i} + z\mathbf{k}$ через боковую поверхность кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, ограниченного снизу плоскостью $x + y + z = 1$, а сверху – плоскостью $x + y + z = 2$.

Решение. В данном случае (рис. 2.7) имеем

$R = 1, f_1(x, y) = 1 - x - y, f_2(x, y) = 2 - x - y$.

Переходя к координатам на цилиндре

$x = \cos\varphi, y = \sin\varphi, z = z$, будем иметь

$f_1(x, y) = 1 - \cos\varphi - \sin\varphi$,

$f_2(x, y) = 2 - \cos\varphi - \sin\varphi$.

Согласно формуле (2.4) поток вектора r будет равен

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1-\cos\varphi-\sin\varphi}^{2-\cos\varphi-\sin\varphi} (\mathbf{r}, \mathbf{n}^0)\,dz.$$

Но так как на цилиндре $x^2 + y^2 = 1$

$\mathbf{n}^0 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \cos\varphi \cdot \mathbf{i} + \sin\varphi \cdot \mathbf{j}$,

то $(\mathbf{r}, \mathbf{n}^0) = x^2 + y^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

и, следовательно, $\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1-\cos\varphi-\sin\varphi}^{2-\cos\varphi-\sin\varphi} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$

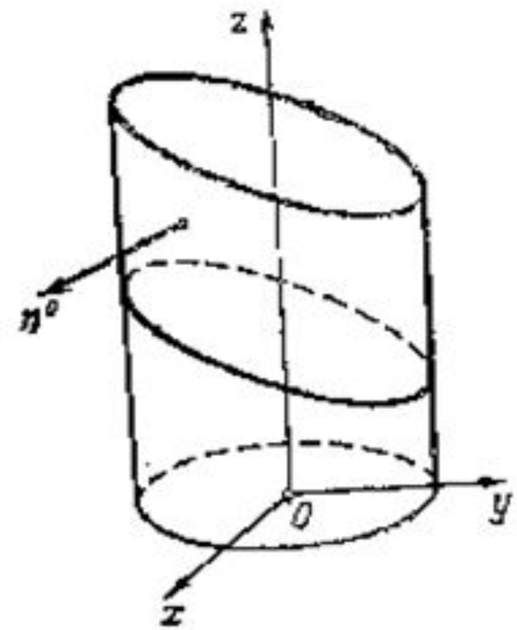

Рис. 2.7

Случай 2). Пусть поверхность S является частью сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, ограниченной коническими поверхностями, уравнения которых в сферических координатах имеют вид $\theta = f_1(\varphi)$, и полуплоскостями $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$.

Положим для точек данной сферы

$$x = R\cos\varphi\sin\theta,\ y = R\sin\varphi\sin\theta,\ z = R\cos\theta,$$

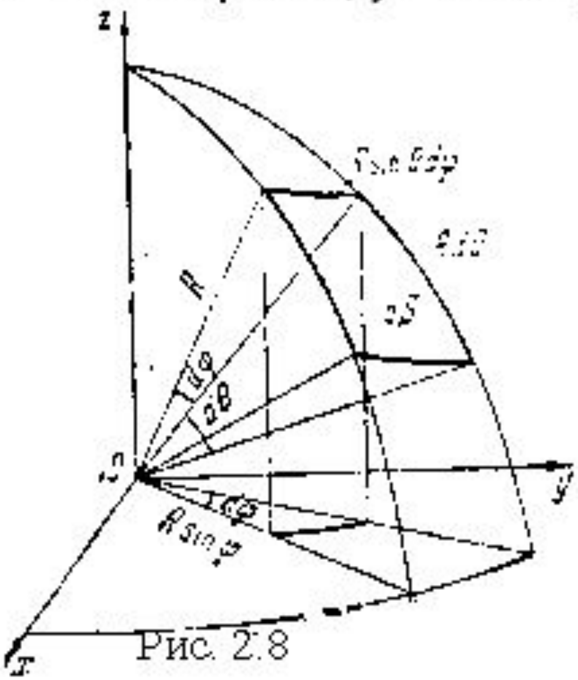

Рис. 2.8

где $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, \theta_2 \le \theta \le \theta_2$.

Тогда для элемента площади dS получим (рис. 2.7)

$$ds = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi.$$

В этом случае поток векторного поля a через внешнюю часть S сферы вычисляется по формуле

$$\Pi = R^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} (a, n^0) \sin\theta d\theta\ , \quad (2.5)$$

где

$$n^0 = \frac{\operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)}{\left|\operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\right|} = \frac{xi + yj + zk}{R}.$$

3. ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО

3.1. Вычисление дивергенции

Определение 3.1. Отношение потока векторного поля через поверхность S к величине объема V называется средней объемной плотностью потока векторного поля.

В поле скоростей жидкости это отношение при $\varPi > 0$ определяет среднее количество жидкости, поступающей из единицы объема внутри поверхности S за единицу времени. При $\varPi < 0$ определяет среднее количество жидкости, поглощаемой единицей объема за единицу времени.

Определение 3.2. Дивергенцией (или расходимостью) векторного поля $\bar{a}(M) = P(M)\bar{i} + Q(M)\bar{j} + R(M)\bar{k}$ называется обьемная плотность потока векторного поля $\bar{a}$ в этой точке: $div\,\bar{a}(M) = \lim\limits_{S \to M} \frac{1}{V} \iint\limits_{S} \bar{a}\overline{n^{o}}\,dS$,

где V-обьем, ограниченный замкнутой поверхностью S, содержащей точку М.

Если координаты вектора $\bar{a}(M)$ непрерывны вместе со своими частными производными P_x', Q_y', R_z', то в декартовой системе координат дивергенция вычисляется по формуле $div\,\bar{a}(M) = P_x'(x, y, z) + Q_y'(x, y, z) + R_z'(x, y, z)$, (3.1)

где частные производные вычислены в точке М.

Пример 3.1. Вычислить дивергенцию поля радиус-вектора $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

Решение. $div\,\bar{r} = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3 > 0$.

Следовательно, в каждой точке поля радиус-вектора имеется источник, плотность которого равна трем единицам.

3.2. Формула Остроградского в векторной форме

Равенство (3.1) позволяет записать формулу Остроградского в векторной форме. Если учесть, что $\iint\limits_S \bar{a}\bar{n}^o dS = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$ (3.1)

является потоком векторного поля, тогда равенство

$\iint\limits_S (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)dS = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$ примет следующий вид: $\Pi = \iint\limits_S an^o dS = \iiint\limits_V div\bar{a}dV$. (3.2)

Физический смысл формулы Остроградского заключается в том, что, если $\bar{V} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ - вектор скорости жидкости, протекающей через тело V ,тогда подынтегральное выражение в правой части равенства (3.2) дает полное количество жидкости ,вытекающей из тела V или через поверхность S за единицу времени (или втекающей в тело V , если интеграл отрицателен) .Если дивергенция равна нулю , то количество жидкости , втекающей внутрь тела , равно количеству жидкости , вытекающей из него .

Формула (3.2) позволяет упростить вычисления потоков через замкнутую поверхность.

Пример 3.2. Вычислить поток поля $\bar{a} = xy^2\bar{i} + x^2y\bar{j} + \frac{z^3}{3}\bar{k}$ через полную поверхность цилиндра

$x^2 + y^2 \le R^2$, $0 \le z \le H$.

Решение. Найдем дивергенцию

$$div\bar{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(xy^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z^3/3\right) = y^2 + x^2 + z^2.$$

По формуле (3.2)

$$\Pi = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dV.$$

Перейдем к циклическим координатам, тогда

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho d\rho \int_0^H \left(\rho^2 + z^2\right)dz = = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \left(\rho^3 H + \rho\, H^3/3\right)d\rho =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{R^4}{4}H + \frac{R^2}{2}\cdot\frac{H^3}{3}\right)d\theta = = \frac{R^2H}{2}\left(\frac{R^2}{2} + \frac{H^2}{3}\right)2\pi = \frac{\pi R^2 H}{3}\left(3R^2 + 2H^2\right).$$

4. ЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ В ВЕКТОРНОМ ПОЛЕ. ЦИРКУЛЯЦИЯ. ПЛОТНОСТЬ ЦИРКУЛЯЦИИ

4.1. Определение и вычисление циркуляции

Пусть L-пространственная кусочно-гладкая направленная линия и $\overline{a}(M) = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}$ - непрерывное векторное поле, заданное в $L \in T \in R^3$, где $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$- проекции $\overline{a}(M)$ на координатные оси.

Определение 4.1.1. Криволинейный интеграл вида

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + Ry, z)dz \; ,$$

взятый по некоторой направленной линии L, называется линейным интегралом от вектора $\overline{a}$ вдоль линии L.

Пример 4.1. Вычислить работу силового поля

$F = yi + xj + (x + y + z)k$ вдоль отрезка AB прямой, проходящей через точки $M_1(2,3,4)$ и $M_2(3,4,5)$.

Решение. Работа данного силового поля будет равна линейному интегралу вдоль отрезка M_1M_2: $A = \int\limits_{M_1M_2} (F, dr) = \int\limits_{M_1M_2} ydx + xdy + (x + y + z)dz$.

Находим канонические уравнения прямой M_1M_2. Имеем $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{1}$.

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} y &= x + 1, \\ z &= x + 2, \end{aligned}\right\}$$

$$dy = dx, \; dz = dx.$$

Здесь x изменяется в пределах от 2 до 3 (так как абсцисса точки M_1 равна 2, а абсцисса точки M_2 равна 3). Искомая работа будет равна

$$A = \int\limits_2^3 (x + 1 + x + x + x + 1 + x + 2)dx = \int\limits_2^3 (5x + 4)dx = \frac{33}{2} .$$

Определение 4.1.2. Циркуляцией векторного поля $\bar{a} = (P, Q, R)$ по замкнутой линии L в области $T \in R^3$ называется линейный интеграл по этой замкнутой линии L, обозначаемый через Ц и определяемый формулой $Ц = \oint_L \dot{a} d\dot{r}$, где $dr = (dx, dy, dz)$ - вектор-дифференциал.

В том случае, когда $\bar{a}$ - силовое поле, линейный интеграл от вектора $\bar{a}$ равен работе сил поля при перемещении тока по линии L(физический смысл циркуляции).

Найдем скалярное произведение векторов $\bar{a}(M)$ и $d\dot{r}$. Вектор $d\dot{r}$ направлен по касательной к кривой L.

$$\bar{a} \cdot d\bar{r} = P(x, y, z)dx - Q(x, y, z)dy - R(x, y, z)dz.$$

Тогда циркуляция принимает вид

$$Ц = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

4.2. Плотность циркуляции векторного поля

Пусть в векторном поле $\bar{a}(M)$ на поверхности S дан замкнутый контур L, заключающий в себе точку М (рис. 4.2).

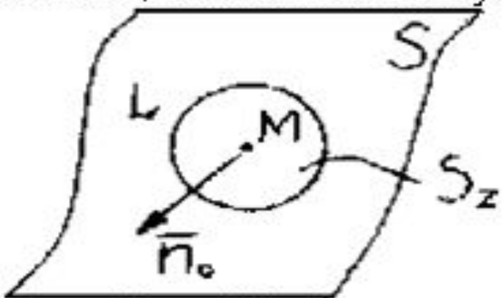

Рис. 4.3

$\bar{n^o}$ - единичный вектор нормали к поверхности S в т. М; $n^o = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Пусть S_L - площадь поверхности, ограниченной контуром L.

Определение 4.2.1. Плотностью циркуляции в точке М называется предел отношения циркуляции к площади поверхности S при условии стягивания контура L к точке М.

$$\rho_Ц = \lim_{z\to M} \frac{1}{S_L} \oint_L \bar{a} d\bar{r}. \quad (4.2)$$

В проекциях плотность циркуляции выражается в виде

$$\rho_Ц = \lim_{z\to M} \frac{1}{S_L} \oint_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

Если подынтегральное выражение преобразовать по формуле Стокса, то получим

$$\rho_Ц(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma. \quad (4.3)$$

Частные производные вычислены в данной точке М.

5. РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ТЕОРЕМА СТОКСА В ВЕКТОРНОЙ ФОРМЕ

Определение 5.1. Ротор (или вихрь) векторного поля точки М обозначается $rot\bar{a}(M)$ и определяется формулой $rot\bar{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}$, (5.1)

где частные производные вычислены в точке М.

Для лучшего запоминания этот вектор можно записать в виде следующего символического определителя:

$$rot\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad (5.2)$$

Смысловое определение ротора вытекает из его связи с плотностью циркуляции поля; сравнивая формулы (4.3) и (5.1), можно записать

$$\rho_Ц = rot\bar{a} \cdot \bar{n} = |rot\bar{a}||\overline{n^o}|\cos\left(rot\hat{\bar{a}}, \overline{n^o}\right) = |rot\bar{a}|\cos\left(rot\bar{a}, n^o\right).$$

Если значение косинуса равно 1, то из последнего равенство $\max(\rho_Ц) = |rot\bar{a}|$.

Таким образом, плотность циркуляции в точке М будет наибольшей в направлении ротора и равна его численному значению. Физический смысл ротора в поле скоростей $\bar{V}$ заключается в том, что ротор представляет собой мгновенную угловую скорость вращения тела.

Пример 5.1. Найти ротор векторного поля $\bar{a}(x, y, z) = z^2\bar{i} + x^2\bar{j} + y^2\bar{k}$.

Решение. Используя формулу (5.1), найдем проекции ротора

$$rot_x\bar{a} = \frac{\partial(y^2)}{\partial y} - \frac{\partial(x^2)}{\partial z} = 2y \;;$$

$$rot_y\bar{a} = \frac{\partial(z^2)}{\partial z} - \frac{\partial(y^2)}{\partial x} = 2z;$$

$$rot_z\bar{a} = \frac{\partial(x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(z^2)}{\partial y} = 2x.$$

Следовательно, $rot\bar{a} = 2y\bar{i} + 2z\bar{j} + 2x\bar{k}$.

С помощью ввод. $rot\bar{a}$ можно записать формулу Стокса в векторной форме. Так как

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma$$

следовательно, в векторной форме это равенство имеет вид $\oint_L \bar{a}d\bar{r} = \iint_S rot\bar{a}\,\overline{n^o}\,dS$. (5.3)

Итак, поток вектора $rot\bar{a}$ через ориентированную поверхность S равен циркуляции вектора $\bar{a}$ вдоль положительного направления обхода контура L этой поверхности.

6. КЛАССИФИКАЦИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

6.1. Безвихревое поле

Определение 6.1. Векторное поле, ротор которого тождественно равен нулю, называется безвихревым.

Теорема 6.1. Для того, чтобы векторное поле, заданное в односвязной области, было безвихревым, необходимо и достаточно, чтобы циркуляция по любому замкнутому контуру, лежащему в этой области, равнялась нулю.

6.2. Потенциальное поле

Определение 6.2. Векторное поле $\bar{a}(M)$ называется потенциальным, если оно является градиентом некоторого скалярного поля
$U(x, y, z)$.

Теорема 6.2. Для того, чтобы векторное поле, заданное в односвязной области, было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы в этой области оно было безвихревым. Из данной теоремы следует условие потенциальности векторного поля

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (6.1)$$

Потенциал поля находится по формуле

$$U(M) = \int_{M_o}^{M} P dx + Q dy + R dz,$$

где M_0M – произвольный путь интегрирования от точки M_0 до точки M.

Обычно в качестве такого пути выбирают ломанную $M_0M_1M_2M$, звенья которой параллельны осям координат. В этом случае формула для вычисления потенциала имеет вид

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz \qquad (6.2)$$

6.3. Соленоидальные поля

Определение 6.3. Векторное поле $\bar{a}(M)$ называется соленоидальным в области T, если дивергенция равна нулю в каждой точке

области, т.е. $\operatorname{div}\bar{a} = 0$. Соленоидальное поле также называют трубчатым. Векторные линии его уходят в бесконечность или замкнуты.

Если выделить в поле векторную трубку часть пространства, ограниченного векторными линиями (рис. 6.3.1), пересечь трубку двумя поперечными сечениями и вычислить поток поля через замкнутую поверхность, образованную сечениями S_1 и S_2 и часть боковой поверхности трубки, то можно показать (используя теорему Остроградского),

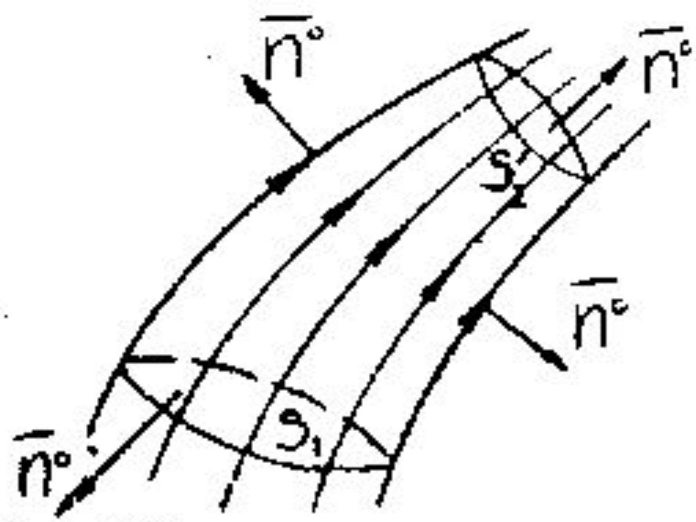

Рис. 6.3.1

что поток соленоидального поля через любое поперечное сечение векторной трубки имеет одно и то же значение.

Теорема 6.3. Для того, чтобы векторное поле $\bar{a}$ было в области T соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы поток этого поля через любую замкнутую поверхность область T был равен нулю.

Пример 6.3.1.Будет ли векторное поле $\bar{a} = (4x - 3yz)\bar{i} + (4y - 3xz)\bar{j} + (4z - 3xy)\bar{k}$ потенциальным или соленоидальным? Найти потенциал поля, если оно является потенциальным.

Решение. Проверим условие соленоидальности поля, т.е. $\operatorname{div}\bar{a} = 0$ во всех точках поля.

$$\operatorname{div}\bar{a} = \frac{\partial}{\partial x}(4x - 3yz) + \frac{\partial}{\partial y}(4y - 3xz) + \frac{\partial}{\partial z}(4z - 3xy) = 12 \neq 0$$

Поле не является соленоидальным.

Вычислим ротор поля:

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 4x - 3yz & 4y - 3xz & 4z - 3xy \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\operatorname{rot}\bar{a} = (-3x + 3x)\bar{i} - \bar{j}(-3y + 3y) + \bar{k}(-3z + 3z) = 0.$$

По формуле (6.2) найдем потенциал поля:

$$U(x,y,z)=\int\limits_{\Gamma}(4x-3yz)dx+(4y-3xz)dy+(4z-3xy)dz.$$

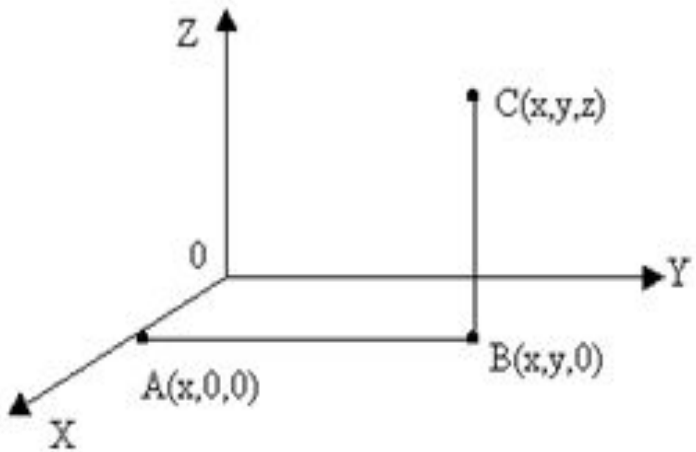

Рис. 6.3.2

В каждом пути интегрирования Г возьмем ломаную ОАВС (рис. 6.3.2), точка О совпадает с начальной координатой О (0,0,0).

$$U(x,y,z)=\int\limits_0^x 4xdx+\int\limits_0^y 4ydy+$$

$$+\int\limits_0^z (4z-3xy)dz=$$

$$=2x^2+2y^2+2z^2-3xyz$$