

Основные комбинаторные конфигурации

Комбинаторика – раздел дискретной математики, посвящённый решению задач выбора и расположения элементов некоторого, как правило, конечного множества в соответствии с заданными свойствами.

Очень многие комбинаторные задачи решаются применением трех простых правил: **равенства, суммы и произведения.**

Правило равенства. Если между конечными множествами A и B есть взаимно однозначное соответствие, то $|A| = |B|$.

Правило суммы. Если A и B – конечные множества и $A \cap B = \emptyset$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Правило произведения. Для любых конечных множеств A и B имеет место равенство :

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Перестановкой элементов множества M называется всякое соединение элементов множества M , в котором обязательно присутствуют все элементы из M и в котором учитывается порядок следования элементов друг за другом.

Например, если $n=3$, то $(1,2,3)$ и $(3,2,1)$ являются разными перестановками.

При произвольном n количество P_n всевозможных перестановок множества $M = \{1, 2, \dots, n\}$ равно

$$P_n = \prod_{i=0}^{n-1} (n-i) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

$$P_0 = 1$$

ПРИМЕР: Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?

$$F : \{1..8\} \rightarrow (1..8)$$

Количество
ладей

Занимаемые места на доске
(1 в горизонтали и 1 в
вертикали)

$$P_8 = 8! = 40320$$

Всякое соединение из k элементов множества $M = \{1, 2, \dots, n\}$, в котором учитывается порядок следования элементов друг за другом, называется **размещением** из n элементов по k .

При $n=k$ – это перестановка.

При $n < k$ – таких соединений нет.

При $n > k$ количество размещений из n по k равно:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Очевидно, что

$$A_n^n = P_n \quad A_n^0 = 1$$

ПРИМЕР: В спортивных соревнованиях исходом является определение участников, занявших 1, 2, 3 места. Сколько возможно различных исходов, если в соревнованиях участвуют n участников?

$$F: \{1, 2, 3\} \rightarrow (1..n)$$

$$A_n^3 = n(n-1)(n-2) - \text{различных исходов}$$

Всякое соединение из k элементов множества $M = \{1, 2, \dots, n\}$, где $k \leq n$ в котором порядок следования элементов друг за другом не учитывается, называется **сочетанием** из n по k .

Например, при $n=4$, соединения $(3, 1, 4)$ и $(4, 1, 3)$ являются различными размещениями из 4 по 3, но как сочетания они равны.

Количество сочетаний из n по k определяется следующей формулой:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

ПРИМЕР: В начале игры в домино каждому играющему выдаётся 7 костей из имеющихся 28. Сколько существует различных комбинаций костей, которые игрок может получить в начале игры?

$$C_{28}^7 = \frac{28!}{7!(28-7)!} = 1184040$$

Размещение с повторениями из n элементов множества M по k - всякая конечная последовательность, состоящая из k членов данного множества M , все k элементов которой не обязательно различны.

Два размещения с повторениями считаются различными, если хотя бы на одном месте они имеют различные элементы множества M .

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Возьмем буквы **Б, А, Р**. Какие размещения из этих букв, взятых по две, можно получить? Сколько таких наборов получится, если буквы могут повторяться?

Получатся наборы: **ББ, БА, БР, АА, АБ, АР, РР, РБ, РА.**

$$\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9$$

Перестановки с повторениями

Число различных перестановок, которые можно построить из n элементов, среди которых находятся n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа, ..., n_k элементов k -го типа равно

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

$$(n_1 + n_2 + \dots + n_k = n)$$

ПРИМЕР:

Сколько различных слов можно построить перестановкой букв в слове «лаваш»?

Слово «лаваш» включает по одному экземпляру букв «л», «в», «ш» и два экземпляра буквы «а», а общее количество букв – 5. По формуле находим:

$$\frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$