

Базис векторного пространства



Для векторов в пространстве, на плоскости и на прямой:

Определение.

- 1) **Базисом** в пространстве называются любые 3 некопланарных вектора, взятые в определенном порядке.
- 2) **Базисом** на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.
- 3) **Базисом** на прямой называется любой ненулевой вектор.



Определение. Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3$, то числа α, β и γ - называются **компонентами или координатами** вектора \vec{a} в этом базисе.

В связи с этим можно записать следующие **свойства**:

- равные векторы имеют одинаковые координаты,
- при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$$\lambda \vec{a} = \lambda(\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3) = (\lambda\alpha) \vec{e}_1 + (\lambda\beta) \vec{e}_2 + (\lambda\gamma) \vec{e}_3.$$

- при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3; \quad \vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3;$$
$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1) \vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \vec{e}_3.$$



В зависимости от того, о каком линейном пространстве идет речь, базис могут составлять различное количество векторов. Например, в случае n -мерного линейного пространства базис состоит из n линейно независимых векторов e_1, e_2, \dots, e_n , а любой вектор x этого линейного пространства можно представить в виде линейной комбинации векторов e_1, e_2, \dots, e_n , или, как говорят, разложить по базису:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n.$$

В этом случае вектор x имеет координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

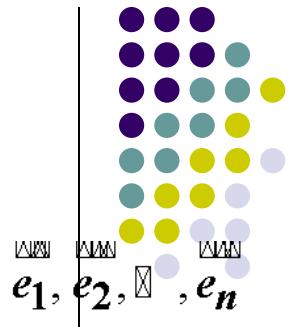
Замечание: Разложение вектора по базису единственно.



Важной задачей является узнать, как связаны между собой координаты x в разных базисах.

Пусть вектор x в базисе e_1, e_2, \dots, e_n имеет координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Узнаем какие координаты будет иметь вектор x в базисе e_1, e_2, \dots, e_n , если каждый вектор e_i можно разложить по базису e_1, e_2, \dots, e_n :

$$\begin{aligned}
 e_1 &= s_{11}e_1 + s_{12}e_2 + \dots + s_{1n}e_n, \\
 e_2 &= s_{21}e_1 + s_{22}e_2 + \dots + s_{2n}e_n, \\
 &\dots \\
 e_n &= s_{n1}e_1 + s_{n2}e_2 + \dots + s_{nn}e_n
 \end{aligned}$$



Определение: Матрицей $S = (s_{ij})$ называется матрицей перехода от базиса e_1, e_2, \dots, e_n к базису e_1, e_2, \dots, e_n .

Тогда справедлива теорема:

Теорема: Для любого вектора x линейного пространства L справедливо:

$$x_e = x_{e'} \cdot S.$$

В самом деле, пусть в базисе e_1, e_2, \dots, e_n вектор x имеет координаты $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

Тогда

$$\begin{aligned} x &= \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n = \\ &= \beta_1 (s_{11} e_1 + s_{12} e_2 + \dots + s_{1n} e_n) + \beta_2 (s_{21} e_1 + s_{22} e_2 + \dots + s_{2n} e_n) + \\ &+ \dots + \beta_n (s_{n1} e_1 + s_{n2} e_2 + \dots + s_{nn} e_n) = \\ &= (\beta_1 s_{11} + \beta_2 s_{21} + \dots + \beta_n s_{n1}) e_1 + (\beta_1 s_{12} + \beta_2 s_{22} + \dots + \beta_n s_{n2}) e_2 + \\ &+ \dots + (\beta_1 s_{1n} + \beta_2 s_{2n} + \dots + \beta_n s_{nn}) e_n \end{aligned}$$



С другой стороны, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \cdot \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$,

Перемножим матрицы:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = ((\beta_1 s_{11} + \beta_2 s_{21} + \dots + \beta_n s_{n1}), (\beta_1 s_{12} + \beta_2 s_{22} + \dots + \beta_n s_{n2}), \dots, (\beta_1 s_{1n} + \beta_2 s_{2n} + \dots + \beta_n s_{nn})).$$

Или

$$\alpha_1 = \beta_1 s_{11} + \beta_2 s_{21} + \dots + \beta_n s_{n1},$$

$$\alpha_2 = \beta_1 s_{12} + \beta_2 s_{22} + \dots + \beta_n s_{n2},$$

$$\dots, \dots, \dots, \dots, \dots,$$

$$\alpha_n = \beta_1 s_{1n} + \beta_2 s_{2n} + \dots + \beta_n s_{nn}$$

Сравнивая полученные результаты, видим что $\alpha = \beta \cdot S$.



Из данной теоремы следует, что координаты вектора \mathbf{x} в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ можно найти, решив матричное уравнение, а именно:

$$\mathbf{x}_{e'} = \mathbf{x}_e \cdot \mathbf{S}^{-1}.$$

Пример: Найти координаты вектора \mathbf{x} в базисе $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

$$1) \mathbf{x} = \{6; -1; 3\}, \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

$$x = \{6; -1; 3\}, \quad \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 2e_3 \\ e'_2 = 2e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$



Решение 1 (без матрицы перехода): Чтобы найти координаты вектора $x_{e'} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

в базисе (e'_1, e'_2, e'_3) , нужно найти три числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, такие что:

$$x = \alpha_1 \cdot e'_1 + \alpha_2 \cdot e'_2 + \alpha_3 \cdot e'_3$$

$$x = \alpha_1 (e_1 + e_2 + 2e_3) + \alpha_2 (2e_1 - e_2) + \alpha_3 (-e_1 + e_2 + e_3)$$

$$x = (\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)e_2 + (2\alpha_1 + \alpha_3)e_3$$

$$\{6; -1; 3\} = \{\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_3\}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 6 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = -1 \\ 2\alpha_1 \quad \quad \alpha_3 = 3 \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера:

$$x = \{6; -1; 3\}, \quad \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 2e_3 \\ e'_2 = 2e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$



$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 4 - 2 - 0 - 2 = -1,$$

$$\Delta_{\alpha_1} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 0 + 6 - 3 - 0 + 2 = -1, \quad \alpha_1 = \frac{\Delta_{\alpha_1}}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1,$$

$$\Delta_{\alpha_2} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 3 + 12 - 2 - 3 - 6 = -3, \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_{\alpha_2}}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3,$$

$$\Delta_{\alpha_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 0 - 4 + 12 - 0 - 6 = -1, \quad \alpha_3 = \frac{\Delta_{\alpha_3}}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Таким образом, координаты вектора x в базисе (e'_1, e'_2, e'_3) будут $(1, 3, 1)$.

$$x = \{6; -1; 3\}, \quad \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 2e_3 \\ e'_2 = 2e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$



Решение 2 (с матрицей перехода):

С другой стороны базис (e'_1, e'_2, e'_3) может быть задан матрицей перехода

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Тогда если справедливо, что } \boxed{x_e} = \boxed{x_{e'}} \cdot S, \quad \text{то } \boxed{x_{e'}} = \boxed{x_e} \cdot S^{-1}.$$

$$\text{Найдем } S^{-1} = \frac{1}{|S|} (S^*)^T.$$

$$|S| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 + 0 - 2 - 0 - 2 = -1,$$

$$x = \{6; -1; 3\}, \quad \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 2e_3 \\ e'_2 = 2e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$



$$S_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad S_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad S_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$S_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad S_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad S_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$S_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad S_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4, \quad S_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Тогда $S^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, а обратная матрица будет равна

$$S^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x} = \{6; -1; 3\}, \quad \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \end{cases}$$



Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{X} \mathbf{x}_{e'} &= \mathbb{X} \mathbf{x}_e \cdot \mathbf{S}^{-1} = (6, -1, 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= (6 - 2 - 3, -6 + 3 + 6, -12 + 4 + 9) = \underline{(1, 3, 1)} \end{aligned}$$