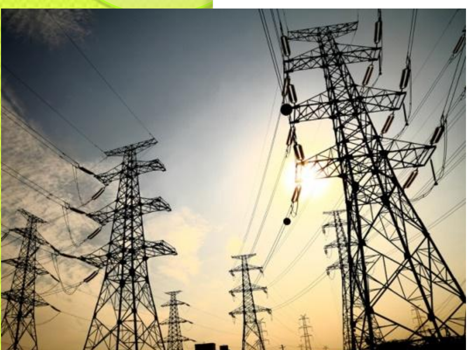
Тема № 1.
Исходные понятия и используемый математический аппарат.

Лекция № 1

1.1.Понятие классической – макроскопической теории электромагнитного поля.
1.2. Векторные функции, характеризующие электромагнитное поле.
1.3. Векторы и действия над ними.
1.4. Поля и операции векторного анализа.

Электродинамика - наука об электромагнитных полях и волнах. В ней исследуются основные закономерности, которым подчиняются электромагнитные процессы, независимо от формы и области их проявления.

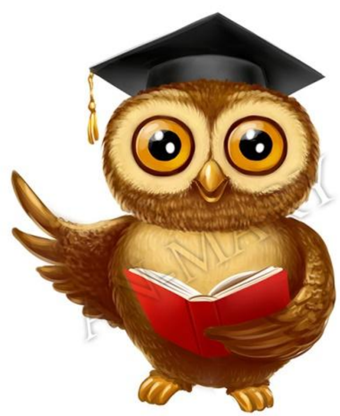


Электричество, современная **энергетика**, **радиолокация**, **радиосвязь** и **телевидение** и т.д. основаны на использование энергии электромагнитных полей

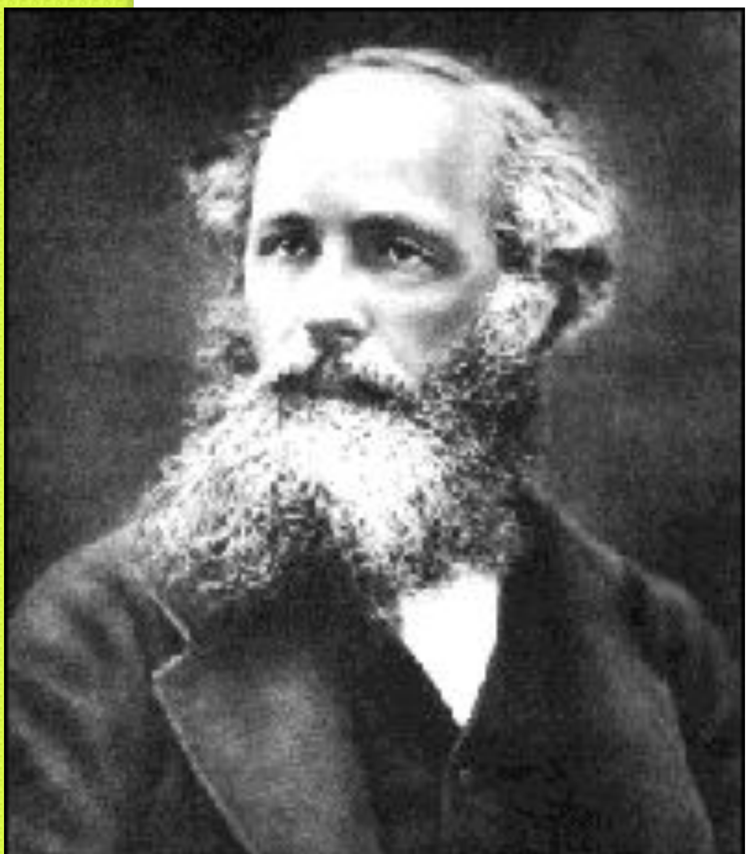
Основными **объектами** изучения в электродинамике являются **электрические и магнитные поля**, создаваемые электрическими зарядами и токами

Понятие классической – макроскопической теории электромагнитного поля.

- ✔ рассматриваются процессы и поля в объемах, размеры которых несоизмеримо больше размеров атомов и молекул.
- ✔ рассматриваются поля не каждой частицы в отдельности, а средние значения полей и параметров среды. Такой подход позволяет решить большинство задач современной радиотехники.
- ✔ используются системы, в которых скорость движения зарядов мала по сравнению со скоростью света.



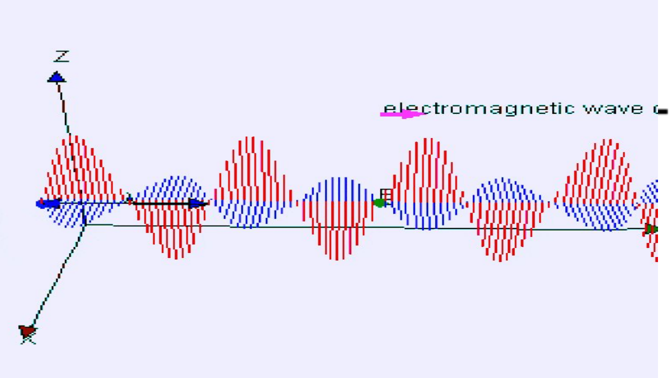
- Классическая теория электромагнитного поля, базируется на уравнениях Максвелла.
- Она охватывает широкий круг явлений, включающий современную радиоэлектронику, электротехнику, вопросы излучения, распространения и приема электромагнитных волн различных диапазонов.



В основании этой теории лежит положение, что электромагнитное возмущение распространяется в пространстве в виде электромаг нитных волн, которые обладают пространственно-временной периодичностью.

1.2. Векторные функции, характеризующие электромагнитное поле.

Как материальный объект электромагнитное поле может быть охарактеризовано векторными функциями:



- напряженностью электрического поля $\overline{\mathrm{E}}$
- напряженностью магнитного поля $\overline{\mathrm{H}}$.

Изменение состояния среды под действием электромагнитного поля с точки зрения классической электродинамики может быть описано с помощью вектора магнитной индукции $\overline{\mathrm{B}} = f(\overline{H})$, являющегося функцией напряженности $\overline{\mathrm{H}}$, и вектора электрической индукции $\overline{D} = f(\overline{E})$, являющегося функцией напряженности $\overline{\mathrm{E}}$.

В табл. приведены единицы измерения физических величин, которые встретятся при изучении предмета, в используемой нами системе СИ.

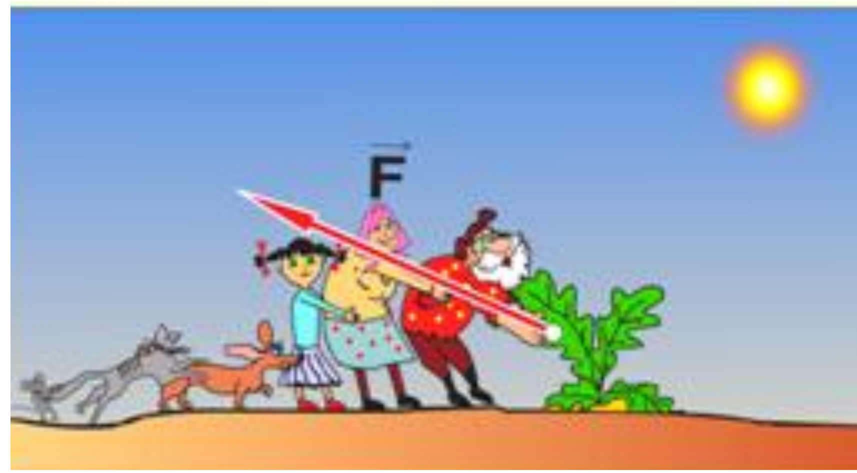
Единицы измерения электромагнитных величин в СИ

Величина	Единица		Выражение через другие единицы СИ
	наименование	обозначение	
1	2	3	4
1. Сила тока	Ампер [А]	*J*	-
2. Частота	Герц [Гц]	f	-
3. Сила	Ньютон [Н]	F	-
4. Энергия, работа	Джоуль [Дж]	W, A	Н·м
5. Мощность, поток энергии	Ватт[Вт]	P	Дж·с
6. Количество электричества, электрический заряд	Кулон [Кл]	Q	А·с
7. Электрическое напряжение, потенциал	Вольт [В]	U	Вт/А
8. Электрическая емкость	Фарада [Ф]	C	Кл/В

9. Электрическое сопротивление	Ом	R	В/А
10. Электрическая проводимость	Сименс [См]	Y,G	А /В
11. Поток магнитной индукции	Вебер [Вб]	Ф	В·с
12. Магнитная индукция	Тесла [Т]	B	Вб/м^2
13. Индуктивность	Генри [Г]	L	Вб/А
14. Напряженность электрического поля	-	E	В/м
15. Напряженность магнитного поля	-	H	А/м
16. Электрическая индукция	-	D	Кл/ м^2
17. Электрическая постоянная	-	ε_0	Ф/м
18. Магнитная постоянная	-	μ_0	Г/м

1.3. Векторы и действия над ними.

Понятие вектора как величины, характеризуемой в отличие от скаляра не только числом, но и направлением в пространстве, соответствует многим физическим явлениям.

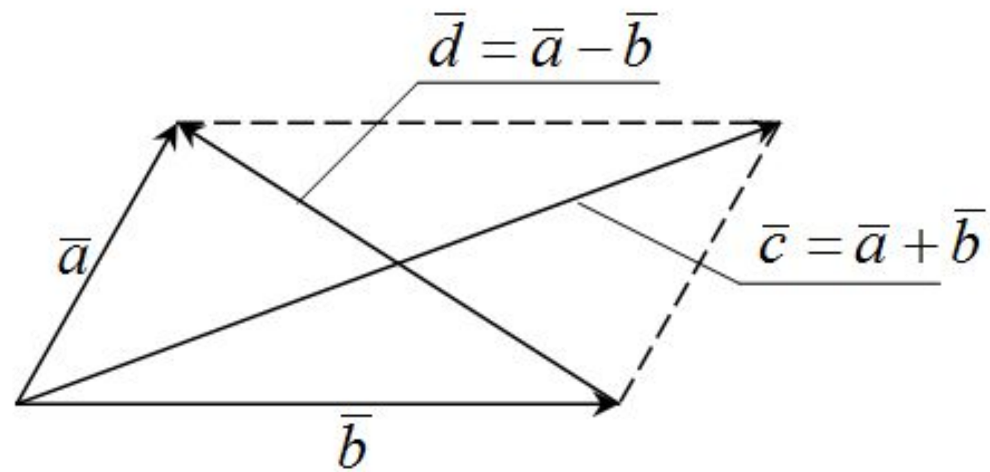


V

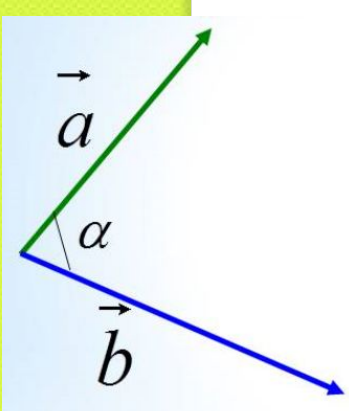
Например, в физике в качестве векторов рассматриваются сила и скорость и т.д. Применение векторов позволяет отображать физические закономерности в удобной форме, которая при необходимости преобразуется для разных систем координат.

1.3. Векторы и действия над ними.

<u>Векторное сложение и вычитание</u> производится по правилам параллелограмма и треугольника



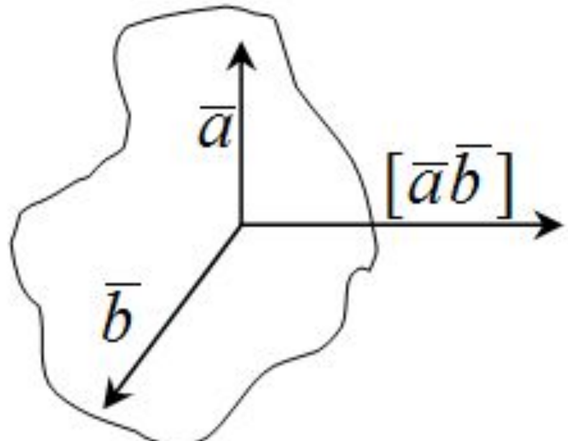
<u>Скалярное произведение</u> двух векторов и -это скалярная величина, равная в декартовой системе координат



$$\bar{a} \cdot \bar{в} = a_x в_x + a_y в_y + a_z в_z = |\bar{a}||\bar{в}|\cos\left(\widehat{\bar{a}\bar{в}}\right)$$

$$\vec{c}^{\,2} = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos A$$

Векторное произведение двух векторов a и b - это вектор, направленный перпендикулярно плоскости расположения перемножаемых векторов в сторону поступательного перемещения правого винта, если его вращать от первого сомножителя ко второму по кратчайшему пути



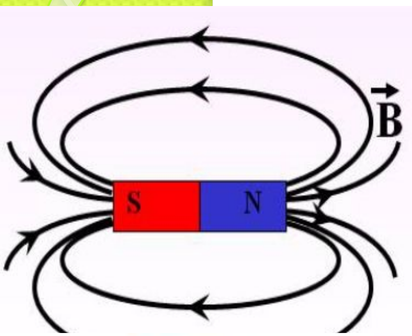
Векторное произведение может быть представлено через проекции векторов в виде:

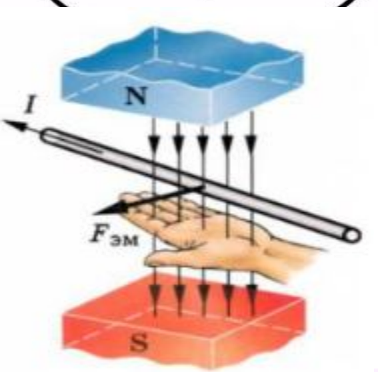
$$[\bar{a}\bar{в}] = \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \end{pmatrix} =$$

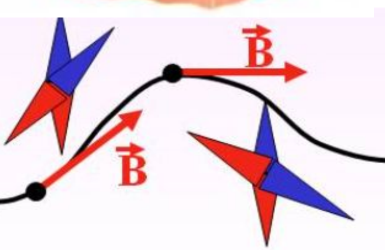
$$= i(a_y в_z - a_z в_y)(-1)^2 + j(a_x в_z - a_z в_x)(-1)^3 + k(a_x в_y - a_y в_x)(-1)^4 = -[\bar{в}\bar{a}]$$

Примеры величин, являющихся скалярными и векторными произведениями.

Поток Ф вектора магнитной индукции $\overline{\text{B}}$







<u>Вектор магнитной индукции</u> –силовая характеристика магнитного поля (определяет силу, с которой магнитное поле действует на внесенный в него проводник с током.

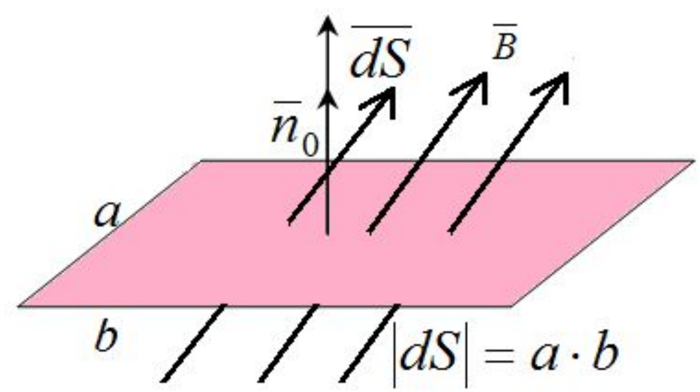
<u>Потоком вектора магнитной индукции</u>(магнитным потоком) через площадку dS называется скалярная физическая величина равная

$$\Phi = \int_S \overline{B} d\overline{S},$$

$d\overline{S} = dS \cdot \overline{n_0}$ вектор элементарной площадки ,

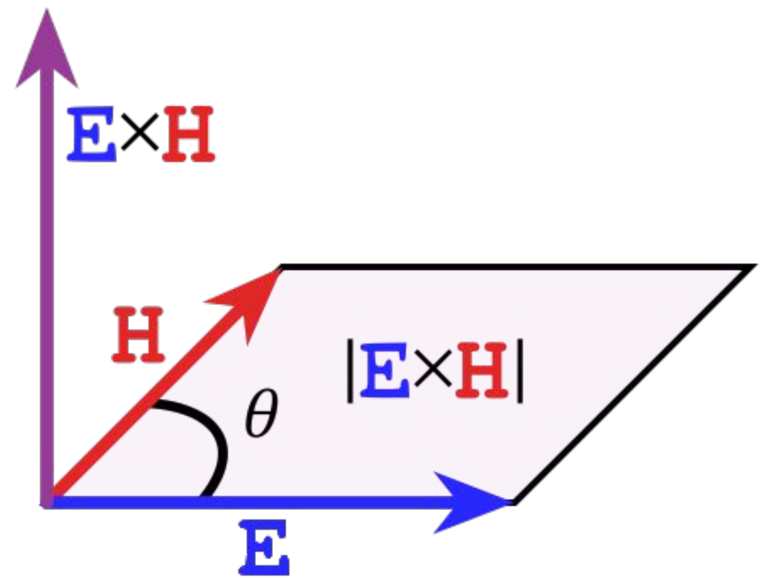
B̅ -характеризует магнитное поле в каждой точке пространства,

Ф-определенную область пространства



Примером векторного произведения является вектор Умова-Пойнтинга , направление которого указывает направление перемещения удельной мощности электромагнитного поля

$$\overline{p} = [\overline{E}\overline{H}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$



E и **H** — векторы напряжённости электрического и магнитного полей соответственно.

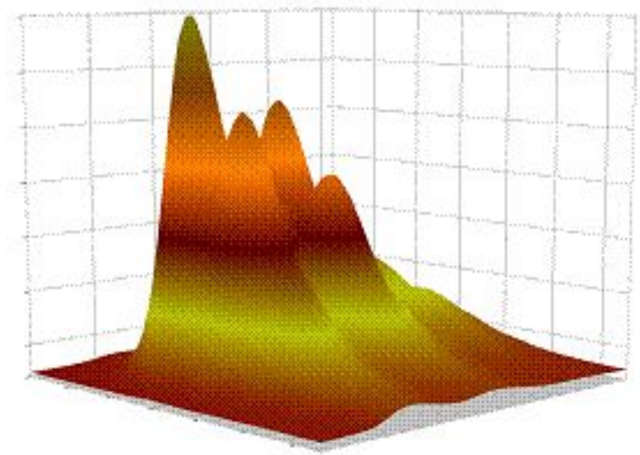
1.4. Поля и операции векторного анализа.

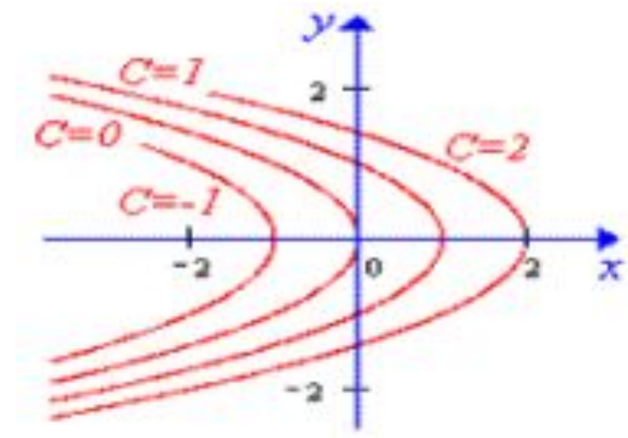
Термин «поле» употребляется, когда надо сопоставить каждой точке пространства некоторую физическую характеристику. Формально поля определяются заданием в каждой точке рассматриваемой области пространства некоторой скалярной или векторной величины: скалярные и векторные поля.

Скалярной величиной называется величина, значение которой характеризуется одним действительным числом, без учета направления или другой какой-либо оценки, например, сопротивление, заряд, температура и др.

Векторная величина или вектор зависит от двух элементов разной природы: числа, характеризующего длину вектора (модуль), и направления вектора. Примерами векторов могут служить напряженность и индукция электрического (магнитного) поля.

Скалярное поле графически изображается на плоскости рисунка <u>линиями равного уровня,</u> которые являются геометрическим местом точек равного значения скалярной функции ϕ = const.





Примерами скалярных физических полей могут быть поля температуры, атмосферного давления, плотности воздуха, электрического потенциала, массы и т.д.

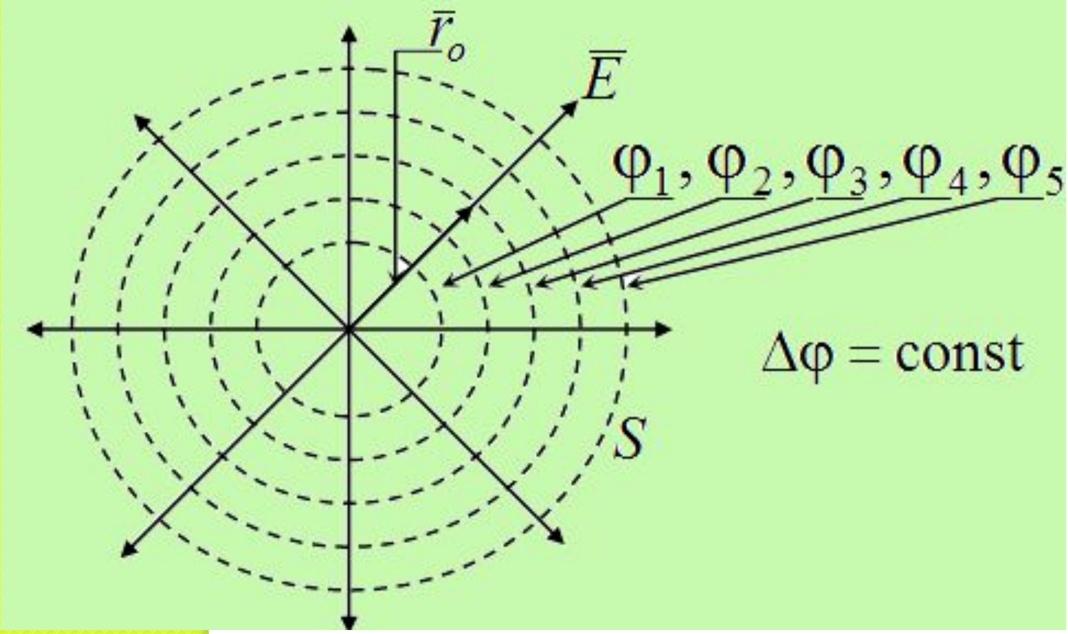
Примеры

1) на топографических картах линии, соединяющие точки, имеющих одну и туже высоту над уровнем моря;

2) в термодинамике на диаграммах состояния линии, соединяющие точки, имеющих одну и туже температуру (*изотермы*), давление (*изобары*) или объём (*изохоры*);

Например, для скалярного поля электростатического потенциала φ эти поверхности называются **эквипотенциальными** (равнопотенциальными) и изображаются так, чтобы

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_3 = \ldots. = \varphi_{i-1} - \varphi_i = \Delta\varphi = const\ .$$



Изображают поверхности или линии равного уровня так, чтобы разность значений скалярной функ ции точки любых двух соседних поверхностей равного уровня была одинаковой величины.

Для характеристики **величины и направления** скорости изменения скалярного поля в пространстве введем понятие **градиента скалярного поля.**

Градиентом скалярного поля называется вектор, характеризующий наибольшую (по модулю и направлению) скорость изменения этого скалярного поля.

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

В определении градиента существенны два положения:
1) направление, в котором берутся две близлежащие точки, должно быть таким, чтобы скорость изменения потенциала была максимальна;
2) направление таково, что скалярная функция в этом направлении возрастает (не убывает). Очевидно, что

$$grad\, \varphi = \overline{n_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

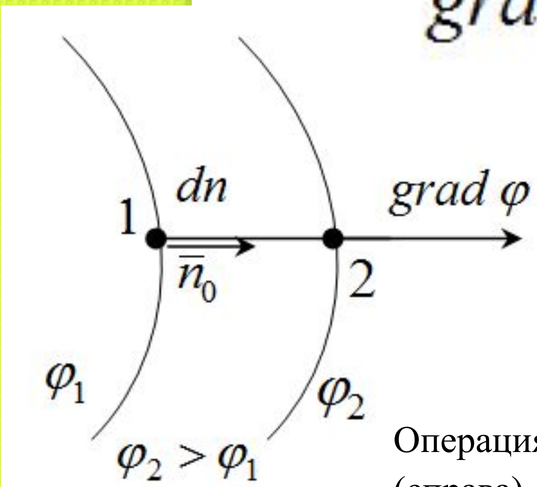
от лат. *gradiens*, род. падеж *gradientis* — шагающий, растущий) — вектор, своим направлением указывающий направление наибольшего возрастания некоторой величины , значение которой меняется от одной точки пространства к другой (скалярного поля), а по величине (модулю) равный быстроте роста этой величины в этом направлении.

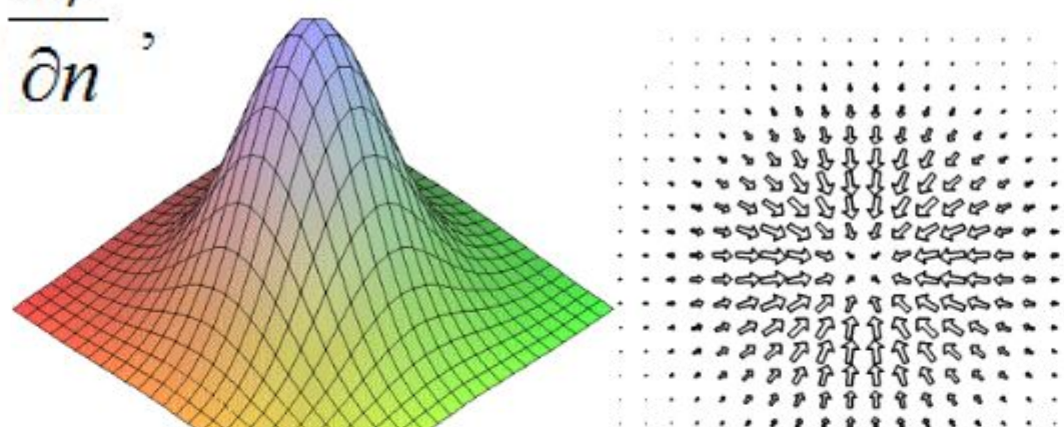
∂n – расстояние по перпендикуляру (по нормали) между эквипотенциальными поверхностями;

n_0– нормаль к эквипотенциали, направленная в сторону роста скалярной функции;

$\partial\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ приращение потенциала при переходе от точки 1 к точке 2

$$grad\,\varphi = \overline{n_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial n},$$





Операция градиента преобразует холм (слева), если смотреть на него сверху, в поле векторов (справа). Видно, что векторы направлены «в горку» и тем длиннее, чем круче наклон.

В декартовой системе координат градиент скалярной функции равен

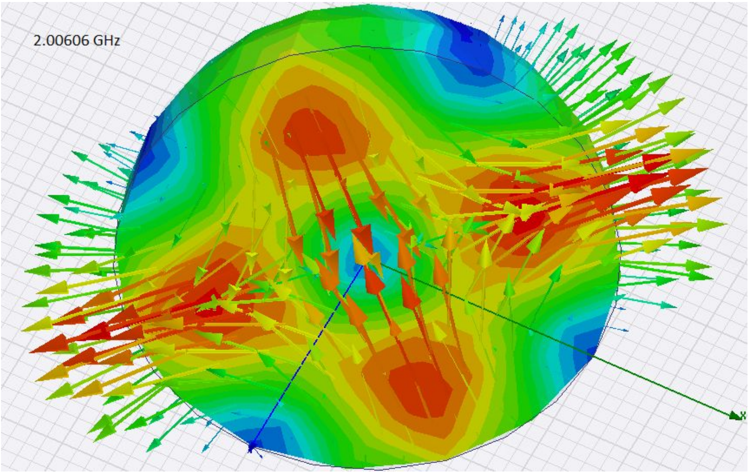
$$grad\,\varphi = i\frac{\partial\varphi}{\partial x} + j\frac{\partial\varphi}{\partial y} + k\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \nabla\varphi$$

где ∇ -оператор «набла», равный $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$

Мы видим, что скалярное поле φ порождает векторное поле

$$\overline{F} = grad\,\varphi$$

Такое векторное поле называется **потенциальным,** а скалярная функция φ-**потенциалом.**



Важнейшей характеристикой **векторных полей**

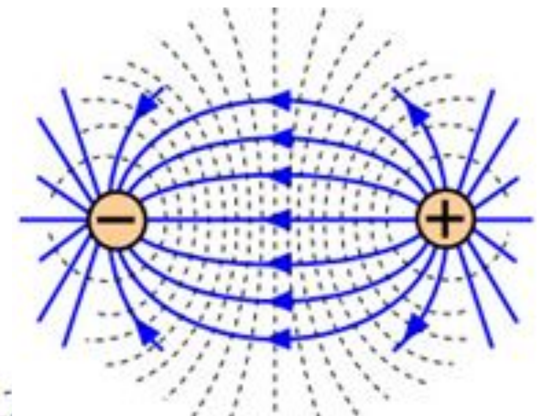
Характеристики интенсивности поля

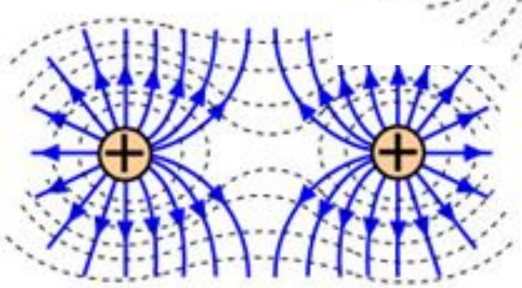
Характеристики вращательной способности поля

- Поток вектора
- Циркуляция
- Дивергенция
- Ротор или вихрь

Суммарные характеристики поля (интегральные)

Дифференциальными (точечными) характеристиками поля

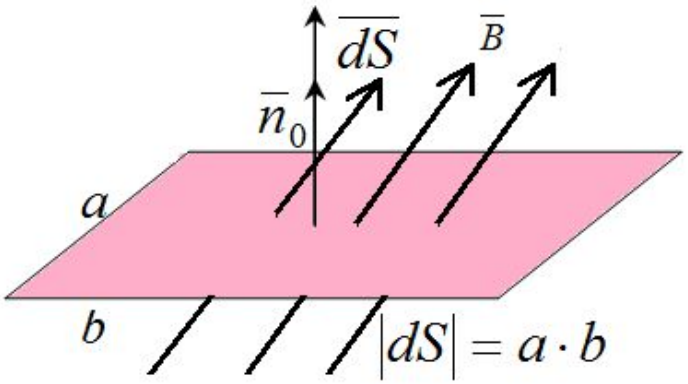




Для наглядного отображения векторных полей обычно строят картины силовых линий. Это линии, касательные к которым в каждой точке указывают направление вектора. Густота силовых линий может соответствовать интенсивности поля.

Потока вектора $\bar{a}$

Потоком векторного поля через какую либо поверхность называется величина поверхностного интеграла от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к выбранной стороне поверхности

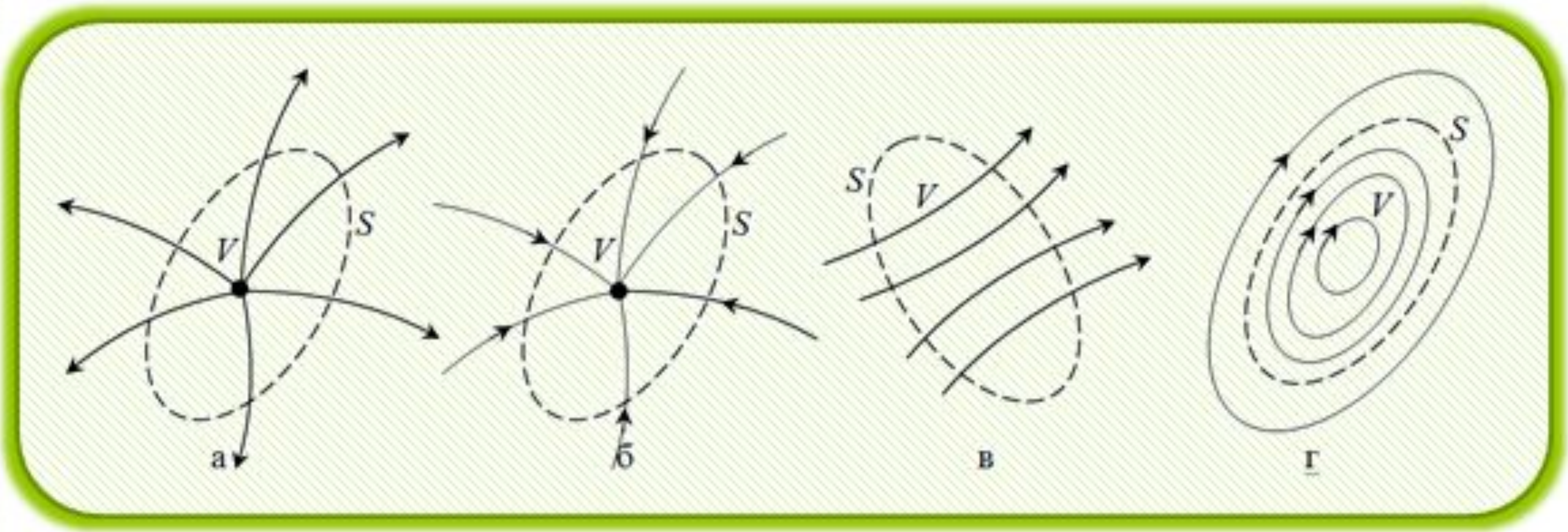


$$\Phi = \int_S \overline{B} d\overline{S},$$

$d\overline{S} = dS \cdot \overline{n}_0$ вектор элементарной площадки , направленной перпендикулярно поверхности площадки dS

$\overline{n}_0$ – единичный вектор нормального направления (нормаль)

Поток вектора проходящий через замкнутую поверхность **положителен**, если вектор выходит из объема V , ограниченного замкнутой поверхностью S, **и отрицателен**, если входит внутрь



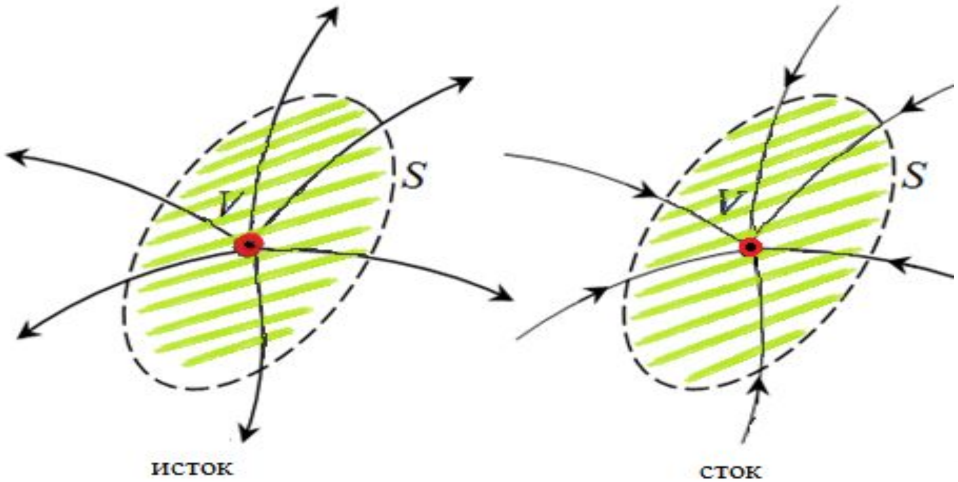
Область V может содержать точку, из которой расходятся **(исток)** (рис. а) или в которую сходятся **(сток)** (рис. б) все силовые линии. Последние могут также проходить область насквозь (рис. в) или совсем не пересекать ее поверхность S (рис. г).

$\Phi>0$ (а), $\Phi<0$ (б), $\Phi=0$ (в) и $\Phi=0$ (г).

Дивергенция

С целью оценки интенсивности источников надо поток вектора $\bar{a}$ брать через достаточно малую замкнутую поверхность при стягивании ее в точку. Такой предел называют **дивергенцией** (а также расхождением, расходимостью) вектора

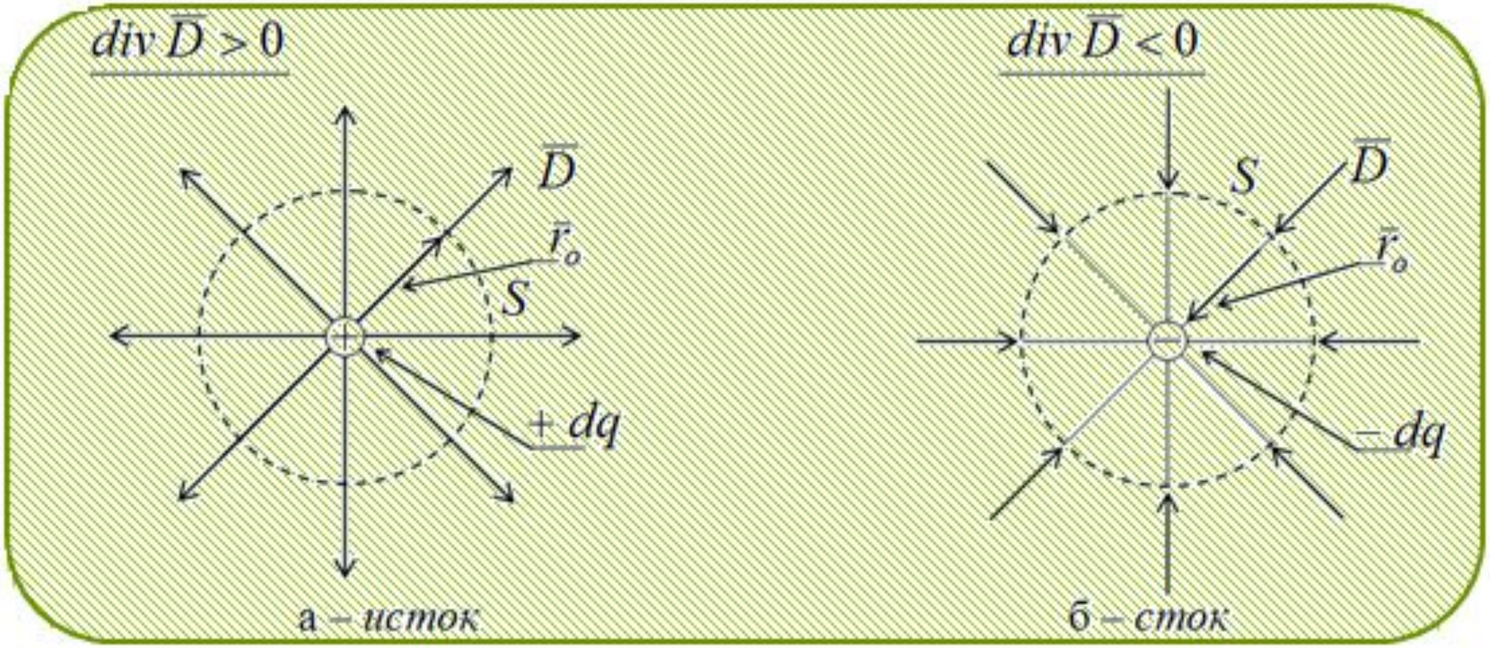
$$div\,\bar{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \bar{a}\,d\bar{S}}{\Delta V}$$



Величина дивергенции характеризует отнесенную к единице объема производительность (интенсивность) источников поля в бесконечно малом объеме, окружающем данную точку. Если дивергенция отличается от нуля, то физически это значит, что в рассматриваемой точке имеются **источники** ($div\,\bar{a} > 0$) или **стоки** ($div\,\bar{a} < 0$).

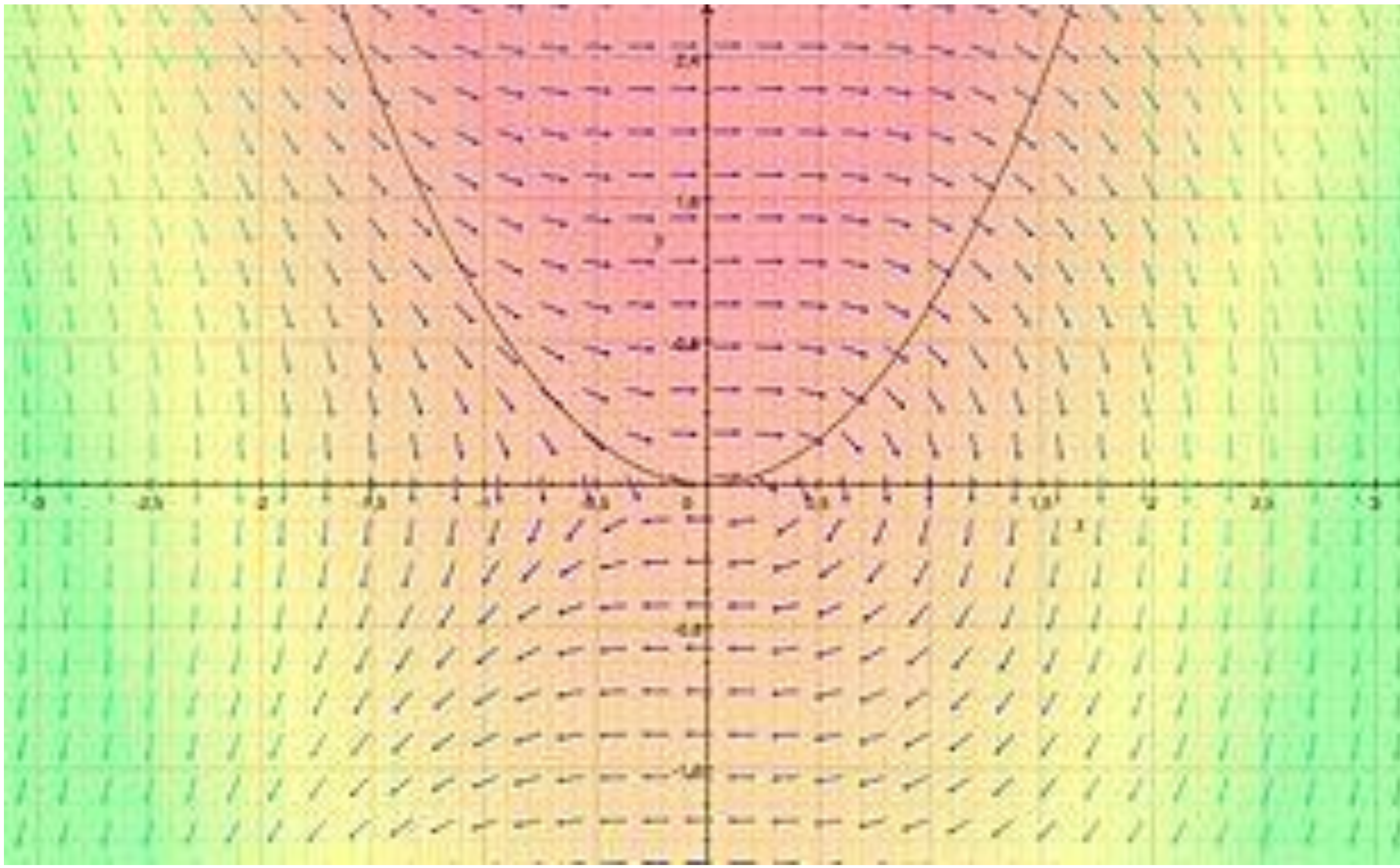
Если дивергенция равна нулю, то точка М и ее окрестность свободны от источников и стоков (нет ни истоков, ни стоков линий вектора , т.е. линии не начинаются и не кончаются в рассматриваемой точке).

Векторные поля, для которых дивергенция тождественно равна нулю, называются <u>соленоидальными</u> (трубчатыми) полями, т.е. полями без источников.



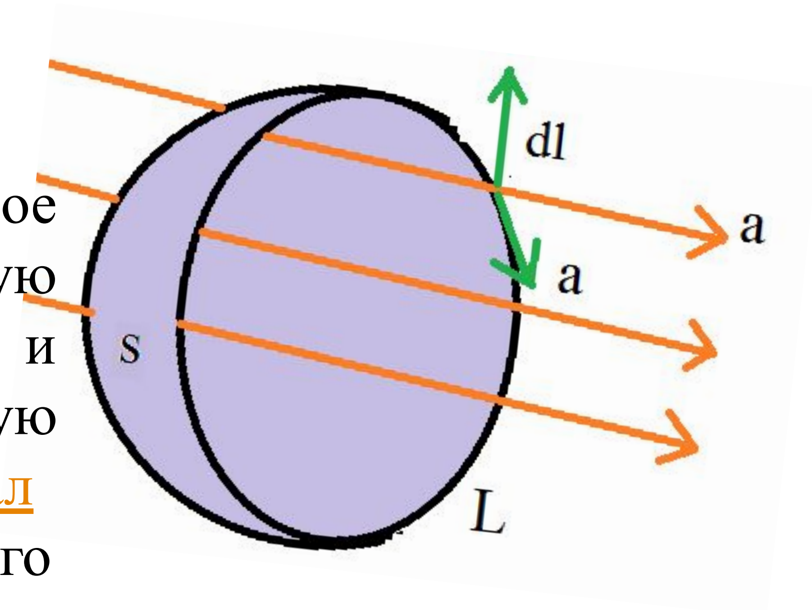
Примером векторного поля, имеющего конечное значение дивергенции, является **поле заряда**, обладающего конечной объемной плотностью ρ. В области расположения этого заряда дивергенция будет отлична от нуля, так как поток вектора электрической индукции $\overline{D}$ отличен от нуля через любую достаточно малую замкнутую поверхность, расположенную вокруг этого объемного заряда.

Векторная функция и её дивергенция, представленные в виде скалярного поля (красный цвет указывает на повышение, зелёный обозначает уменьшение



Циркуляция

Если — произвольное векторное поле, мы возьмем его составляющую вдоль кривой линии и проинтегрируем эту составляющую по замкнутому контуру. Интеграл называется циркуляцией векторного поля по контуру.



$$Ц = \oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$$

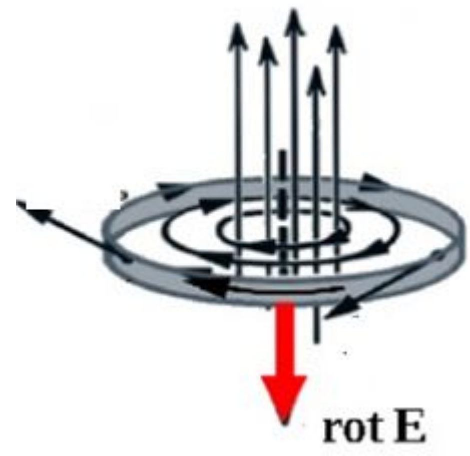
циркуляция зависит от двух вещей:

– длины самого контура (чем длиннее, тем больше циркуляция);

– скорости течения * (чем длиннее векторы «а», тем больше их *бесконечно малые* проекции и тем больше значение)

Циркуляция векторного поля имеет простую физическую интерпретацию. Если **F** – сила, действующая на частицу, то циркуляция векторного поля **F** представляет собой работу этой силы по перемещению частицы по замкнутому контуру *L*

Ротор (вихрь) вектора.



указывает направление, ортогонально которому вращательная способность поля наибольшая.

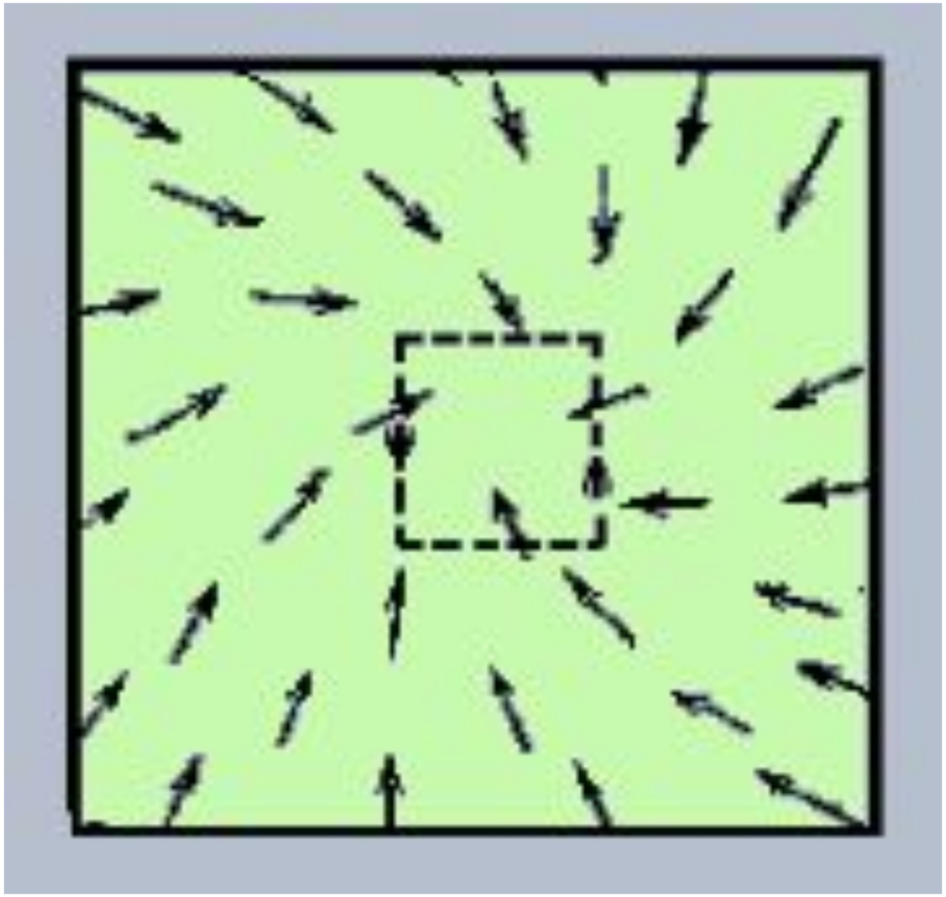
Показывает, насколько и в каком направлении закручено поле в каждой точке. Ротор поля а обозначается символом rot a

$$rot\,\overline{a} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\frac{\int \overline{a} d\overline{l}}{l}}{\Delta S}.$$

Под ротором вектора $\bar{a}$ понимается вектор, проекция которого на направление S равна пределу отношения циркуляции вектора по контуру $\bar{l}$ к величине площади плоской фигуры, ограниченной этим контуром, стягиваемой в точку

Ротор (вихрь) вектора является мерой «завихренности» векторного поля в рассматриваемой точке, т.е. он характеризует поле в отношении способности к образованию вихрей.

Ротор вектора в данной точке является векторной суммой его трех ортогональных проекций.

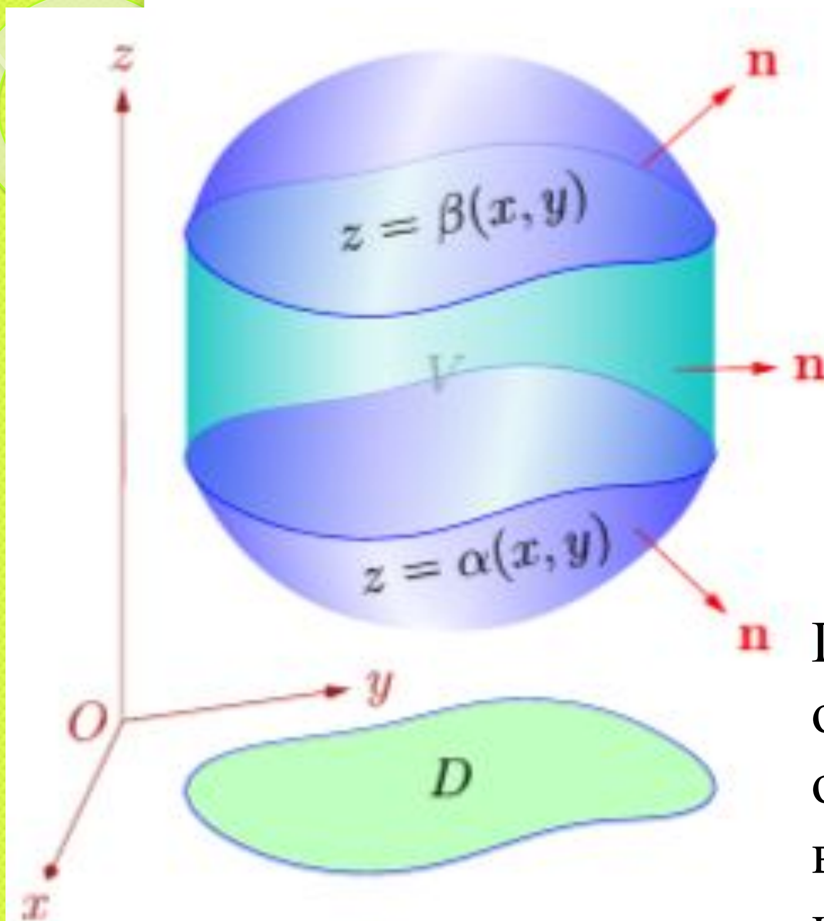


Теорема Стокса

Поток ротора векторной функции а через поверхность S равен циркуляции этого вектора по контуру l

$$\int_S rot\,\overline{a}d\overline{S} = \oint_l \overline{a}d\overline{l}\ .$$

Теорема Остроградского – Гаусса



$$\oint_S \overline{a}\, d\overline{S} = \int_V div\, \overline{a}\, dV$$

Поток векторного поля через замкнутую ограниченную поверхность, ориентированную в направлении внешней нормали, равен тройному интегралу от дивергенции поля по объему, который ограничивает поверхность.

Спасибо за внимание!!!