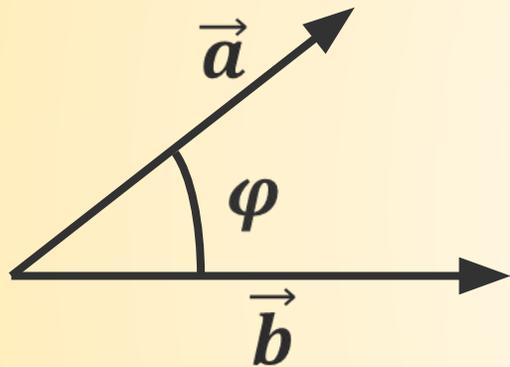


# Лекция №9

# Приложения скалярного произведения

Задача 1. Найти угол между ненулевыми векторами

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \text{ и } \vec{b} = (x_2, y_2, z_2).$$



$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Пример 1. Определить угол  $\widehat{BAC}$  в треугольнике с вершинами  $A(2; -1; 3)$ ,  $B(1; 1; 1)$  и  $C(0; 0; 5)$ .

▪ Задача 2. Найти проекцию вектора  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$  на вектор  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ .

$$pr_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$$

Пример 2. Пусть  $A(2; -1; 3)$ ,  $B(1; 1; 1)$  и  $C(0; 0; 5)$ . Найти  $pr_{\vec{AC}} \vec{AB}$

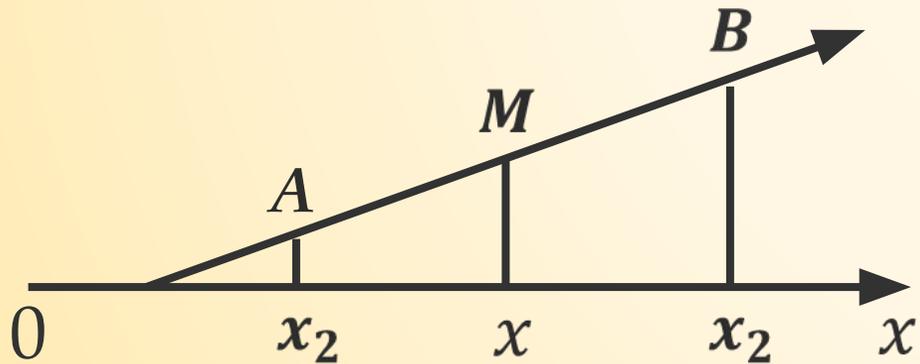
## Деление отрезка в данном отношении

- Заданы точки  $A(x_1, y_1, z_1)$  и  $B(x_2, y_2, z_2)$ .

Пусть точка  $M$  делит отрезок  $AB$  в отношении  $AM:MB = \lambda$ , требуется найти координаты точки  $M(x, y, z)$ .

Легко доказать, что

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$



Пример 3. Пусть  $A(-2; 1)$ ,  $B(3; 6)$ .  
Найти точку  $M(x, y)$  делящую  $AB$  в отношении  $AM:MB = 3:2$ .  
Найти координаты середины отрезка  $AB$ .

# Векторное произведение векторов

▪ Определение. Векторным произведением двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$  (обозначается  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ), удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) длина вектора  $\vec{c}$  равна площади параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , т.е.  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .
- 2) вектор  $\vec{c}$  перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .
- 3) вектора  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  образуют правую тройку, т.е. если наблюдать из конца вектора  $\vec{c}$  поворот от вектора  $\vec{a}$  к вектору  $\vec{b}$ , то поворот происходит против часовой стрелки.

## Свойства векторного произведения

1. Для любых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

2. Для любых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \mathbf{0}$ , если и только если вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны.

3. Для любых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и любого числа  $\lambda$

а)  $\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

б)  $\vec{a} \times \lambda \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

4. Для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  выполняется свойство дистрибутивности:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

## Векторное произведение в координатной форме

- Если  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - орты, то  $\vec{i} \times \vec{i} = \mathbf{0}, \vec{j} \times \vec{j} = \mathbf{0}, \vec{k} \times \vec{k} = \mathbf{0}$ .

Легко проверить, что  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ . Тогда  $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$ .

Рассмотрим векторное произведение произвольных векторов  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  и  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ . Справедлива формула, которую условно можно представить в следующем виде:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Пример. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a} = (2, -3, 4)$  и  $\vec{b} = (1, -2, 5)$ .

# Смешанное произведение векторов

Определение. Смешанным произведением трех векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  называется число  $d$  определяемое формулой:

$$d = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}),$$

где  $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$  - означает скалярное произведение векторов  $\vec{a} \times \vec{b}$  и  $\vec{c}$ .  
Смешанное произведение будем обозначать  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ .

Если  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ,  $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ , то

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

## Свойства смешанного произведения

1. Для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$   $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$  если и только если вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны.

Определение. Вектора называются компланарными, если будучи приложены к одной точке, они окажутся лежащими в одной плоскости.

2. Для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$

$$|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = V,$$

где  $V$  – объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ .

3. Для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$$

▪ Пример. Вычислить объем пирамиды, построенной на векторах  $\vec{a} = (2; 3; -1)$ ,  $\vec{b} = (4; 5; 1)$ ,  $\vec{c} = (1; -2; 3)$ .

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар.}}$$

Пример. Проверить являются ли вектора  $\vec{a} = (2; 1; 3)$ ,  $\vec{b} = (3; -2; 1)$ ,  $\vec{c} = (1; 1; 2)$  компланарными.

## Элементы аналитической геометрии

### Уравнение прямой с угловыми коэффициентами

- Пусть на плоскости задана декартова система координат  $XOY$ . Рассмотрим произвольную прямую  $l$  не параллельную оси ординат. Обозначим через  $\varphi$  угол, который образует прямая с положительным направлением оси  $OX$  и отсекает на оси  $OY$  отрезок величины  $b$ .

- Тогда уравнение этой прямой имеет вид:

$$y = kx + b, \quad (1)$$

где  $k = \operatorname{tg} \varphi$ .

Уравнение (1) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом. В этом уравнении  $x$  и  $y$  являются координатами произвольной точки прямой, а постоянные величины  $b$  и  $k$  называются параметрами:  $k$  – угловой коэффициент,  $b$  – начальная ордината.

## Частные случаи уравнения прямой с угловым коэффициентом

- а)  $b = 0$  , уравнение  $y = kx$  , прямая проходит через начало координат;
- б)  $k = 0$  , уравнение  $y = b$  , прямая параллельная оси  $OX$ ;
- в) Если прямая параллельна оси  $OY$  , то уравнение прямой  $x = a$ .

# Общее уравнение прямой

- Всякое уравнение первой степени относительно  $x$  и  $y$  вида:

$$Ax + By + C = 0 \quad (2)$$

является уравнением прямой на плоскости.

Задача 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0)$  и имеющей угловой коэффициент  $k$ .

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Задача 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad (3)$$

Уравнение (3) называется уравнением прямой, проходящей через две заданные точки.

Задача 3. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси  $OX$  отрезок величины  $a$ , а на оси  $OY$  – величины  $b \neq 0$ .

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (4)$$

Уравнение (4) называется уравнением прямой в отрезках.