Базис векторного пространства

Для векторов в пространстве, на плоскости и на прямой:

<u>Определение.</u>

1) **Базисом** в пространстве называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) **Базисом** на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

3)**Базисом** на прямой называется любой ненулевой вектор.

Определение. Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3$, то числа α, β и γ - называются **компонентами или координатами** вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

В связи с этим можно записать следующие **свойства**:

- равные векторы имеют одинаковые координаты,
- при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$$\lambda \vec{a} = \lambda(\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3) = (\lambda\alpha)\vec{e}_1 + (\lambda\beta)\vec{e}_2 + (\lambda\gamma)\vec{e}_3 .$$

- при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 ; \qquad \vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3 ;$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\vec{e}_3 .$$

В зависимости от того, о каком линейном пространстве идет речь, базис могут составлять различное количество векторов. Например, в случае n-мерного линейного пространства базис состоит из n <u>линейно независимых векторов</u> $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, а любой вектор $\vec{x}$ этого линейного пространства можно представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, или , как говорят, разложить по базису:

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n .$$

В этом случае вектор $\vec{x}$ имеет координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Замечание: Разложение вектора по базису единственно.

Важной задачей является узнать, как связаны между собой координаты $\vec{x}$ в разных базисах.

Пусть вектор $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ имеет координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Узнаем какие координаты будет иметь вектор $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \ldots, \vec{e}_n{}'$, если каждый вектор $\vec{e}_i{}'$ можно разложить по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$:

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_1{}' &= s_{11}\vec{e}_1 + s_{12}\vec{e}_2 + \ldots + s_{1n}\vec{e}_n,\\
\vec{e}_2{}' &= s_{21}\vec{e}_1 + s_{22}\vec{e}_2 + \ldots + s_{2n}\vec{e}_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\vec{e}_n{}' &= s_{n1}\vec{e}_1 + s_{n2}\vec{e}_2 + \ldots + s_{nn}\vec{e}_n
\end{aligned}
$$

Определение: Матрицей $S=\left(s_{ij}\right)$ называется матрицей перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$.

Тогда справедлива теорема:

Теорема: Для любого вектора $\vec{x}$ линейного пространства L справедливо:

$$\boxed{\vec{x}_e = \vec{x}_{e'} \cdot S}.$$

В самом деле, пусть в базисе $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$ вектор $\vec{x}$ имеет координаты $\left(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\right)$.

Тогда

$$\vec{x} = \beta_1 \vec{e}\,'_1 + \beta_2 \vec{e}\,'_2 + \ldots + \beta_n \vec{e}\,'_n =$$

$$= \beta_1\left(s_{11}\vec{e}_1 + s_{12}\vec{e}_2 + \ldots + s_{1n}\vec{e}_n\right) + \beta_2\left(s_{21}\vec{e}_1 + s_{22}\vec{e}_2 + \ldots + s_{2n}\vec{e}_n\right) +$$

$$+ \ldots + \beta_n\left(s_{n1}\vec{e}_1 + s_{n2}\vec{e}_2 + \ldots + s_{nn}\vec{e}_n\right) =$$

$$= \left(\beta_1 s_{11} + \beta_2 s_{21} + \ldots + \beta_n s_{n1}\right)\vec{e}_1 + \left(\beta_1 s_{12} + \beta_2 s_{22} + \ldots + \beta_n s_{n2}\right)\vec{e}_2 +$$

$$+ \ldots + \left(\beta_1 s_{1n} + \beta_2 s_{2n} + \ldots + \beta_n s_{nn}\right)\vec{e}_n$$

С другой стороны, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \cdot \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \ldots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \ldots & s_{nn} \end{pmatrix}$,

Перемножим матрицы:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$

$$((\beta_1 s_{11} + \beta_2 s_{21} + \ldots + \beta_n s_{n1}), (\beta_1 s_{12} + \beta_2 s_{22} + \ldots + \beta_n s_{n2}), \ldots, (\beta_1 s_{1n} + \beta_2 s_{2n} + \ldots + \beta_n s_{nn}))$$

Или

$$\alpha_1 = \beta_1 s_{11} + \beta_2 s_{21} + \ldots + \beta_n s_{n1},$$

$$\alpha_2 = \beta_1 s_{12} + \beta_2 s_{22} + \ldots + \beta_n s_{n2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\alpha_n = \beta_1 s_{1n} + \beta_2 s_{2n} + \ldots + \beta_n s_{nn}$$

Сравнивая полученные результаты, видим что $\vec{x}_e = \vec{x}_{e'} \cdot S$.

Из данной теоремы следует, что координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ можно найти, решив матричное уравнение, а именно:

$$\boxed{\vec{x}_{e'} = \vec{x}_e \cdot S^{-1}}.$$

Пример: Найти координаты вектора **x** в базисе (e_1', e_2', e_3'), если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

1) $x = \{6; -1; 3\}$, $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 2e_3 \\ e_2' = 2e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$

$$x=\{6;-1;3\},\quad \begin{cases} e_1'=e_1+e_2+2e_3 \\ e_2'=2e_1-e_2 \\ e_3'=-e_1+e_2+e_3 \end{cases}$$

Решение 1 (без матрицы перехода): Чтобы найти координаты вектора $x_{e'}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ в базисе (e_1', e_2', e_3'), нужно найти три числа $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, такие что:

$$x=\alpha_1\cdot e_1'+\alpha_2\cdot e_2'+\alpha_3\cdot e_3'$$

$$x=\alpha_1(e_1+e_2+2e_3)+\alpha_2(2e_1-e_2)+\alpha_3(-e_1+e_2+e_3)$$

$$x=(\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3)e_1+(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)e_2+(2\alpha_1+\alpha_3)e_3$$

$$\{6;-1;3\}=\{\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1+\alpha_3\}$$

$$\begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=6 \\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=-1 \\ 2\alpha_1\qquad\quad \alpha_3=3 \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера:

$$x=\{6;-1;3\},\quad \begin{cases} e_1' = e_1+e_2+2e_3 \\ e_2' = 2e_1-e_2 \\ e_3' = -e_1+e_2+e_3 \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1+0+4-2-0-2=-1,$$

$$\Delta_{\alpha_1}=\begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6-0+6-3-0+2=-1,\ \ \alpha_1=\frac{\Delta_{\alpha_1}}{\Delta}=\frac{-1}{-1}=1,$$

$$\Delta_{\alpha_2}=\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1-3+12-2-3-6=-3,\ \ \alpha_2=\frac{\Delta_{\alpha_2}}{\Delta}=\frac{-3}{-1}=3,$$

$$\Delta_{\alpha_3}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3+0-4+12-0-6=-1,\ \ \alpha_3=\frac{\Delta_{\alpha_3}}{\Delta}=\frac{-1}{-1}=1.$$

Таким образом, координаты вектора **x** в базисе (e_1', e_2', e_3') будут $(1,3,1)$.

$$x = \{6; -1; 3\}, \quad \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 2e_3 \\ e_2' = 2e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

Решение 2 (с матрицей перехода):

С другой стороны базис (e_1', e_2', e_3') может быть задан матрицей перехода $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда если справедливо, что $\vec{x}_e = \vec{x}_{e'} \cdot S$, то $\vec{x}_{e'} = \vec{x}_e \cdot S^{-1}$.

Найдем $S^{-1} = \dfrac{1}{|S|}\left(S^*\right)^T$.

$$|S| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 + 0 - 2 - 0 - 2 = -1,$$

$$x=\{6;-1;3\},\quad \begin{cases} e_1'=e_1+e_2+2e_3\\ e_2'=2e_1-e_2\\ e_3'=-e_1+e_2+e_3 \end{cases}$$

$$S_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1,\quad S_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-2,\quad S_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1,$$

$$S_{21}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1,\quad S_{22}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3,\quad S_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-2,$$

$$S_{31}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}=2,\quad S_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=4,\quad S_{33}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3.$$

Тогда $S^*=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 4 & -3\end{pmatrix}$, а обратная матрица будет равна

$$S^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 4 & -3\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & -3 & -4\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

$$x = \{6; -1; 3\}, \qquad \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 2e_3 \\ e_2' = 2e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

Тогда

$$\vec{x}_{e'} = \vec{x}_e \cdot S^{-1} = (6, -1, 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= (6-2-3,\ -6+3+6, -12+4+9) = \underline{(1,\ 3,\ 1)}$$