Определенный интеграл

Решите:

- **Вариант 1**

$$1. \int (\mathbf{2}x + e^{x})dx$$

$$2. \int (\mathbf{3} - \mathbf{4}x)^{\mathbf{6}} dx$$

$$3. \int \cos \mathbf{4}x dx$$

$$4. \int e^{\mathbf{2}x} dx$$

- **Вариант 2**

$$1. \int (\mathbf{3} - \mathbf{5}x)dx$$

$$2. \int \sin \mathbf{3}x dx$$

$$3. \int (\mathbf{2}x + \mathbf{6})^{\mathbf{4}} dx$$

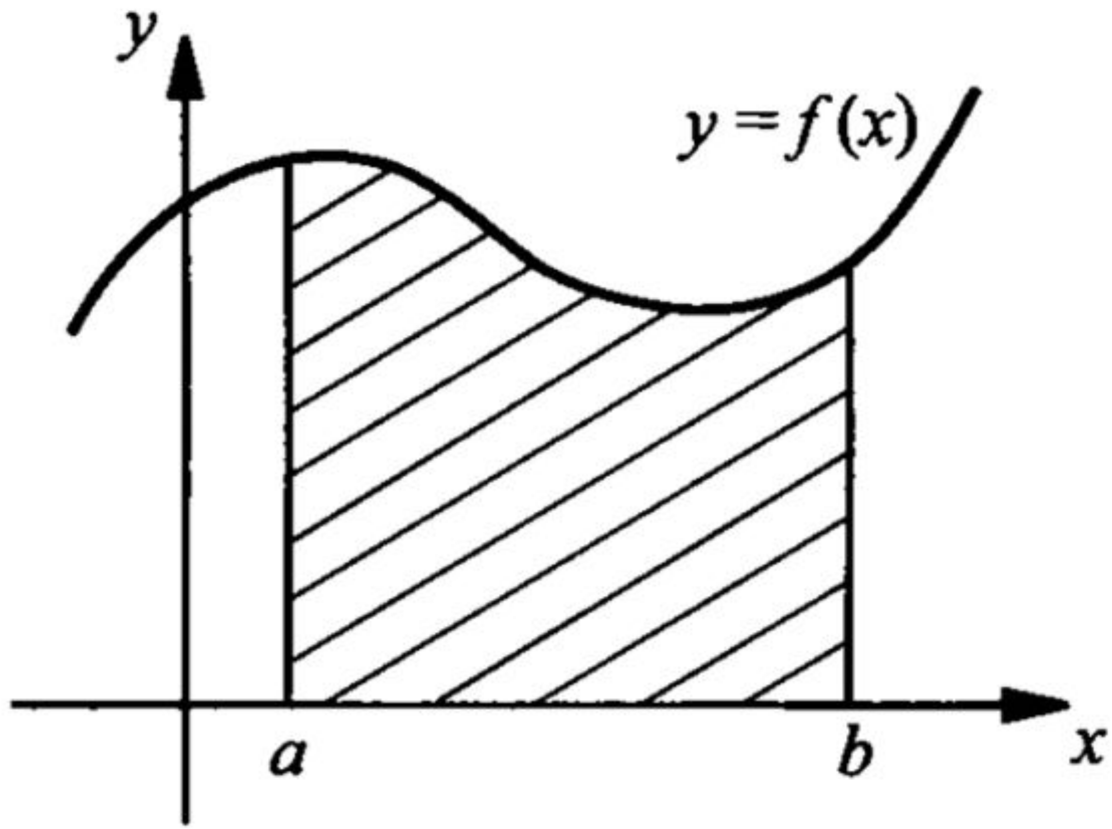
$$4. \int \frac{\mathbf{2}dx}{\mathbf{3}x}$$

Множество всех первообразных функции f(x) называется *неопределенным интегралом* от функции f(x) на этом промежутке и обозначается

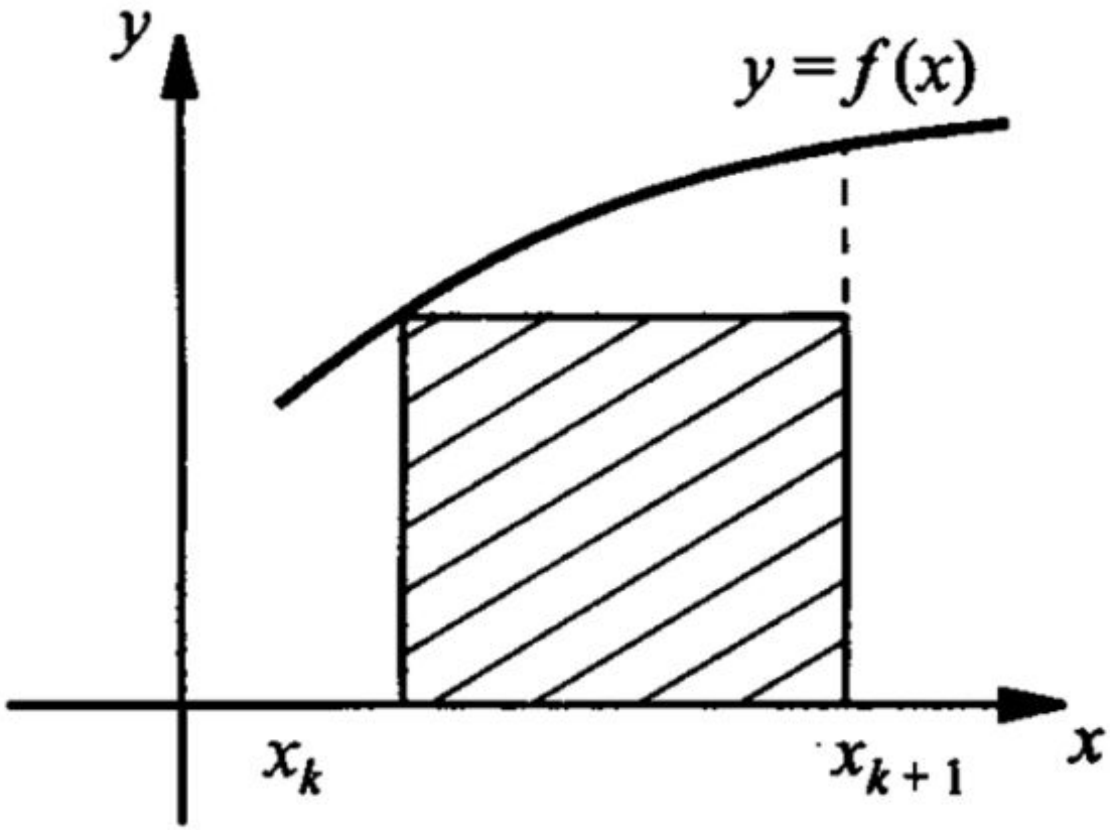
$$\int f(x)\,dx$$

Задача 1. Площадь криволинейной трапеции.

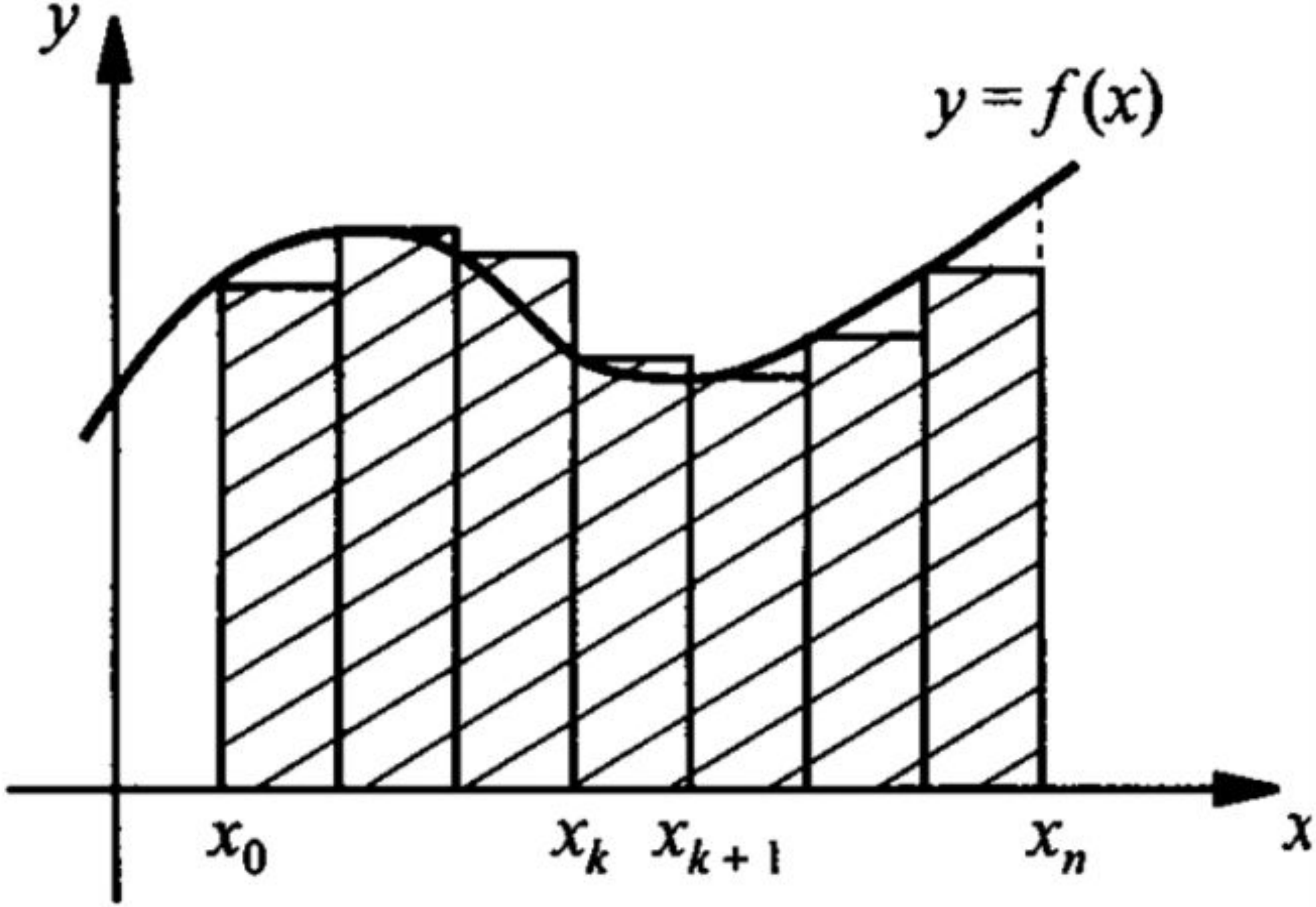
Фигуру, ограниченную графиком функции y = f(x), осью OX и прямыми x = a и x = b, называют *криволинейной трапецией.*



Разобьем отрезок $[a; b]$ на n равных частей точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n\ 1}$. Построим прямоугольники со сторонами $x_{k+1} - x_k$ и $f(x_k)$.

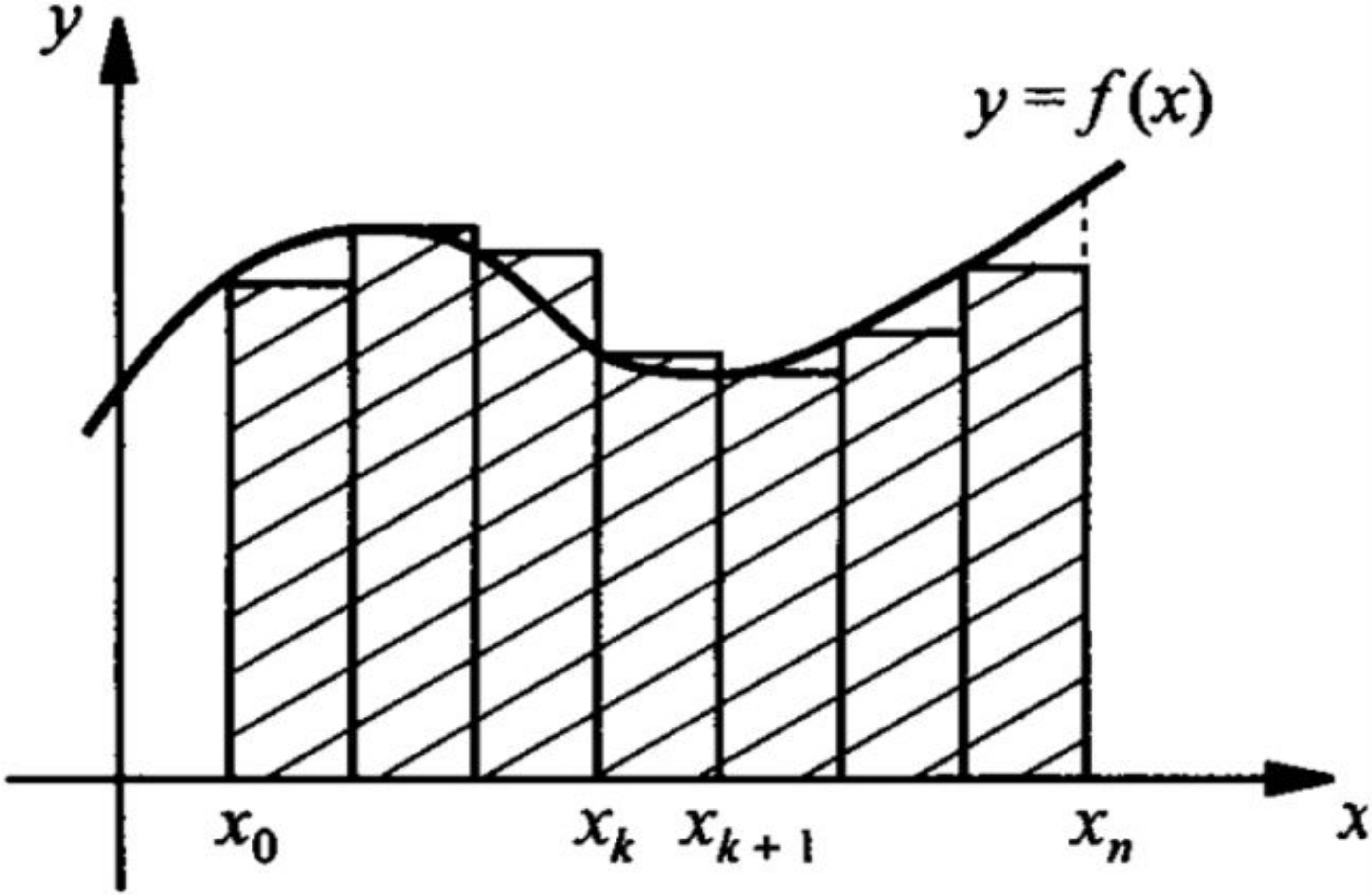


$$S = f(x_k) \cdot (x_{k-1} - x_k) = f(x_k) \cdot \Delta x_k$$



$$S_n = f(x_0)\cdot\Delta x_0 + f(x_1)\cdot\Delta x_1 + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1}$$

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$$



$$S \approx S_n$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

При решении задач для непрерывной на отрезке [a;b] функции f(x) используется математическая модель:

1) Отрезок $[a; b]$ разбивался на n равных частей.

2) Составлялась сумма $S_n = f(x_0)\cdot\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$

(эту сумму называют интегральной суммой).

3) Вычислялся $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Доказывается, что такой предел существует.

Его называют **определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают символом $\int\limits_a^b f(x)dx$ (читается: интеграл от a до b эф от икс дэ икса). **Числа *a* и *b*** называются **пределами интегрирования**: a – нижним пределом, b – верхним. **Знак** $\int$ называют **знаком интегрирования**. Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, переменная x – **переменной интегрирования**.

Формула площади криволинейной трапеции имеет вид:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

В этом состоит **геометрический смысл** определенного интеграла.

-

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Такую формулу называют **формулой Ньютона-Лейбница**.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Определенный интеграл.

Пример. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 x^4\,dx$$

Решение. Первообразной для x^4 служит $\dfrac{x^5}{5}$

Воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница

$$\int_1^2 x^4\,dx = \frac{x^5}{5}\Big|_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5} = \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$$

Ответ: 31/5

244. Найти $\int\limits_1^2 (5x^4 + 2x - 8)\,dx$.

Решение. $\int\limits_1^2 (5x^4+2x-8)\,dx = \int\limits_1^2 5x^4\,dx + \int\limits_1^2 2x\,dx - \int\limits_1^2 8\,dx = x^5\Big|_1^2 + x^2\Big|_1^2 - 8x\Big|_1^2 = (2^5 - 1^5) + (2^2 - 1^2) - 8(2-1) = 26.$

Решение. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = -\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} \right) =$

$= -\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \right) = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$

Основные формулы интегрирования

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$

   $n \neq -1,\ x > 0$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C,\ |x| < |a|$
12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$
13. «Высокий» логарифм:

    $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ |x| \neq a$$
14. «Длинный» логарифм:

    $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Вычисление определенных интегралов методов подстановки

285. $\int\limits_0^1 (4x^3+1)^5 x^2 dx.$

Решение. $\int\limits_0^1 (4x^3+1)^5 x^2 dx = \left| \begin{array}{l} t = 4x^3+1, \quad t_1 = 4\cdot 0^3 + 1 = 1, \\ dt = 12x^2 dx, \quad t_2 = 4\cdot 1^3 + 1 = 5 \\ x^2 dx = \frac{1}{12} dt; \end{array} \right| =$

$$= \frac{1}{12}\int\limits_1^5 t^5 dt = \frac{1}{12}\cdot\frac{t^6}{6}\Big|_1^5 = \frac{1}{72}(5^6 - 1^6) = 217.$$

288. $\int\limits_0^1 \frac{x^3\,dx}{5x^4+1}$.

Решение. $\int\limits_0^1 \frac{x^3\,dx}{5x^4+1} = \left| \begin{array}{l} t = 5x^4+1,\ t_1 = 5\cdot 0^4+1 = 1, \\ dt = 20x^3\,dx,\ t_2 = 5\cdot 1^4+1 = 6 \\ x^3\,dx = \frac{1}{20}\,dt; \end{array} \right| = \frac{1}{20} \int\limits_1^6 \frac{dt}{t} =$

$= \frac{1}{20}\ln t \,\Big|_1^6 = \frac{1}{20}(\ln 6 - \ln 1) = \frac{1}{20}\ln 6.$

Теперь вычислим этот интеграл иначе, а именно, найдем первообразную функцию и возвратимся к старой переменной, не меняя пределов интегрирования:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^3\,dx}{5x^4+1} = \left| \begin{array}{l} t = 5x^4+1, \\ dt = 20x^3\,dx, \\ x^3\,dx = \frac{1}{20}\,dt \end{array} \right| = \frac{1}{20}\ln t = \frac{1}{20}\ln(5x^4+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{20}(\ln 6 - \ln 1) =$$

$$= \frac{1}{20}\ln 6.$$

Вычислите:

1. $\int_{1}^{3} 8x^3 dx$

2. $\int_{1}^{4} \sqrt{x} dx$

3. $\int_{-1}^{2} (2x + 3x^2 + 4) dx$

4. $\int_{0}^{\pi/2} \cos x dx$

5. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x}$

6. $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

7. $\int_{2}^{3} (2x-3)^2 dx$

8. $\int_{0}^{1} (4x^3+1)x^2 dx$

9. $\int_{0}^{1} e^{2x} dx$

10. $\int_{0}^{\pi/4} \sin 4x dx$

281. $\int_{2}^{3}(2x-1)^3\,dx.$

282. $\int_{1}^{2}\frac{5dx}{\sqrt{5x-1}}.$

283. $\int_{1}^{5}\sqrt{(2x-1)^3}\,dx.$

284. $\int_{0}^{2}5\sqrt[3]{(x-2)^2}\,dx.$

285. $\int_{0}^{1}(4x^3+1)^5x^2\,dx.$