Графы

Графом называется простейшая модель связанной системы, т. е. некоторая выделенная совокупность объектов, между каждой парой элементов которой установлено наличие или отсутствие связи.

Если кроме факта связи устанавливается и её направление (ориентация связи), то граф называется ***ориентированным***.

Неориентированный граф легко моделируется ориентированным: факт наличия связи между двумя различными элементами моделируется двумя ориентированными связями – связью «туда» и связью «обратно».

Теория графов – наука, которая занимается изучением свойств графов и различными способами их математического моделирования (различными способами их интерпретации).

Вершины – элементы связанной системы, составляющей граф.

Смежные вершины – две различные вершины, между которыми существует связь.

Один и тот же граф с различным образом помеченными вершинами называется ***различный представитель графа***. Они рассматриваются как разные объекты.

Различные представители графа ***изоморфны***, т.е. между их вершинами существует взаимнооднозначное соответствие, сохраняющее смежность вершин.

Вершины можно моделировать точками на плоскости. В этом случае связь между любыми двумя вершинами можно моделировать ***направленным*** или ***ненаправленным*** отрезком кривой.

Граф моделируется двумя множествами – ***множеством вершин*** и ***множеством отрезков***, которые для удобства различают в названиях.

Направленные отрезки называются ***дугами***, а ненаправленные ***ребрами***.

Вершина, ограничивающая ребро называется ***инцидентной*** этому ребру (дуге), и наоборот.

Моделируем элементы, составляющую систему, как элементы некоторого множества вершин V, а ненаправленные связи (ребра) между некоторыми парами вершин, как двухэлементные подмножества множества вершин.

В этом случае две вершины называются ***смежными***, если они принадлежат одному и тому же двухэлементному подмножеству. Вершина и ребро (двухэлементное подмножество) называются ***инцидентными*** друг другу, если вершина принадлежит этому ребру.

Аналогично с ненаправленными моделируются ***направленные*** связи связанной системы, как упорядоченные двухэлементные подмножества, точнее как упорядоченные пары.

Матрица смежности графа

Любая упорядоченная пара-дуга (,) i j v v заданного n-элементного множества вершин 1 2 { , ,..., } V v v v = n , вернее её наличие или отсутствие в описании связанной системы, однозначно определяется значением 1 или 0 соответственно на (i,j)-ом месте квадратной матрицы порядка n.

Матрица B размерности $n \times m$ с элементами b_{ij} называется матрицей инцидентности для графа G с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ и множеством ребер $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, если $b_{ij} = 1$, когда вершина v_i инцидентна ребру x_j и $b_{ij} = 0$ в противном случае.

Матрица B размерности $n \times q$ с элементами b_{ij} называется ориентированной матрицей инцидентности для графа G с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ и множеством дуг $R = \{r_1, r_2, ..., r_q\}$, если $b_{ij} = 1$, когда вершина v_i инцидентна началу дуги r_j (когда вершина v_i совпадает с первым элементом пары r_j), $b_{ij} = 0$ когда v_i не инцидентна дуге r_j и $b_{ij} = -1$, когда вершина v_i инцидентна концу дуги r_j (когда вершина v_i совпадает со вторым элементом пары r_j).

Графом называется фигура, состоящая из точек, называемых вершинами, и отрезков, соединяющих некоторые из этих вершин. Соединяющие отрезки могут быть направленными (дугами - случай ориентированного графа), ненаправленными (ребрами - случай неориентированного графа), прямолинейными или криволинейными.

Отрезок, соединяющий вершину с самой собой, называется ***петлей***.

Теоретико-множественное 1 – *ориентированным графом* называется пара (V,R), где V – некоторое конечное множество, элементы которого называются *вершинами*, а $R \subseteq V \times V$, т.е. некоторое подмножество декартова произведения множества V на себя, или бинарное отношение на V. Элементы множества R , т.е. упорядоченные пары $(u,v) \in R$ (где $u,v \in V$) соответствуют *дугам* предыдущего определения. Обозначается граф обычно через G(V,R).

Теоретико-множественное 2 – *неориентированным графом* называется пара (V,X), где элементы множества V называются вершинами, а элементы множества X – некоторые двухэлементные подмножества множества V, называются ребрами. Обозначается обыкновенный граф обычно через G(V,X).

(Множество X можно описать следующим образом: $X \subseteq \Omega$, где $\Omega = \{\{u,v\} \mid u,v \in V\}$).

Матричное 1 – ***ориентированным графом*** называется множество (класс) квадратных (0,1)-матриц, перестановочно подобных между собой. (Две квадратные матрицы называются *перестановочно подобными* (Р-подобными), если от одной к другой можно перейти с помощью перестановки рядов, т.е. с помощью перестановки строк и такой же перестановки столбцов.)

Матрицы, в этом определении, называются ***матрицами смежности графа.***

Матричное 2 – ***обыкновенным неориентированным графом*** называется множество (класс) (0,1)-матриц инцидентности B, перестановочно эквивалентных между собой.

Матрицы B характеризуются тем, что у них все столбцы различные и у каждого столбца только два элемента равны 1, а все остальные элементы столбца равны 0.

Две матрицы инциденций называются ***перестановочно эквивалентными,*** если одна может быть получена из другой с помощью некоторой перестановки строк и некоторой перестановки столбцов.

Матричное 3 – ***обыкновенным ориентированным графом*** называется множество (класс) ориентированных матриц инцидентности B, перестановочно эквивалентных между собой. Ориентированные матрицы инцидентности B характеризуются тем, что у них все столбцы различные и у каждого столбца только два элемента отличны от нуля, один из которых равен единице, а другой – минус единице.

Замечание 1. Матричные определения 1, 2 и 3 отличаются от предыдущих тем, что определяют граф как класс объектов (матриц). Это объясняется тем, что при матричном моделировании связей приходится указывать привязку связываемых элементов двух экземпляров одного множества и двух разных множеств к месту в матрице.

Замечание 2. Матричное определение 1 позволяет включить в определение графа как псевдографы (графы с петлями), так и неориентированные графы.

Замечание 3. Матричные определения 2 и 3 не позволяют обобщения графа на псевдографы, однако если в этом определении отказаться от требования различия столбцов мы получим обобщение определений обыкновенных графов на мультиграфы (графы с кратными связями).

Замечание 4. Отношение перестановочного подобия и отношение перестановочной эквивалентности являются частными случаями бинарного отношения эквивалентности и позволяют разбить соответствующие множества на непересекающиеся подмножества эквивалентных между собой элементов (матриц).

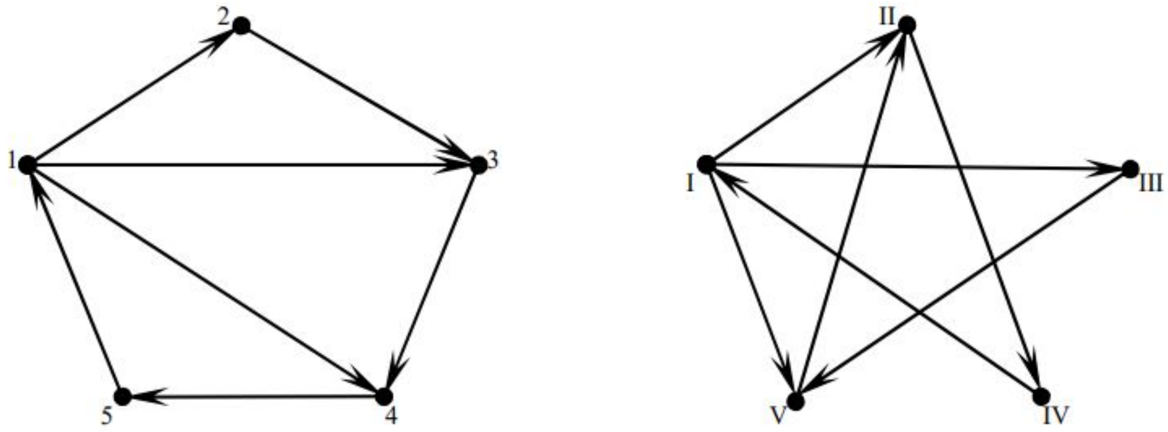

Рисунок 1

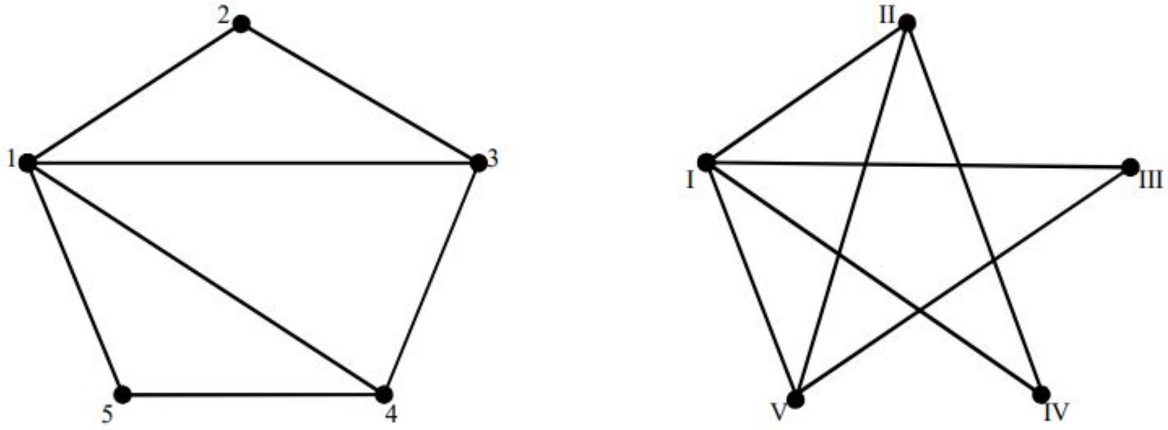

Рисунок 2

Другое задание графа - списком. Можно считать, что в соответствии с теоретико-множественным определением 1 графа все элементы множества $R \subseteq V \times V$, входящего в это определение, т.е. упорядоченные пары, упорядочены сначала по первым элементам пар, а затем по вторым, в соответствии с нумерацией элементов множества V. Тогда два представления графа с рисунка 1 будут заданы двумя списками:

1	2, 3, 4
2	3
3	4
4	5
5	1

I	II, III, V
II	IV
III	V
IV	I
V	II

Два представления графа с рисунка 2 будут заданы списками:

1	2, 3, 4, 5
2	1, 3
3	1, 2, 4
4	1, 3, 5
5	1, 4

I	II, III, IV, V
II	I, IV, V
III	I, V
IV	I, II
V	I, II, III

Два представления графа с рисунка 1 будут заданы также своими множествами R:

$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(3,4),(4,5)\}$ - в первом случае,

$R = \{(I,II),(I,III),(I,IV),(I,V),(II,IV),(II,V),(III,V)\}$ - во втором случае.

Два представления графа с рисунка 2 будут заданы также своими множествами X:

$X = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\}\}$ - в первом случае,

$X = \{\{I,II\},\{I,III\},\{I,IV\},\{I,V\},\{II,IV\},\{II,V\},\{III,V\}\}$ - во втором случае.

Третье задание графа – матрицами. Ниже, в соответствии с матричным определением 1, выписаны две матрицы смежности - A_1 и A_2, задающие два представления графа с рисунка 1:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

и две матрицы смежности $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$, задающие два представления графа с рисунка 2:

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Графы с рисунка 1 могут быть заданы своими ориентированными матрицами инциденций B_1 и B_2:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(Нумерация дуг произведена в том порядке, в котором пары, задающие дуги, выписаны в соответствующих множествах R).

Графы с рисунка 2 могут быть заданы своими матрицами инциденций $\tilde{B}_1$ и $\tilde{B}_2$:

$$\tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Нумерация ребер произведена в том порядке, в котором пары, задающие ребра, выписаны в соответствующих множествах X).

Матричное определение графа позволяет вести речь о нормальной форме графа (нормальной форме его матрицы смежности относительно преобразования Р-подобия).

Матричное определение 2 позволяет предложить эффективные алгоритмы вершинной и реберной раскрасок графа, а также решить задачу описания всех путей ведущих из i-ой вершины в j-ую. Причем решать эти задачи можно с помощью булевой арифметики или арифметики по модулю 2.

Матричное определение 3 (точнее представление графа как линейного отображения пространства дуг в пространство вершин) позволяет решать задачу описания всех путей ведущих из i-ой вершины в j-ую в ориентированном графе. Решение этой задачи сводится к решению системы линейных алгебраических неоднородных уравнений над полем по модулю 3.