

Определенный интеграл



Решите:

• Вариант 1

$$1. \int (2x + e^x) dx$$

$$2. \int (3 - 4x)^6 dx$$

$$3. \int \cos 4x dx$$

$$4. \int e^{2x} dx$$

• Вариант 2

$$1. \int (3 - 5x) dx$$

$$2. \int \sin 3x dx$$

$$3. \int (2x + 6)^4 dx$$

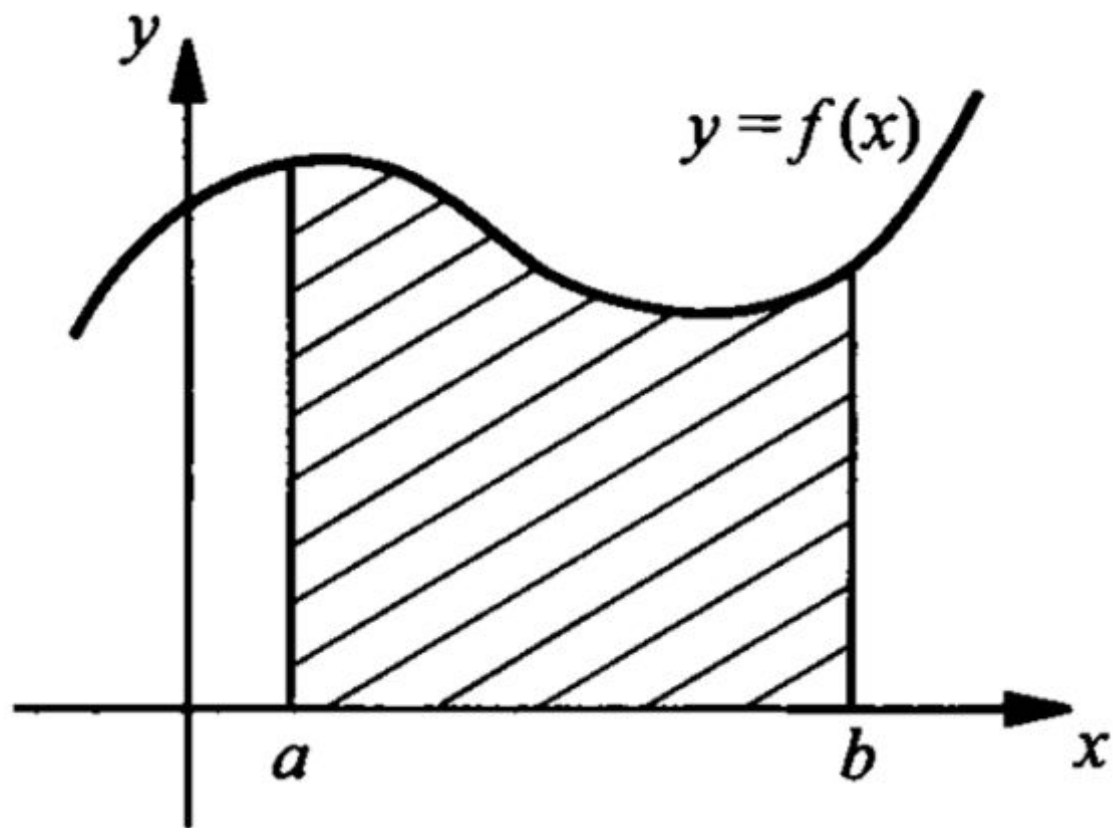
$$4. \int \frac{2dx}{3x}$$

Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается

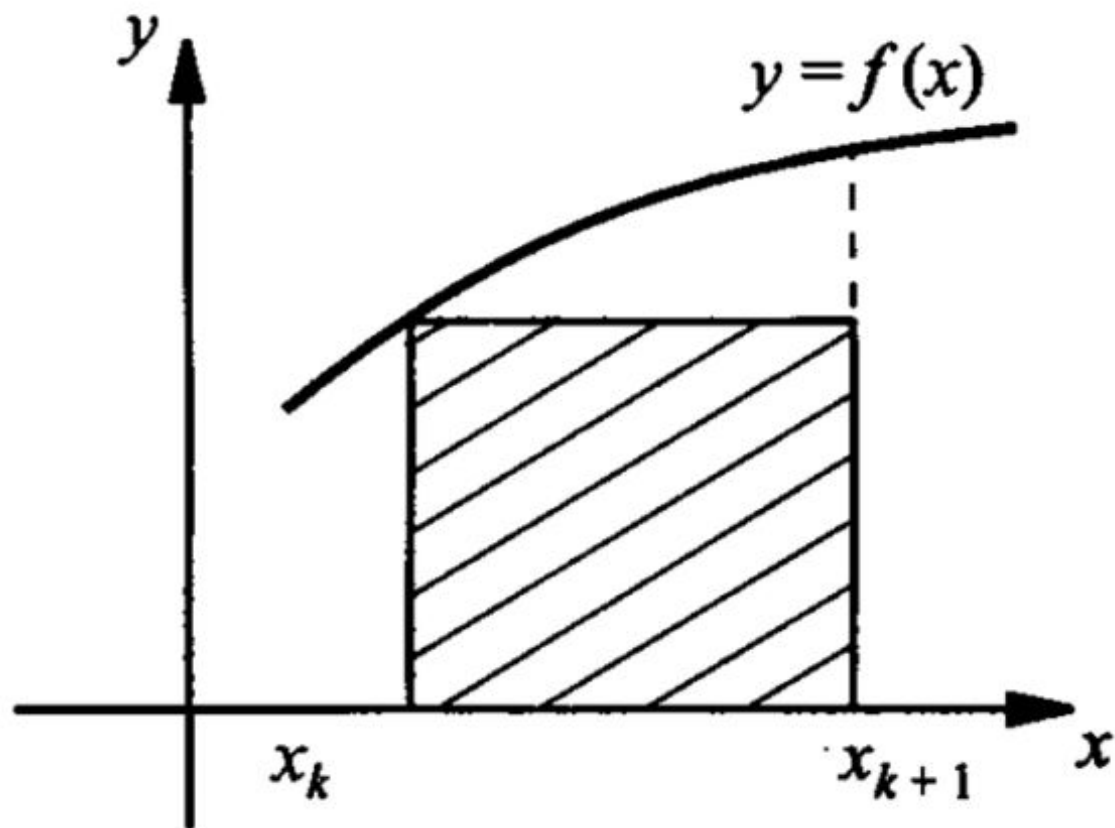
$$\int f(x) dx$$

Задача 1. Площадь криволинейной трапеции.

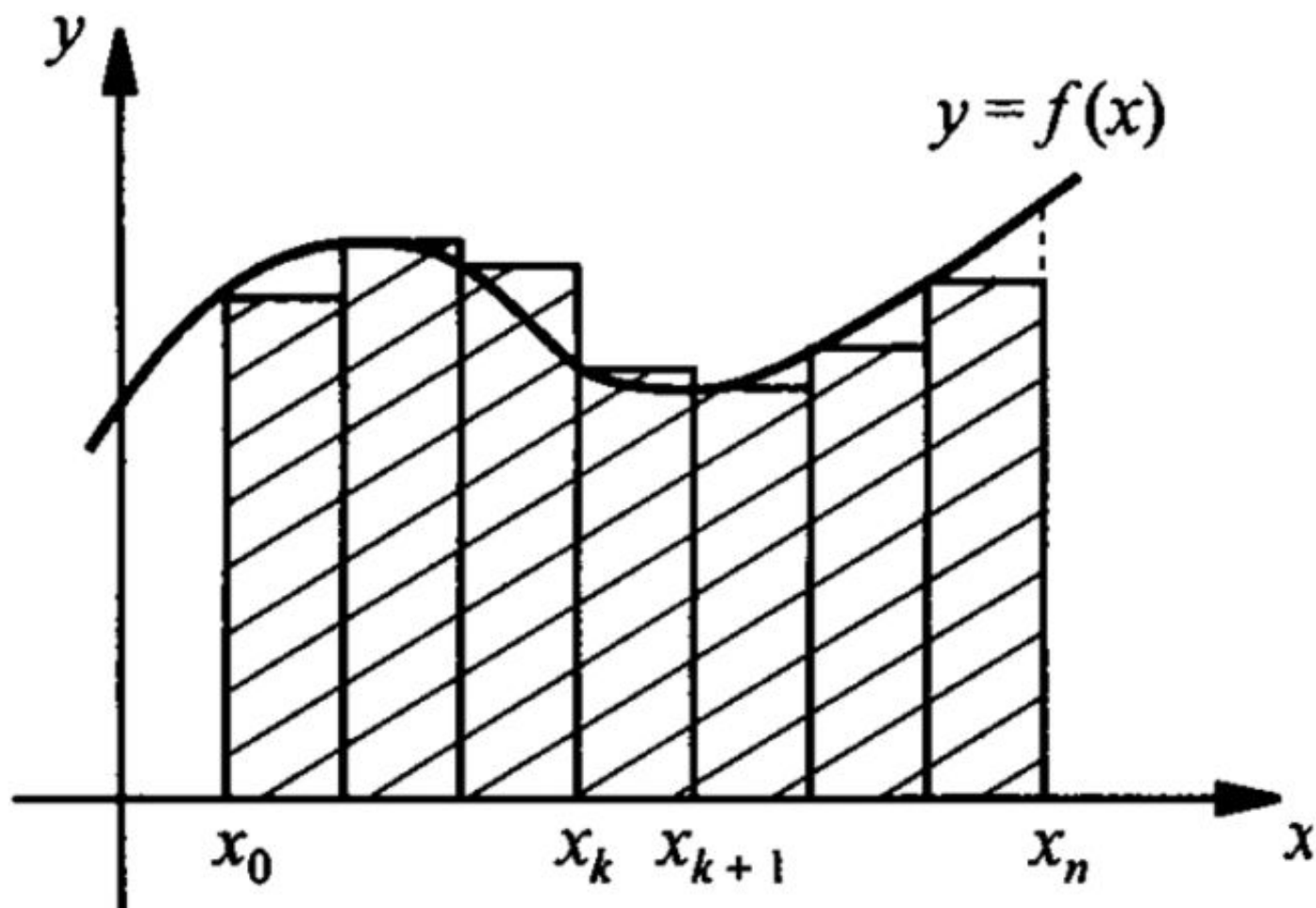
Фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, называют *криволинейной трапецией*.



Разобьем отрезок $[a; b]$ на n равных частей точками x_1, x_2, \dots, x_{n-1} .
Построим прямоугольники со сторонами $x_{k+1} - x_k$ и $f(x_k)$.

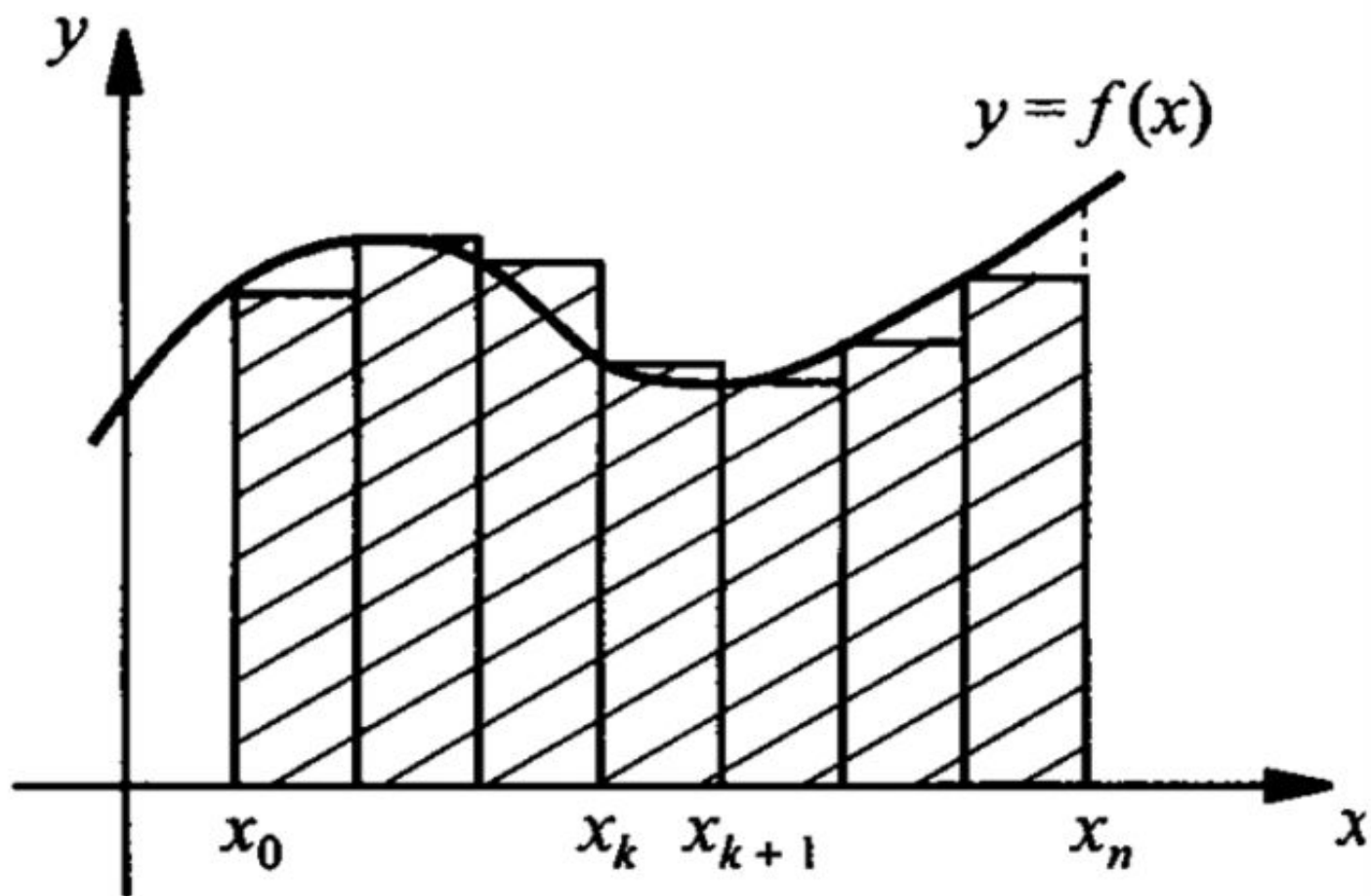


$$S = f(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = f(x_k) \cdot \Delta x_k$$



$$S_n = f(x_0) \cdot \Delta x_0 + f(x_1) \cdot \Delta x_1 + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1}$$

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_{n-1} = \frac{b - a}{n}$$



$$S \approx S_n$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

При решении задач для непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ используется математическая модель:

1) Отрезок $[a; b]$ разбивался на n равных частей.

2) Составлялась сумма $S_n = f(x_0) \cdot \Delta x_0 + f(x_1) \Delta x_1 + \dots + f(x_{n-1}) \Delta x_{n-1}$

(эту сумму называют интегральной суммой).

3) Вычислялся $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Доказывается, что такой предел существует.

Его называют **определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрез-

ке $[a; b]$ и обозначают символом $\int_a^b f(x) dx$ (читается: интеграл от a

до b эф от икс дэ икса). Числа a и b называются **пределами интегрирования**: a – нижним пределом, b – верхним. Знак \int называют **знаком интегрирования**. Функция $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, переменная x – **переменной интегрирования**.

**Формула площади криволинейной трапеции
имеет вид:**

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

В этом состоит геометрический смысл определенного интеграла.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Такую формулу называют **формулой Ньютона-Лейбница**.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Определенный интеграл.

Пример. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 x^4 dx$$

Решение. Первообразной для x^4 служит $\frac{x^5}{5}$

Воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница

$$\int_1^2 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5} = \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$$

Ответ: 31/5

244. Найти $\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8) dx$.

Решение. $\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8) dx = \int_1^2 5x^4 dx + \int_1^2 2x dx - \int_1^2 8 dx = x^5 \Big|_1^2 +$
 $+ x^2 \Big|_1^2 - 8x \Big|_1^2 = (2^5 - 1^5) + (2^2 - 1^2) - 8(2 - 1) = 26.$

Решение. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = -\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} \right) =$
 $= -\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \right) = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}.$

Основные формулы интегрирования

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$

3. $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$
 $n \neq -1, x > 0$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

6. $\int e^x dx = e^x + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}x + C$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}x + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < |a|$

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

13. «Высокий» логарифм:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, |x| \neq a$$

14. «Длинный» логарифм:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

Вычисление определенных интегралов методом подстановки

$$285. \int_0^1 (4x^3 + 1)^5 x^2 dx.$$

$$\text{Решение. } \int_0^1 (4x^3 + 1)^5 x^2 dx = \left| \begin{array}{l} t = 4x^3 + 1, \quad t_1 = 4 \cdot 0^3 + 1 = 1, \\ dt = 12x^2 dx, \quad t_2 = 4 \cdot 1^3 + 1 = 5 \\ x^2 dx = \frac{1}{12} dt; \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{12} \int_1^5 t^5 dt = \frac{1}{12} \cdot \frac{t^6}{6} \Big|_1^5 = \frac{1}{72} (5^6 - 1^6) = 217.$$

$$288. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{5x^4 + 1}.$$

$$\text{Решение. } \int_0^1 \frac{x^3 dx}{5x^4 + 1} = \left| \begin{array}{l} t = 5x^4 + 1, \quad t_1 = 5 \cdot 0^4 + 1 = 1, \\ dt = 20x^3 dx, \quad t_2 = 5 \cdot 1^4 + 1 = 6 \\ x^3 dx = \frac{1}{20} dt; \end{array} \right| = \frac{1}{20} \int_1^6 \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{20} \ln t \Big|_1^6 = \frac{1}{20} (\ln 6 - \ln 1) = \frac{1}{20} \ln 6.$$

Теперь вычислим этот интеграл иначе, а именно, найдем первообразную функцию и возвратимся к старой переменной, не меняя пределов интегрирования:

$$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{5x^4 + 1} = \left| \begin{array}{l} t = 5x^4 + 1, \\ dt = 20x^3 dx, \\ x^3 dx = \frac{1}{20} dt \end{array} \right| = \frac{1}{20} \ln t = \frac{1}{20} \ln(5x^4 + 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{20} (\ln 6 - \ln 1) =$$

$$= \frac{1}{20} \ln 6.$$

Вычислите:

$$1. \int_1^3 8x^3 dx$$

$$2. \int_1^4 \sqrt{x} dx$$

$$3. \int_{-1}^2 (2x + 3x^2 + 4) dx$$

$$4. \int_0^{\pi/2} \cos x dx$$

$$5. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$6. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$7. \int_2^3 (2x-3)^2 dx$$

$$8. \int_0^1 (4x^3 + 1)x^2 dx$$

$$9. \int_0^1 e^{2x} dx$$

$$10. \int_0^{\pi/4} \sin 4x dx$$

$$281. \int_2^3 (2x-1)^3 dx.$$

$$282. \int_1^2 \frac{5dx}{\sqrt{5x-1}}.$$

$$283. \int_1^5 \sqrt{(2x-1)^3} dx.$$

$$284. \int_0^2 5^3 \sqrt{(x-2)^2} dx.$$

$$285. \int_0^1 (4x^3 + 1)^5 x^2 dx.$$