

Тема № 1.

Исходные понятия и используемый математический аппарат.

Лекция № 1

1.1. Понятие классической — макроскопической теории электромагнитного поля.

1.2. Векторные функции, характеризующие электромагнитное поле.

1.3. Векторы и действия над ними.

1.4. Поля и операции векторного анализа.

Электродинамика - наука об электромагнитных полях и волнах. В ней исследуются основные закономерности, которым подчиняются электромагнитные процессы, независимо от формы и области их проявления.



Электричество, современная **энергетика**, **радиолокация**, **радиосвязь** и **телевидение** и т.д. основаны на использовании энергии электромагнитных полей

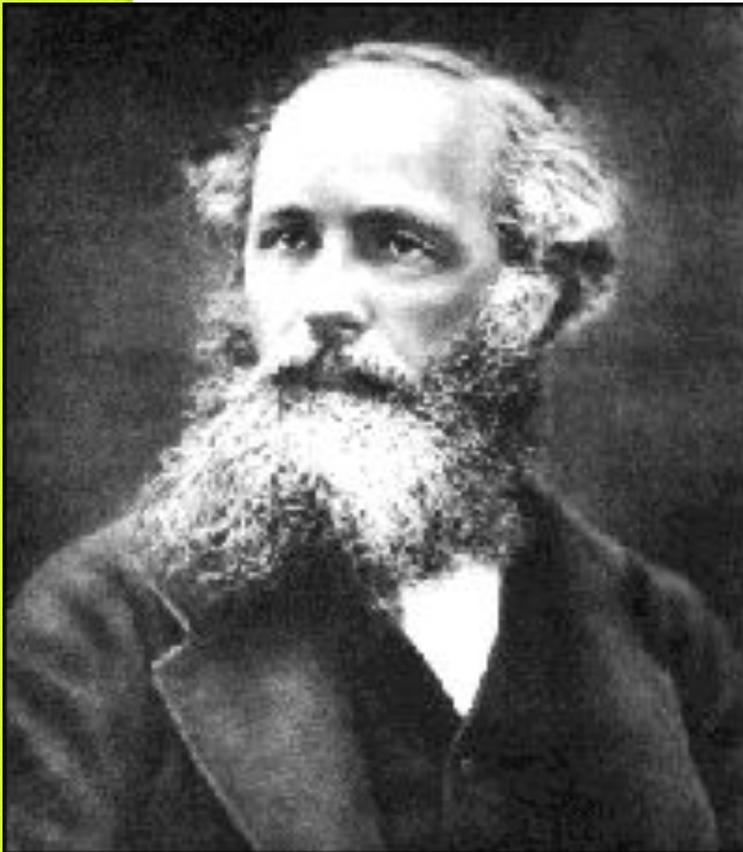
Основными объектами изучения в электродинамике являются электрические и магнитные поля, создаваемые электрическими зарядами и токами

Понятие классической – макроскопической теории электромагнитного поля.

- ✓ рассматриваются процессы и поля в объемах, размеры которых несоизмеримо больше размеров атомов и молекул.
- ✓ рассматриваются поля не каждой частицы в отдельности, а средние значения полей и параметров среды. Такой подход позволяет решить большинство задач современной радиотехники.
- ✓ используются системы, в которых скорость движения зарядов мала по сравнению со скоростью света.



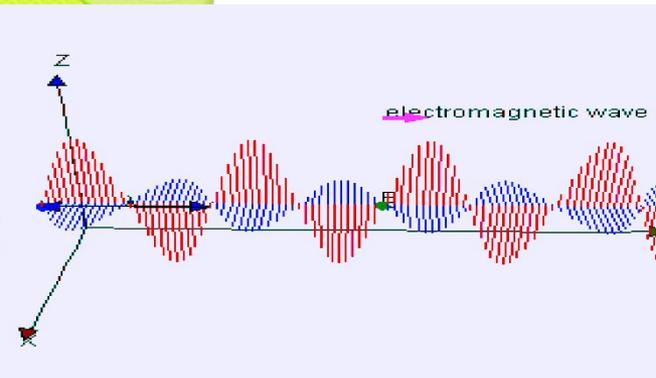
- Классическая теория электромагнитного поля, базируется на уравнениях Максвелла.
- Она охватывает широкий круг явлений, включающий современную радиоэлектронику, электротехнику, вопросы излучения, распространения и приема электромагнитных волн различных диапазонов.



В основании этой теории лежит положение, что электромагнитное возмущение распространяется в пространстве в виде электромагнитных волн, которые обладают пространственно-временной периодичностью.

1.2. Векторные функции, характеризующие электромагнитное поле.

Как материальный объект электромагнитное поле может быть охарактеризовано векторными функциями:



- напряженностью электрического поля \vec{E}
- напряженностью магнитного поля \vec{H} .

Изменение состояния среды под действием электромагнитного поля с точки зрения классической электродинамики может быть описано с помощью вектора магнитной индукции $\vec{B} = f(\vec{H})$, являющегося функцией напряженности \vec{H} , и вектора электрической индукции $\vec{D} = f(\vec{E})$, являющегося функцией напряженности \vec{E} .

В табл. приведены единицы измерения физических величин, которые встретятся при изучении предмета, в используемой нами системе СИ.

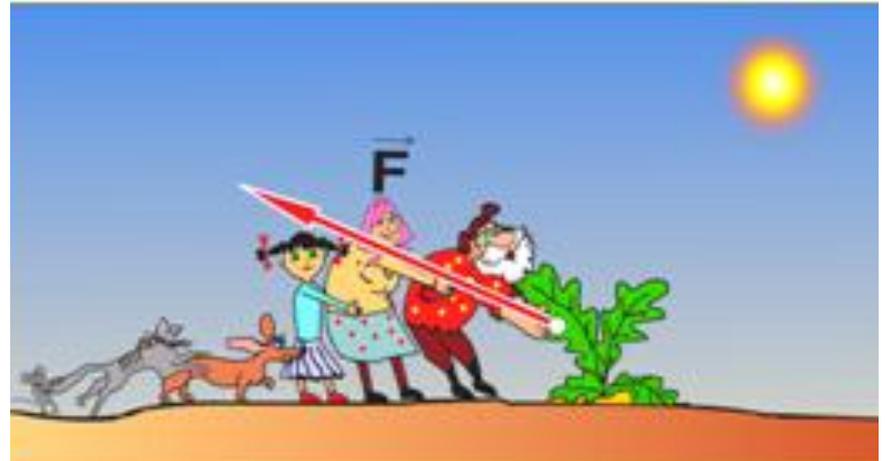
Единицы измерения электромагнитных величин в СИ

Величина	Единица		Выражение через другие единицы СИ
	наименование	обозначение	
1	2	3	4
1. Сила тока	Ампер [А]	I	-
2. Частота	Герц [Гц]	f	-
3. Сила	Ньютон [Н]	F	-
4. Энергия, работа	Джоуль [Дж]	W, A	Н·м
5. Мощность, поток энергии	Ватт [Вт]	P	Дж·с
6. Количество электричества, электрический заряд	Кулон [Кл]	Q	А·с
7. Электрическое напряжение, потенциал	Вольт [В]	U	Вт/А
8. Электрическая емкость	Фарада [Ф]	C	Кл/В

9. Электрическое сопротивление	Ом	R	V/A
10. Электрическая проводимость	Сименс [СМ]	Y,G	A /V
11. Поток магнитной индукции	Вебер [Вб]	Φ	В·с
12. Магнитная индукция	Тесла [Т]	B	Вб/м ²
13. Индуктивность	Генри [Г]	L	Вб/A
14. Напряженность электрического поля	-	E	В/м
15. Напряженность магнитного поля	-	H	A/м
16. Электрическая индукция	-	D	Кл/ м ²
17. Электрическая постоянная	-	ϵ_0	Φ /м
18. Магнитная постоянная	-	μ_0	Г/м

1.3. Векторы и действия над ними.

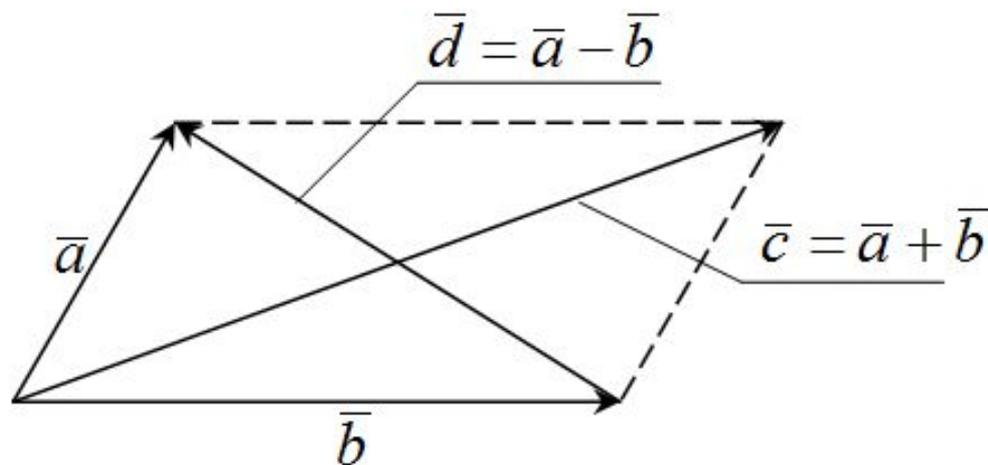
Понятие вектора как величины, характеризуемой в отличие от скаляра не только числом, но и направлением в пространстве, соответствует многим физическим явлениям.



Например, в физике в качестве векторов рассматриваются сила и скорость и т.д. Применение векторов позволяет отображать физические закономерности в удобной форме, которая при необходимости преобразуется для разных систем координат.

1.3. Векторы и действия над ними.

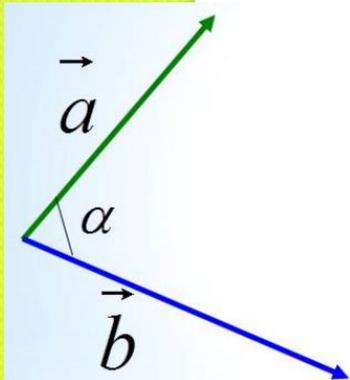
Векторное сложение и вычитание производится по правилам параллелограмма и треугольника



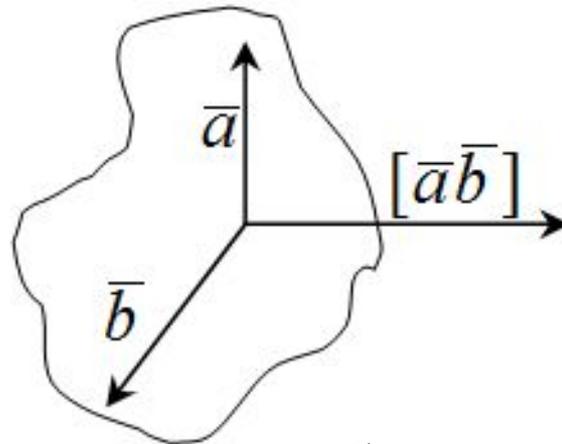
Скалярное произведение двух векторов и -это скалярная величина, равная в декартовой системе координат

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a} \vec{b})$$

$$\vec{c}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos A$$



Векторное произведение двух векторов \vec{a} и \vec{b} - это вектор, направленный перпендикулярно плоскости расположения перемножаемых векторов в сторону поступательного перемещения правого винта, если его вращать от первого сомножителя ко второму по кратчайшему пути



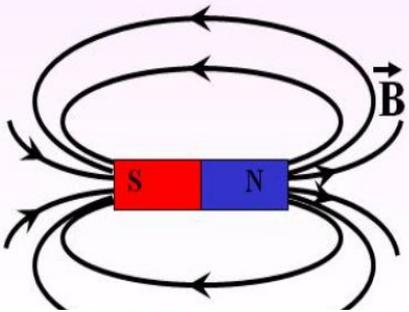
Векторное произведение может быть представлено через проекции векторов в виде:

$$[\vec{a}\vec{b}] = \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} =$$

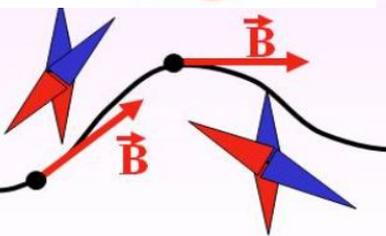
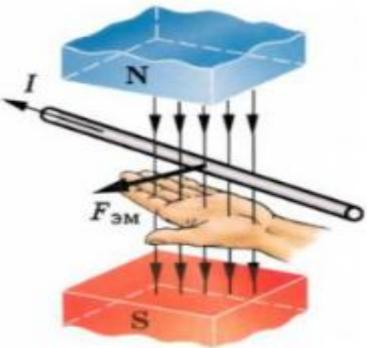
$$= i(a_y b_z - a_z b_y)(-1)^2 + j(a_x b_z - a_z b_x)(-1)^3 + k(a_x b_y - a_y b_x)(-1)^4 = -[\vec{b}\vec{a}]$$

Примеры величин, являющихся скалярными и векторными произведениями.

Поток Φ вектора магнитной индукции \vec{B}



Вектор магнитной индукции – силовая характеристика магнитного поля (определяет силу, с которой магнитное поле действует на внесенный в него проводник с током.

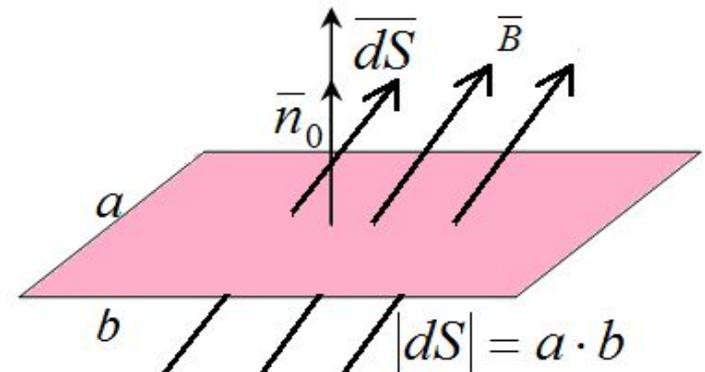


\vec{B} - характеризует магнитное поле в каждой точке пространства,
 Φ - определенную область пространства

Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через площадку dS называется скалярная физическая величина равная

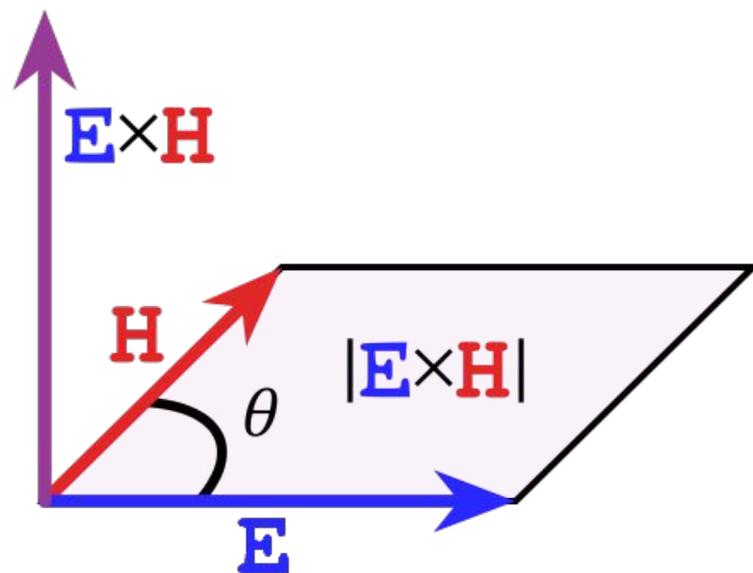
$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S},$$

$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}_0$ вектор элементарной площадки,



Примером векторного произведения является вектор Умова-Пойнтинга, направление которого указывает направление перемещения удельной мощности электромагнитного поля

$$\bar{p} = [\bar{E}\bar{H}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$



E и **H** — векторы напряжённости электрического и магнитного полей соответственно.

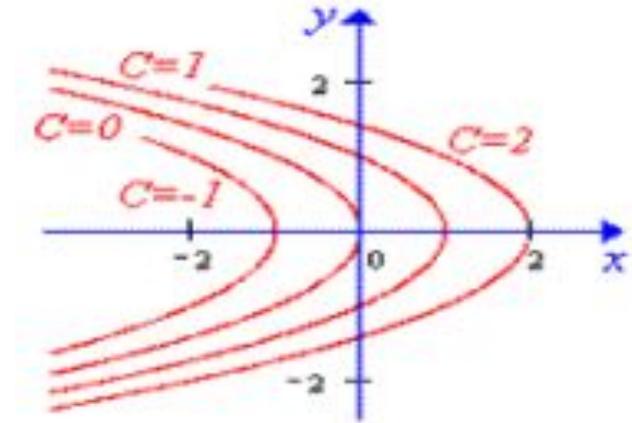
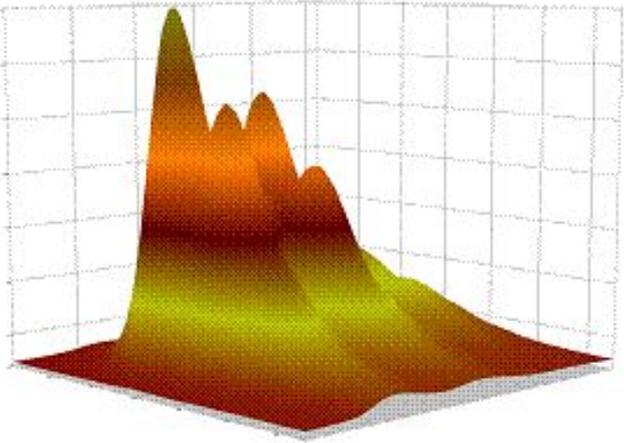
1.4. Поля и операции векторного анализа.

Термин «поле» употребляется, когда надо сопоставить каждой точке пространства некоторую физическую характеристику. Формально поля определяются заданием в каждой точке рассматриваемой области пространства некоторой скалярной или векторной величины: скалярные и векторные поля.

Скалярной величиной называется величина, значение которой характеризуется одним действительным числом, без учета направления или другой какой-либо оценки, например, сопротивление, заряд, температура и др.

Векторная величина или вектор зависит от двух элементов разной природы: числа, характеризующего длину вектора (модуль), и направления вектора. Примерами векторов могут служить напряженность и индукция электрического (магнитного) поля.

Скалярное поле графически изображается на плоскости рисунка линиями равного уровня, которые являются геометрическим местом точек равного значения скалярной функции $\phi = \text{const}$.



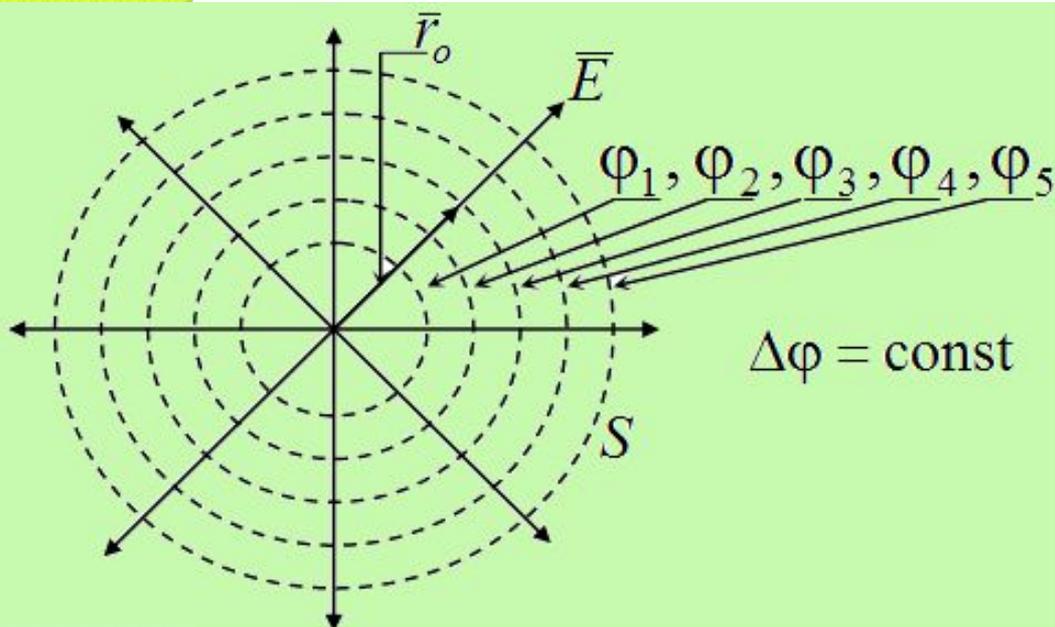
Примерами скалярных физических полей могут быть поля температуры, атмосферного давления, плотности воздуха, электрического потенциала, массы и т.д.

Примеры

- 1) на топографических картах линии, соединяющие точки, имеющих одну и ту же высоту над уровнем моря;
- 2) в термодинамике на диаграммах состояния линии, соединяющие точки, имеющих одну и ту же температуру (*изотермы*), давление (*изобары*) или объём (*изохоры*);

Например, для скалярного поля электростатического потенциала φ эти поверхности называются эквипотенциальными (равнопотенциальными) и изображаются так, чтобы

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_3 = \dots = \varphi_{i-1} - \varphi_i = \Delta\varphi = \text{const}.$$



Изображают поверхности или линии равного уровня так, чтобы разность значений скалярной функции точки любых двух соседних поверхностей равного уровня была одинаковой величины.

Для характеристики **величины и направления** скорости изменения скалярного поля в пространстве введем понятие **градиента скалярного поля**.

Градиентом скалярного поля называется вектор, характеризующий наибольшую (по модулю и направлению) скорость изменения этого скалярного поля.

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

В определении градиента существенны два положения:

- 1) направление, в котором берутся две близлежащие точки, должно быть таким, чтобы скорость изменения потенциала была максимальна;
- 2) направление таково, что скалярная функция в этом направлении возрастает (не убывает). Очевидно, что

$$\text{grad } \varphi = n_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

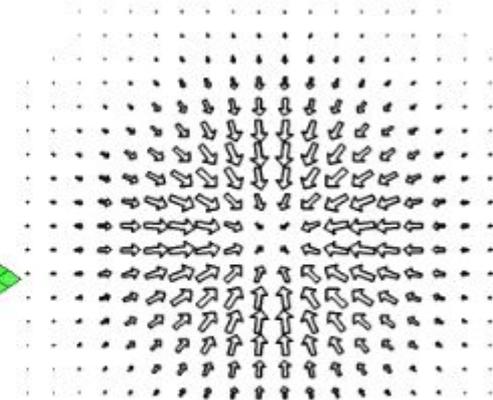
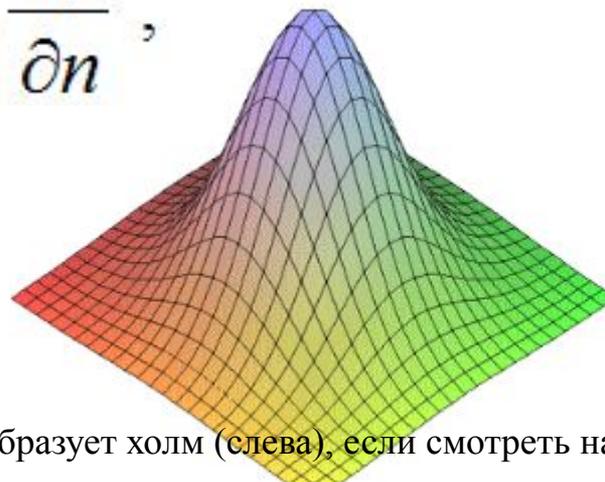
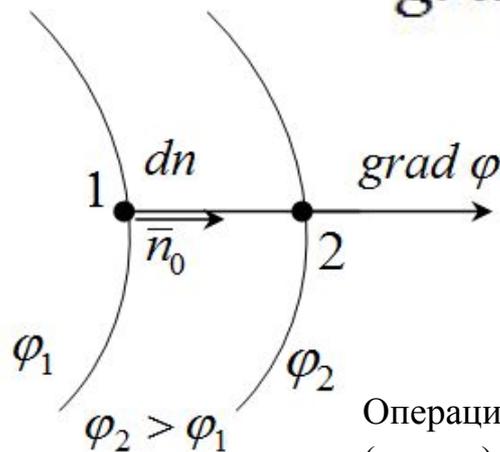
от лат. *gradiens*, род. падеж *gradientis* — шагающий, растущий) — вектор, своим направлением указывающий направление наибольшего возрастания некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой (скалярного поля), а по величине (модулю) равный скорости роста этой величины в этом направлении.

dn — расстояние по перпендикуляру (по нормали) между эквипотенциальными поверхностями;

n_0 — нормаль к эквипотенциали, направленная в сторону роста скалярной функции;

$\partial\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ приращение потенциала при переходе от точки 1 к точке 2

$$\text{grad } \varphi = n_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$



Операция градиента преобразует холм (слева), если смотреть на него сверху, в поле векторов (справа). Видно, что векторы направлены «в горку» и тем длиннее, чем круче наклон.

В декартовой системе координат градиент скалярной функции равен

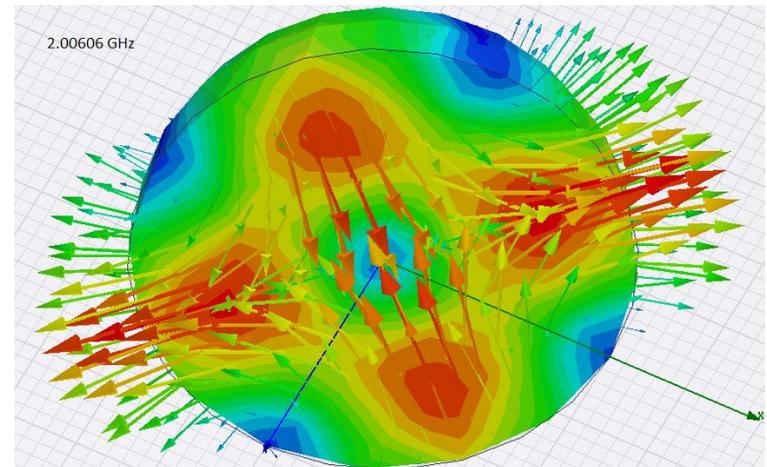
$$\text{grad } \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \nabla \varphi$$

где ∇ -оператор «набла», равный
$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

Мы видим, что скалярное поле φ порождает векторное поле

$$\vec{F} = \text{grad } \varphi$$

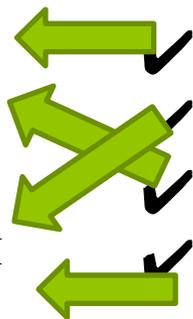
Такое векторное поле называется **потенциальным**, а скалярная функция φ -**потенциалом**.



Важнейшей характеристикой **векторных полей**

Характеристики
интенсивности
поля

Характеристики
вращательной
способности поля



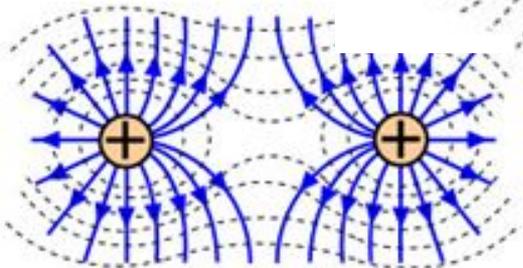
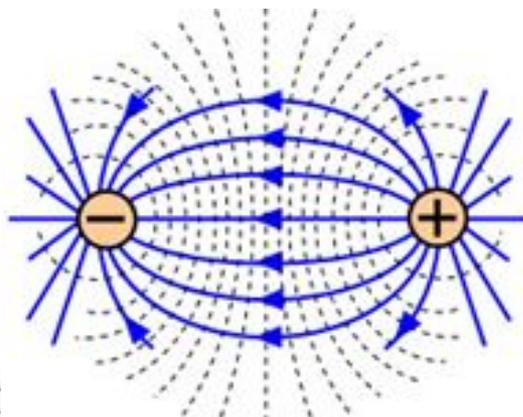
Поток вектора
Циркуляция
Дивергенция
Ротор или вихрь



Суммарные
характеристики поля
(интегральные)



Дифференциальны
ми (точечными)
характеристиками
поля

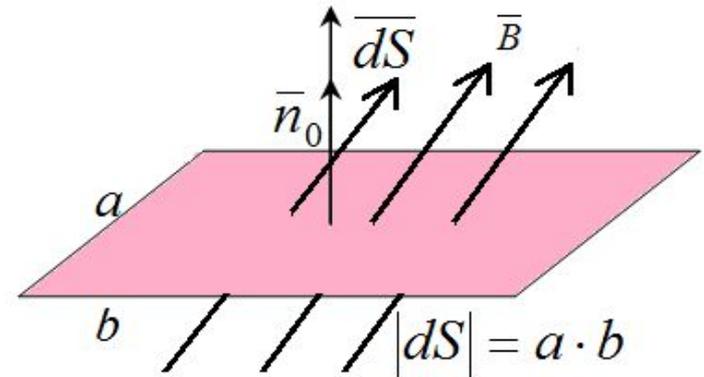


Для наглядного отображения векторных полей обычно строят картины силовых линий. Это линии, касательные к которым в каждой точке указывают направление вектора. Густота силовых линий может соответствовать интенсивности поля.

Потока вектора \vec{a}

Потоком векторного поля через какую либо поверхность называется величина поверхностного интеграла от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к выбранной стороне поверхности

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S},$$

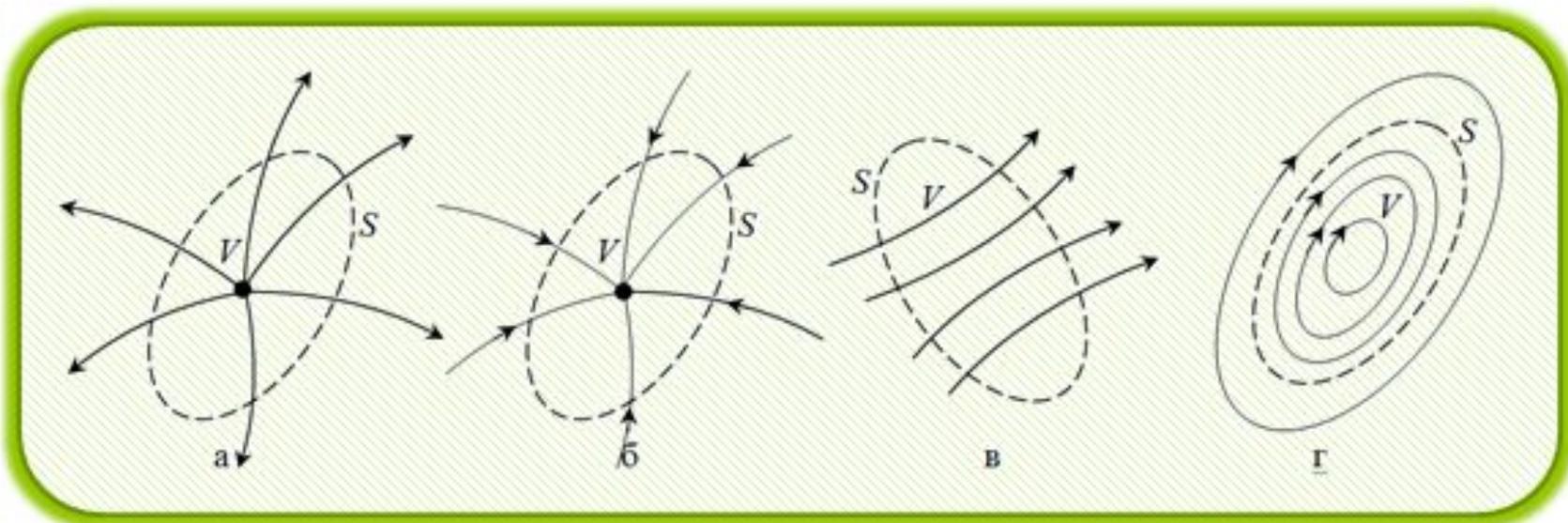


$$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}_0$$

вектор элементарной площадки, направленной перпендикулярно поверхности площадки dS

\vec{n}_0 – единичный вектор нормального направления (нормаль)

Поток вектора проходящий через замкнутую поверхность **положителен**, если вектор выходит из объема V , ограниченного замкнутой поверхностью S , **и отрицателен**, если входит внутрь



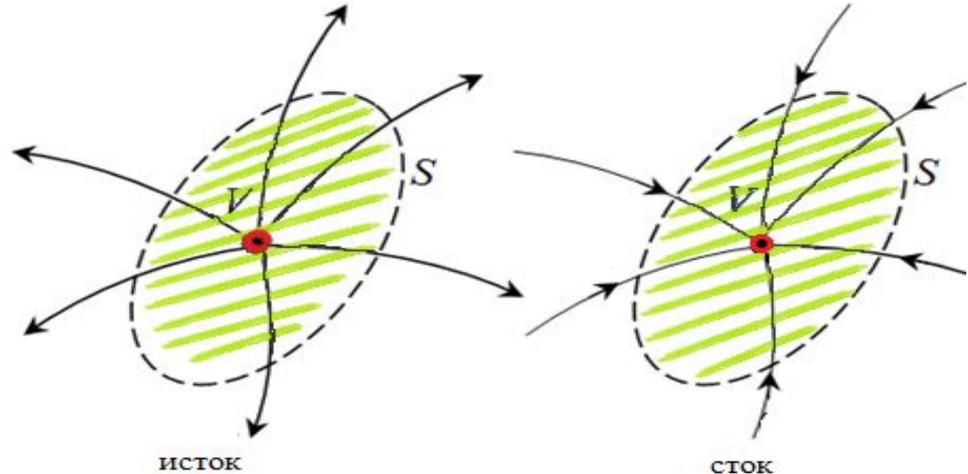
Область V может содержать точку, из которой расходятся (**исток**) (рис. а) или в которую сходятся (**сток**) (рис. б) все силовые линии. Последние могут также проходить область насквозь (рис. в) или совсем не пересекать ее поверхность S (рис. г).

$\Phi > 0$ (а), $\Phi < 0$ (б), $\Phi = 0$ (в) и $\Phi = 0$ (г).

Дивергенция

С целью оценки интенсивности источников надо поток вектора \vec{a} брать через достаточно малую замкнутую поверхность при стягивании ее в точку. Такой предел называют дивергенцией (а также расхождением, расходимостью) вектора

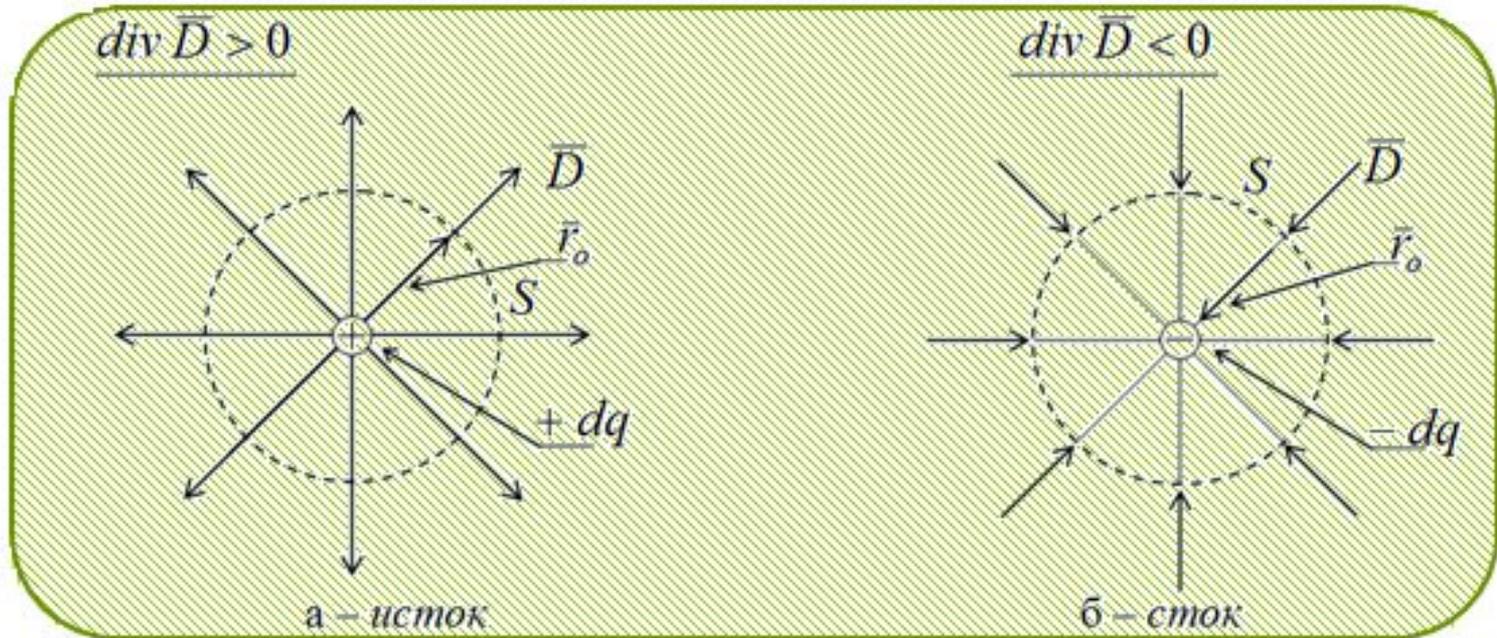
$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{a} d\vec{S}}{\Delta V}$$



Величина дивергенции характеризует отнесенную к единице объема производительность (интенсивность) источников поля в бесконечно малом объеме, окружающем данную точку. Если дивергенция отличается от нуля, то физически это значит, что в рассматриваемой точке имеются источники ($\operatorname{div} \vec{a} > 0$) или стоки ($\operatorname{div} \vec{a} < 0$).

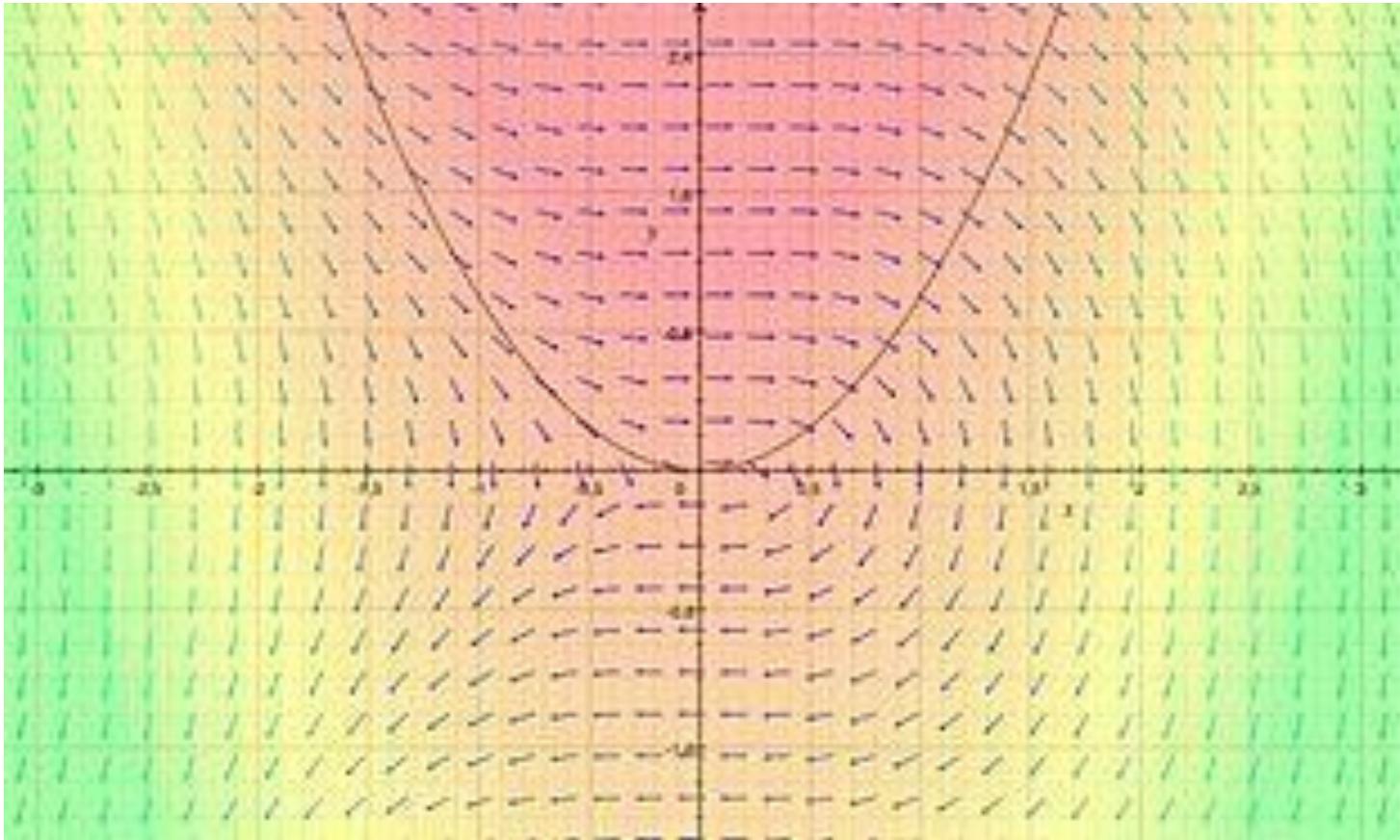
Если дивергенция равна нулю, то точка M и ее окрестность свободны от источников и стоков (нет ни истоков, ни стоков линий вектора, т.е. линии не начинаются и не кончаются в рассматриваемой точке).

Векторные поля, для которых дивергенция тождественно равна нулю, называются соленоидальными (трубчатыми) полями, т.е. полями без источников.



Примером векторного поля, имеющего конечное значение дивергенции, является **поле заряда**, обладающего конечной объемной плотностью ρ . В области расположения этого заряда дивергенция будет отлична от нуля, так как поток вектора электрической индукции \vec{D} отличен от нуля через любую достаточно малую замкнутую поверхность, расположенную вокруг этого объемного заряда.

Векторная функция и её дивергенция, представленные в виде скалярного поля (красный цвет указывает на повышение, зелёный обозначает уменьшение)



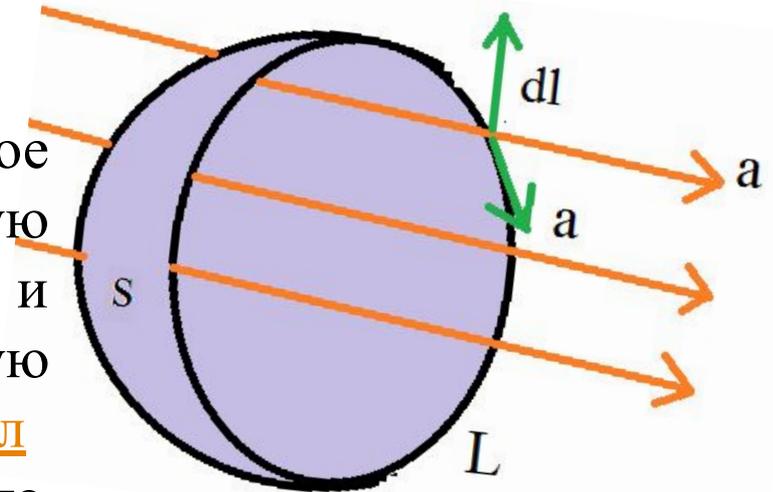
Циркуляция

Если — произвольное векторное поле, мы возьмем его составляющую вдоль кривой линии и проинтегрируем эту составляющую по замкнутому контуру. Интеграл называется циркуляцией векторного поля по контуру.

$$\Gamma = \oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) :$$

циркуляция зависит от двух вещей:

- длины самого контура (чем длиннее, тем больше циркуляция);
- скорости течения * (чем длиннее векторы «а», тем больше их *бесконечно малые* проекции и тем больше значение)



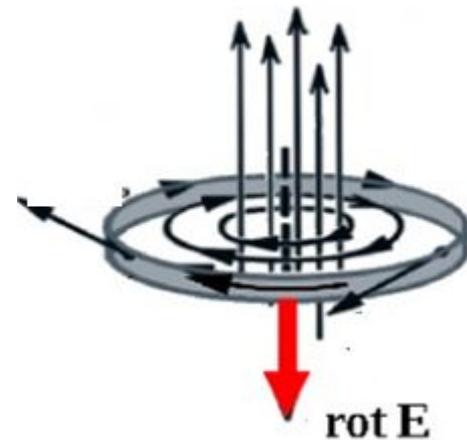
Циркуляция векторного поля имеет простую физическую интерпретацию. Если \mathbf{F} – сила, действующая на частицу, то циркуляция векторного поля \mathbf{F} представляет собой работу этой силы по перемещению частицы по замкнутому контуру L

Ротор (вихрь) вектора.

указывает направление, ортогонально которому вращательная способность поля наибольшая.

Показывает, насколько и в каком направлении закручено поле в каждой точке.

Ротор поля \vec{a} обозначается символом $\text{rot } \vec{a}$

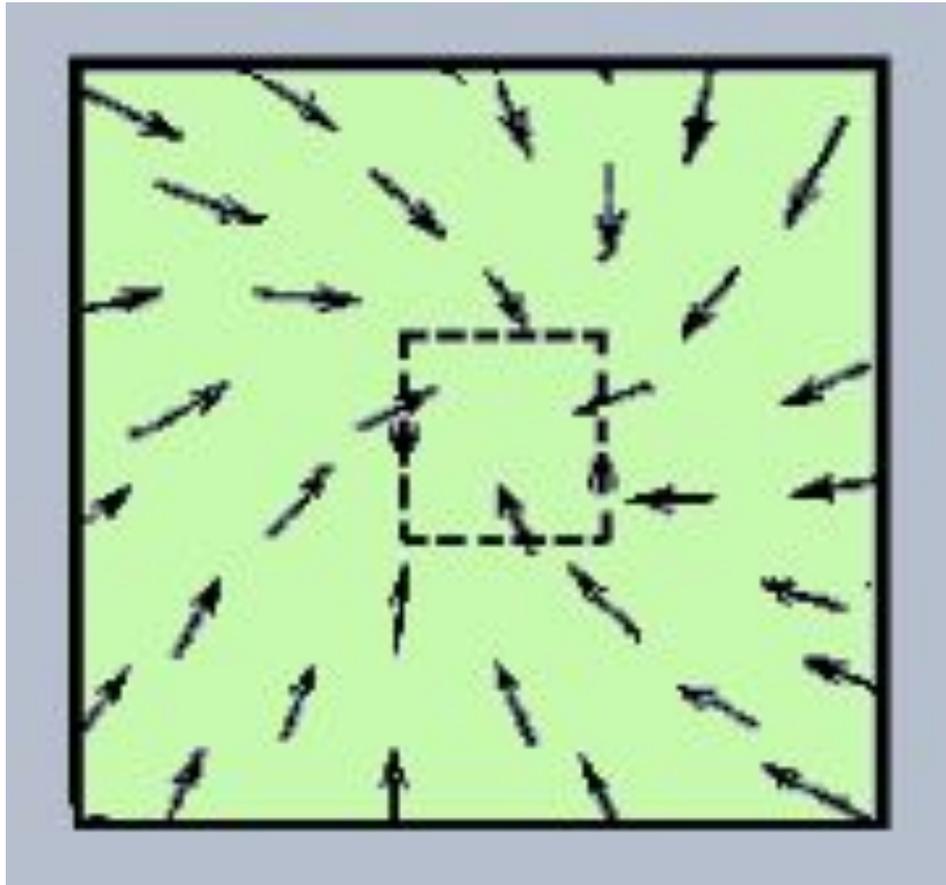


$$\text{rot } \vec{a} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\int \vec{a} d\vec{l}}{\Delta S}.$$

Под ротором вектора \vec{a} понимается вектор, проекция которого на направление S равна пределу отношения циркуляции вектора по контуру \vec{l} к величине площади плоской фигуры, ограниченной этим контуром, стягиваемой в точку

Ротор (вихрь) вектора является мерой «завихренности» векторного поля в рассматриваемой точке, т.е. он характеризует поле в отношении способности к образованию вихрей.

Ротор вектора в данной точке является векторной суммой его трех ортогональных проекций.

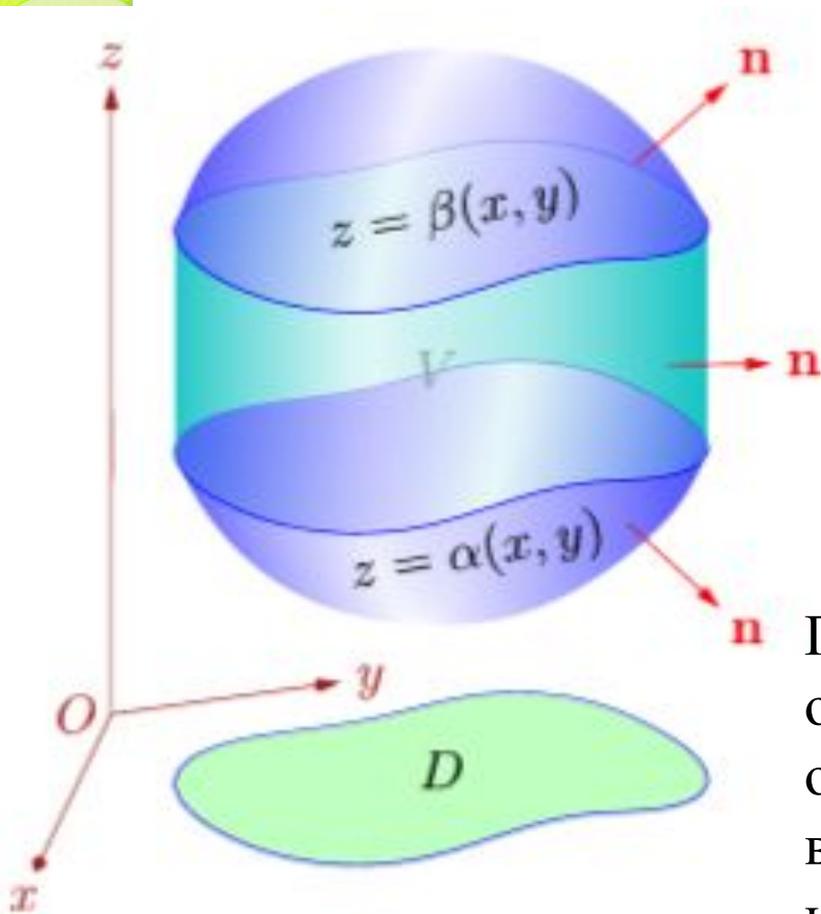


Теорема Стокса

Поток ротора векторной функции \vec{a} через поверхность S равен циркуляции этого вектора по контуру l

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{a} d\vec{S} = \oint_l \vec{a} d\vec{l}.$$

Теорема Остроградского – Гаусса



$$\oint_S \bar{a} d\bar{S} = \int_V \text{div} \bar{a} dV$$

Поток векторного поля через замкнутую ограниченную поверхность, ориентированную в направлении внешней нормали, равен тройному интегралу от дивергенции поля по объему, который ограничивает поверхность.

Спасибо за внимание!!!

