

# КУРСОВАЯ РАБОТА

Расчет свободной энергии ферромагнетика

методом Гиббса

студентка физического факультета

группы 205

Улькина Н.С.



# Постановка задачи

Вычислить свободную энергию  $F$

ферромагнитной пластинки толщиной  $\delta$



# Решение

определением свободной энергии

$$F = -T \ln Z \quad Z = \sum_n e^{-E_n/T}$$

Для ферромагнетика характерны собственные малые колебания намагниченности

относительно равновесного значения  $M_0$ , которые порождают специфический тип частиц (в твердом кристаллическом теле их принято называть квазичастицами или магнонами). Энергия магнонов в ферромагнетике дается следующим законом дисперсии:

$$\varepsilon_k = J_{ex} (ak)^2 + \mu_e H$$

Собственная  
энергия

$$E_n = n \sum_k \varepsilon_k$$

В результате для свободной энергии  
получаем

$$\begin{aligned} F &= -T \ln \sum_n \exp\left(-n \frac{\sum_k \varepsilon_k}{T}\right) = -T \ln \prod_k \sum_n \exp\left(-n \frac{\varepsilon_k}{T}\right) = \\ &= -T \sum_k \ln \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-n \frac{\varepsilon_k}{T}\right) = T \sum_k \ln \left[1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_k}{T}\right)\right] \end{aligned}$$

Перейдем от суммирования по  $k$  к интегрированию, речь идет о  
двумерном случае, и поэтому вместо объема  $V$  следует писать площадь  $S$   
пластины

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \sum_k (\dots) = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} (\dots).$$

Волновой

$\vec{k}$

вектор

$$d^2 \vec{k} = dk_x dk_y, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad k_x = k \sin \varphi, \quad k_y = k \cos \varphi. \quad d^2 \vec{k} = dk_x dk_y = k dk d\varphi.$$

$$F = \frac{TS}{(2\pi)^2} \int_0^\infty k dk \ln(1 - e^{-\varepsilon_k/T}) \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{TS}{2\pi} \int_0^\infty k \ln(1 - e^{-\varepsilon_k/T}) dk.$$

Преобразуем

интеграл

$$J = \int_0^\infty k \ln(1 - e^{-\varepsilon_k/T}) dk = \frac{k^2}{2} \ln(1 - e^{-\varepsilon_k/T}) \Big|_0^\infty - \frac{1}{2} \int_0^\infty k^2 \frac{\partial}{\partial k} \left[ \ln(1 - e^{-\varepsilon_k/T}) \right] dk.$$

Закона дисперсии  
магнона

$$\vec{v}_k = \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \left[ J_{ex} (ak)^2 + \mu_e H \right] = 2J_{ex} a^2 k.$$

Значи

$$\frac{\partial}{\partial k} \left[ \ln(1 - e^{-\varepsilon_k/T}) \right] = \frac{1}{T} \cdot \frac{2J_{ex} a^2 k}{e^{\varepsilon_k/T} - 1}$$

НО

Следовательно

$$J = -\frac{J_{ex} a^2}{T} \int_0^{\infty} \frac{k^3 dk}{e^{-\varepsilon_k/T} - 1}.$$

Введем  
подстановку

$$x = \frac{\varepsilon_k}{T}$$

отсюда  
а

$$k^2 = \frac{Tx - \mu_e H}{a^2 J_{ex}}.$$

Обозначи  
м

$$b = \frac{\mu_e H}{T}$$

$$J = -\frac{T}{2a^2 J_{ex}} \int_b^{\infty} \frac{x-b}{e^x - 1} dx = \frac{\mu_e H}{2a^2 J_{ex}} \int_b^{\infty} \frac{dx}{e^x - 1} - \frac{T}{2a^2 J_{ex}} \int_b^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1},$$

Пусть  $y = e^x$

$$J_1 = \int_b^{\infty} \frac{dx}{e^x - 1} = \int_{e^b}^{\infty} \left( \frac{1}{1-y} - \frac{1}{y} \right) dy =$$

$$= \ln \left( \frac{y-1}{y} \right) = \ln \left( 1 - \frac{1}{y} \right) \Big|_{e^b}^{\infty} = -\ln(1 - e^{-b}).$$

$$J_2 = \int_b^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} \approx \int_b^{\infty} e^{-x} x dx = -x e^{-x} \Big|_b^{\infty} + \int_b^{\infty} e^{-x} dx = b e^{-b} - e^{-x} \Big|_b^{\infty} = (b+1) e^{-b}, \quad b \gg 1$$

$$J_2 = \int_b^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} \approx \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}, \quad b \ll 1$$

Собирая все воедино, получаем свободную энергию ферромагнитной пластины

$$F = \frac{TS}{2\pi} \int_0^{\infty} k \ln(1 - e^{-\varepsilon_k/T}) dk =$$

$$= -\frac{T^2 S}{4\pi a^2 J_{ex}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi^2}{6} + \frac{\mu_e H}{T} \ln\left(\frac{\mu_e H}{T}\right), \quad \text{если } T \gg \mu_e H, \\ e^{-\mu_e H/T} T, \quad \ll \mu_e H, \end{array} \right\}$$



Презентация завершена!

Спасибо за  
внимание!!!

