Основные комбинаторные конфигурации

<u>Комбинаторика</u> – раздел дискретной математики, посвящённый решению задач выбора и расположения элементов некоторого, как правило, конечного множества в соответствии с заданными свойствами.

Очень многие комбинаторные задачи решаются применением трех простых правил: **равенства, суммы и произведения**.

Правило равенства. Если между конечными множествами A и B есть взаимно однозначное соответствие, то $|A| = |B|$.

Правило суммы. Если A и B – конечные множества и $A \cap B = \varnothing$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Правило произведения. Для любых конечных множеств A и B имеет место равенство :

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Перестановкой элементов множества М называется всякое соединение элементов множества М, в котором обязательно присутствуют все элементы из М и в котором учитывается порядок следования элементов друг за другом.

Например, если n=3, то (1,2,3) и (3,2,1) являются разными перестановками.

При произвольном n количество P_n всевозможных перестановок множества $M = \{1,2,..,n\}$ равно

$$P_n = \prod_{i=0}^{n-1}(n-i) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$$

$$P_0 = 1$$

ПРИМЕР: Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?

$$F:\{1..8\}\rightarrow(1..8)$$

Количество ладей

Занимаемые места на доске (1 в горизонтали и 1 в вертикали)

$$P_8 = 8! = 40320$$

Всякое соединение из k элементов множества $M = \{1, 2, .., n\}$, в котором учитывается порядок следования элементов друг за другом, называется **размещением** из n элементов по k.

При n=k – это перестановка.

При n<k – таких соединений нет.

При n>k количество размещений из n по k равно:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Очевидно, что $$A_n^n = P_n \qquad A_n^0 = 1$$

ПРИМЕР: В спортивных соревнованиях исходом является определение участников, занявших 1, 2, 3 места. Сколько возможно различных исходов, если в соревнованиях участвуют n участников?

$$F:\{1,2,3\}\to(1..n)$$

$$A_n^3 = n(n-1)(n-2) - \text{различных исходов}$$

Всякое соединение из k элементов множества $M = \{1,2,..,n\}$, где $k \le n$ в котором порядок следования элементов друг за другом не учитывается, называется **сочетанием** из n по k.

Например, при n=4, соединения (3,1,4) и (4,1,3) являются различными размещениями из 4 по 3, но как сочетания они равны.

Количество сочетаний из n по k определяется следующей формулой:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

ПРИМЕР: В начале игры в домино каждому играющему выдаётся 7 костей из имеющихся 28. Сколько существует различных комбинаций костей, которые игрок может получить в начале игры?

$$C_{28}^{7} = \frac{28!}{7!(28-7)!} = 1184040$$

Размещение с повторениями из n элементов множества M по k - всякая конечная последовательность, состоящая из k членов данного множества M, все k элементов которой не обязательно различны.

Два размещения с повторениями считаются различными, если хотя бы на одном месте они имеют различные элементы множества M.

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Возьмем буквы **Б, А, Р**. Какие размещения из этих букв, взятых по две, можно получить? Сколько таких наборов получиться, если буквы могут повторяться?
Получатся наборы: **ББ, БА, БР, АА, АБ, АР, РР, РБ, РА.**

$$\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9$$

Перестановки с повторениями

Число различных перестановок, которые можно построить из n элементов, среди которых находятся n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа,…, n_k элементов k-го типа равно

$$P(n_1, n_2, .., n_k) \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

$$\left(n_1 + n_2 + \dots\ n_k = n\right)$$

ПРИМЕР:

Сколько различных слов можно построить перестановкой букв в слове «лаваш»?

Слово «лаваш» включает по одному экземпляру букв «л», «в», «ш» и два экземпляра буквы «а», а общее количество букв – 5. По формуле находим:

$$\frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$$