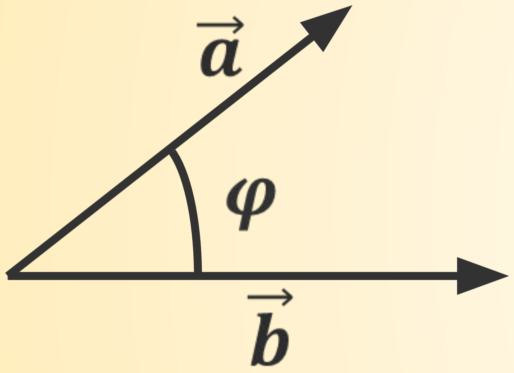
Лекция №9

Приложения скалярного произведения

▪ ***<u>Задача 1.</u>*** Найти угол между ненулевыми векторами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$.



$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

<u>Пример 1.</u> Определить угол $\widehat{BAC}$ в треугольники с вершинами $A(2; -1; 3)$, $\mathrm{B}(1; 1; 1)$ и $\mathrm{C}(0; 0; 5)$.

▪ ***Задача 2.*** Найти проекцию вектора $\vec{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_2})$ на вектор $\vec{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1})$.

$$\boldsymbol{pr_a \vec{b} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}}$$

Пример 2. Пусть $\boldsymbol{A(2; -1; 3)}$, $\mathbf{B(1; 1; 1)}$ и $\mathbf{C(0; 0; 5)}$. Найти $\boldsymbol{pr_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB}}$

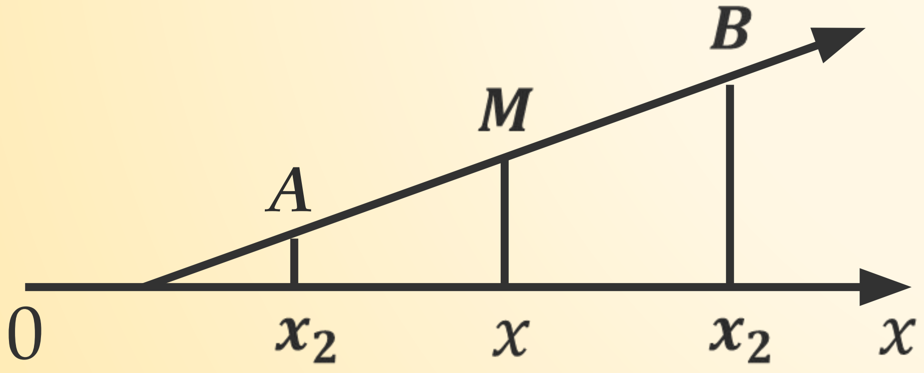
Деление отрезка в данном отношении

- Заданы точки $\mathbf{A}(x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{B}(x_2, y_2, z_2)$.

Пусть точка M делит отрезок AB в отношении $AM{:}MB = \lambda$, требуется найти координаты точки $M(x, y, z)$.

Легко доказать, что

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$



<u>Пример 3.</u> Пусть $\mathbf{A}(-2; 1)$, $\mathbf{B}(3; 6)$. Найти точку $M(x, y)$ делящую AB в отношении $AM{:}MB = 3{:}2$. Найти координаты середины отрезка AB.

Векторное произведение векторов

- ***Определение.*** Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ (обозначается $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$), удовлетворяющий следующим условиям:

1) длина вектора $\vec{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, т.е. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, где φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3) вектора $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ образуют правую тройку, т.е. если наблюдать из конца вектора $\vec{c}$ поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$, то поворот происходит против часовой стрелки.

Свойства векторного произведения

1. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

2. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \mathbf{0}$, если и только если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

3. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и любого числа λ

а) $\lambda\vec{a} \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

б) $\vec{a} \times \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

4. Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняется свойство дистрибутивности:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Векторное произведение в координатной форме

- Если $\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}$ - орты, то $\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{i}} = \mathbf{0}$, $\vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{j}} = \mathbf{0}$, $\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}$.

Легко проверить, что $\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{j}} = \vec{\boldsymbol{k}}$, $\vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = \vec{\boldsymbol{i}}$, $\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{i}} = \vec{\boldsymbol{j}}$.Тогда $\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = -\vec{\boldsymbol{j}}$, $\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{j}} = -\vec{\boldsymbol{i}}$.

Рассмотрим векторное произведение произвольных векторов $\vec{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1})$ и $\vec{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_2})$. Справедлива формула, которую условно можно представить в следующем виде:

$$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{y_1} & \boldsymbol{z_1} \\ \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{y_2} & \boldsymbol{z_2} \end{vmatrix}$$

Пример. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{\boldsymbol{a}} = (\mathbf{2}, -\mathbf{3}, \mathbf{4})$ и $\vec{\boldsymbol{b}} = (\mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{5})$.

Смешанное произведение векторов

Определение. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число d определяемое формулой:

$$d = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}),$$

где $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$ - означает скалярное произведение векторов $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$. Смешанное произведение будем обозначать $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2), \vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Свойства смешанного произведения

1. Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ если и только если вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Определение. Вектора называются компланарными, если будучи приложены к одной точке, они окажутся лежащими в одной плоскости.

2. Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$

$$\left|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right| = V,$$

где V – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

3. Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$$

Пример. Вычислить объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{\boldsymbol{a}} = (\mathbf{2}; \mathbf{3}; -\mathbf{1}), \vec{\boldsymbol{b}} = (\mathbf{4}; \mathbf{5}; \mathbf{1}), \vec{\boldsymbol{c}} = (\mathbf{1}; -\mathbf{2}; \mathbf{3})$.

$$\boldsymbol{V}_{\text{пир.}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} \boldsymbol{V}_{\text{пар.}}$$

Пример. Проверить являются ли вектора $\vec{\boldsymbol{a}} = (\mathbf{2}; \mathbf{1}; \mathbf{3})$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (\mathbf{3}; -\mathbf{2}; \mathbf{1}), \vec{\boldsymbol{c}} = (\mathbf{1}; \mathbf{1}; \mathbf{2})$ компланарными.

Уравнение прямой с угловыми коэффициентами

- Пусть на плоскости задана декартова система координат XOY. Рассмотрим произвольную прямую l не параллельную оси ординат. Обозначим через φ угол, который образует прямая с положительным направлением оси OX и отсекает на оси OY отрезок величины b.

- Тогда уравнение этой прямой имеет вид:

$$\boldsymbol{y = kx + b}, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{k = tg\ \varphi}$.

Уравнение (1) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом. В этом уравнении $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ являются координатами произвольной точки прямой, а постоянные величины $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{k}$ называются параметрами: $\boldsymbol{k}$ – угловой коэффициент, $\boldsymbol{b}$ – начальная ордината.

Частные случаи уравнения прямой с угловым коэффициентом

.

а) $\boldsymbol{b = 0}$, уравнение $\mathbf{y} = \boldsymbol{kx}$, прямая проходит через начало координат;

б) $\mathbf{k = 0}$, уравнение $\mathbf{y} = \boldsymbol{b}$, прямая параллельная оси $\boldsymbol{OX}$;

в) Если прямая параллельна оси $\boldsymbol{OY}$, то уравнение прямой $\boldsymbol{x = a}$.

Общее уравнение прямой

- Всякое уравнение первой степени относительно x и y вида:

$$\boldsymbol{Ax + By + C = 0} \quad (2)$$

является уравнением прямой на плоскости.

Задача 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ и имеющей угловой коэффициент $\boldsymbol{k}$.

$$\boldsymbol{y - y_0 = k(x - x_0)}$$

Задача 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $\boldsymbol{M_1(x_1, y_1)}$ и $\boldsymbol{M_2(x_2, y_2)}$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (3)$$

Уравнение (3) называется уравнением прямой, проходящей через две заданные точки.

Задача 3. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси $\boldsymbol{OX}$ отрезок величины a, а на оси $\boldsymbol{OY}$ – величины $\boldsymbol{b \neq 0}$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (4)$$

Уравнение (4) называется уравнением прямой в отрезках.