

Графы

Графом называется простейшая модель связанной системы, т. е. некоторая выделенная совокупность объектов, между каждой парой элементов которой установлено наличие или отсутствие связи.

Если кроме факта связи устанавливается и её направление (ориентация связи), то граф называется **ориентированным**.

Неориентированный граф легко моделируется ориентированным: факт наличия связи между двумя различными элементами моделируется двумя ориентированными связями – связью «туда» и связью «обратно».

Теория графов – наука, которая занимается изучением свойств графов и различными способами их математического моделирования (различными способами их интерпретации).

Вершины – элементы связанной системы, составляющей граф.

Смежные вершины – две различные вершины, между которыми существует связь.

Один и тот же граф с различным образом помеченными вершинами называется *различный представитель графа*. Они рассматриваются как разные объекты.

Различные представители графа *изоморфны*, т.е. между их вершинами существует взаимнооднозначное соответствие, сохраняющее смежность вершин.

Вершины можно моделировать точками на плоскости. В этом случае связь между любыми двумя вершинами можно моделировать *направленным* или *ненаправленным* отрезком кривой.

Граф моделируется двумя множествами – *множеством вершин* и *множеством отрезков*, которые для удобства различают в названиях.

Направленные отрезки называются *дугами*, а ненаправленные *ребрами*.

Вершина, ограничивающая ребро называется *инцидентной* этому ребру (дуге), и наоборот.

Моделируем элементы, составляющую систему, как элементы некоторого множества вершин V , а ненаправленные связи (ребра) между некоторыми парами вершин, как двухэлементные подмножества множества вершин.

В этом случае две вершины называются *смежными*, если они принадлежат одному и тому же двухэлементному подмножеству. Вершина и ребро (двухэлементное подмножество) называются *инцидентными* друг другу, если вершина принадлежит этому ребру.

Аналогично с ненаправленными моделируются *направленные* связи связанной системы, как упорядоченные двухэлементные подмножества, точнее как упорядоченные пары.

Матрица смежности графа

Любая упорядоченная пара-дуга $(i, j) \in V \times V$ заданного n -элементного множества вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, вернее её наличие или отсутствие в описании связанной системы, однозначно определяется значением 1 или 0 соответственно на (i, j) -ом месте квадратной матрицы порядка n .

Матрица B размерности $n \times m$ с элементами b_{ij} называется матрицей инцидентности для графа G с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и множеством ребер $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, если $b_{ij} = 1$, когда вершина v_i инцидентна ребру x_j и $b_{ij} = 0$ в противном случае.

Матрица B размерности $n \times q$ с элементами b_{ij} называется ориентированной матрицей инцидентности для графа G с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и множеством дуг $R = \{r_1, r_2, \dots, r_q\}$, если $b_{ij} = 1$, когда вершина v_i инцидентна началу дуги r_j (когда вершина v_i совпадает с первым элементом пары r_j), $b_{ij} = 0$ когда v_i не инцидентна дуге r_j и $b_{ij} = -1$, когда вершина v_i инцидентна концу дуги r_j (когда вершина v_i совпадает со вторым элементом пары r_j).

Графом называется фигура, состоящая из точек, называемых вершинами, и отрезков, соединяющих некоторые из этих вершин. Соединяющие отрезки могут быть направленными (дугами - случай ориентированного графа), ненаправленными (ребрами - случай неориентированного графа), прямолинейными или криволинейными.

Отрезок, соединяющий вершину с самой собой, называется *петлей*.

Теоретико-множественное 1 – *ориентированным графом* называется пара (V, R) , где V – некоторое конечное множество, элементы которого называются *вершинами*, а $R \subseteq V \times V$, т.е. некоторое подмножество декартова произведения множества V на себя, или бинарное отношение на V . Элементы множества R , т.е. упорядоченные пары $(u, v) \in R$ (где $u, v \in V$) соответствуют *дугам* предыдущего определения. Обозначается граф обычно через $G(V, R)$.

Теоретико-множественное 2 – *неориентированным графом* называется пара (V, X) , где элементы множества V называются вершинами, а элементы множества X – некоторые двухэлементные подмножества множества V , называются ребрами. Обозначается обыкновенный граф обычно через $G(V, X)$.

(Множество X можно описать следующим образом: $X \subseteq \Omega$, где $\Omega = \{ \{u, v\} \mid u, v \in V \}$).

Матричное 1 – ориентированным графом называется множество (класс) квадратных $(0,1)$ -матриц, перестановочно подобных между собой. (Две квадратные матрицы называются *перестановочно подобными* (P-подобными), если от одной к другой можно перейти с помощью перестановки рядов, т.е. с помощью перестановки строк и такой же перестановки столбцов.)

Матрицы, в этом определении, называются *матрицами смежности графа*.

Матричное 2 – обыкновенным неориентированным графом называется множество (класс) $(0,1)$ -матриц инцидентности B , перестановочно эквивалентных между собой.

Матрицы B характеризуются тем, что у них все столбцы различные и у каждого столбца только два элемента равны 1, а все остальные элементы столбца равны 0.

Две матрицы инцидентностей называются *перестановочно эквивалентными*, если одна может быть получена из другой с помощью некоторой перестановки строк и некоторой перестановки столбцов.

Матричное \mathcal{Z} – обыкновенным ориентированным графом
называется множество (класс) ориентированных матриц
инцидентности B , перестановочно эквивалентных между собой.
Ориентированные матрицы инцидентности B характеризуются тем,
что у них все столбцы различные и у каждого столбца только два
элемента отличны от нуля, один из которых равен единице, а
другой – минус единице.

Замечание 1. Матричные определения 1, 2 и 3 отличаются от предыдущих тем, что определяют граф как класс объектов (матриц). Это объясняется тем, что при матричном моделировании связей приходится указывать привязку связываемых элементов двух экземпляров одного множества и двух разных множеств к месту в матрице.

Замечание 2. Матричное определение 1 позволяет включить в определение графа как псевдографы (графы с петлями), так и неориентированные графы.

Замечание 3. Матричные определения 2 и 3 не позволяют обобщения графа на псевдографы, однако если в этом определении отказаться от требования различия столбцов мы получим обобщение определений обыкновенных графов на мультиграфы (графы с кратными связями).

Замечание 4. Отношение перестановочного подобия и отношение перестановочной эквивалентности являются частными случаями бинарного отношения эквивалентности и позволяют разбить соответствующие множества на непересекающиеся подмножества эквивалентных между собой элементов (матриц).

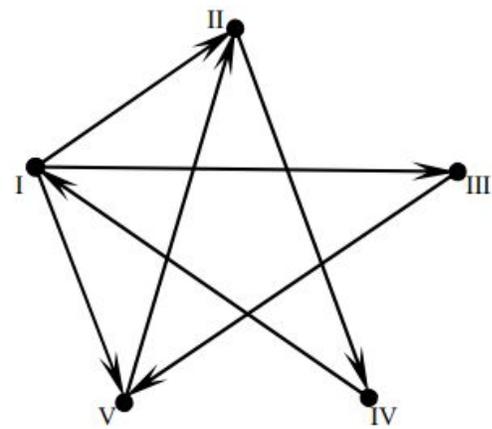
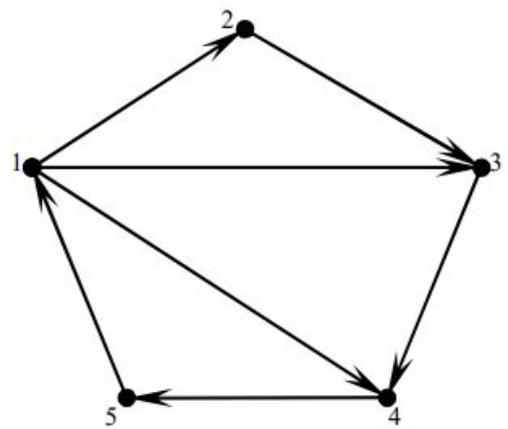


Рисунок 1

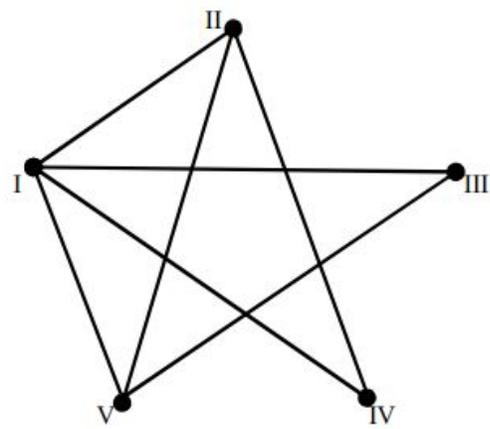
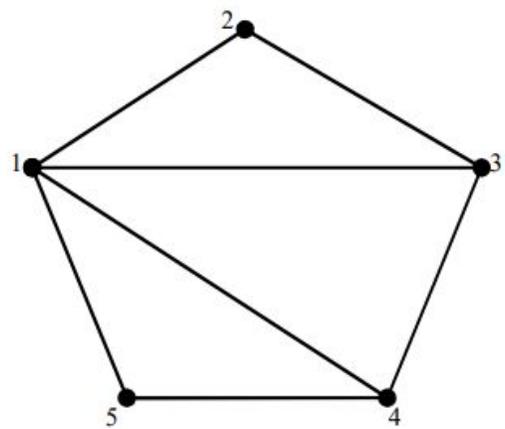


Рисунок 2

Другое задание графа - списком. Можно считать, что в соответствии с теоретико-множественным определением 1 графа все элементы множества $R \subseteq V \times V$, входящего в это определение, т.е. упорядоченные пары, упорядочены сначала по первым элементам пар, а затем по вторым, в соответствии с нумерацией элементов множества V . Тогда два представления графа с рисунка 1 будут заданы двумя списками:

1	2, 3, 4	I	II, III, V
2	3	II	IV
3	4	III	V
4	5	IV	I
5	1	V	II

Два представления графа с рисунка 2 будут заданы списками:

1	2, 3, 4, 5	I	II, III, IV, V
2	1, 3	II	I, IV, V
3	1, 2, 4	III	I, V
4	1, 3, 5	IV	I, II
5	1, 4	V	I, II, III

Два представления графа с рисунка 1 будут заданы также своими множествами R :

$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ - в первом случае,

$R = \{(I, II), (I, III), (I, IV), (I, V), (II, IV), (II, V), (III, V)\}$ - во втором случае.

Два представления графа с рисунка 2 будут заданы также своими множествами X :

$X = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$ - в первом случае,

$X = \{\{I, II\}, \{I, III\}, \{I, IV\}, \{I, V\}, \{II, IV\}, \{II, V\}, \{III, V\}\}$ - во втором случае.

Третье задание графа – матрицами. Ниже, в соответствии с матричным определением 1, выписаны две матрицы смежности - A_1 и A_2 , задающие два представления графа с рисунка 1:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

и две матрицы смежности \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2 , задающие два представления графа с рисунка 2:

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Графы с рисунка 1 могут быть заданы своими ориентированными матрицами инцидентий B_1 и B_2 :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(Нумерация дуг произведена в том порядке, в котором пары, задающие дуги, выписаны в соответствующих множествах R).

Графы с рисунка 2 могут быть заданы своими матрицами инцидентий \tilde{B}_1 и \tilde{B}_2 :

$$\tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Нумерация ребер произведена в том порядке, в котором пары, задающие ребра, выписаны в соответствующих множествах X).

Матричное определение графа позволяет вести речь о нормальной форме графа (нормальной форме его матрицы смежности относительно преобразования P -подобия).

Матричное определение 2 позволяет предложить эффективные алгоритмы вершинной и реберной раскрасок графа, а также решить задачу описания всех путей ведущих из i -ой вершины в j -ую. Причем решать эти задачи можно с помощью булевой арифметики или арифметики по модулю 2.

Матричное определение 3 (точнее представление графа как линейного отображения пространства дуг в пространство вершин) позволяет решать задачу описания всех путей ведущих из i -ой вершины в j -ую в ориентированном графе. Решение этой задачи сводится к решению системы линейных алгебраических неоднородных уравнений над полем по модулю 3.