

Геометрия - 1

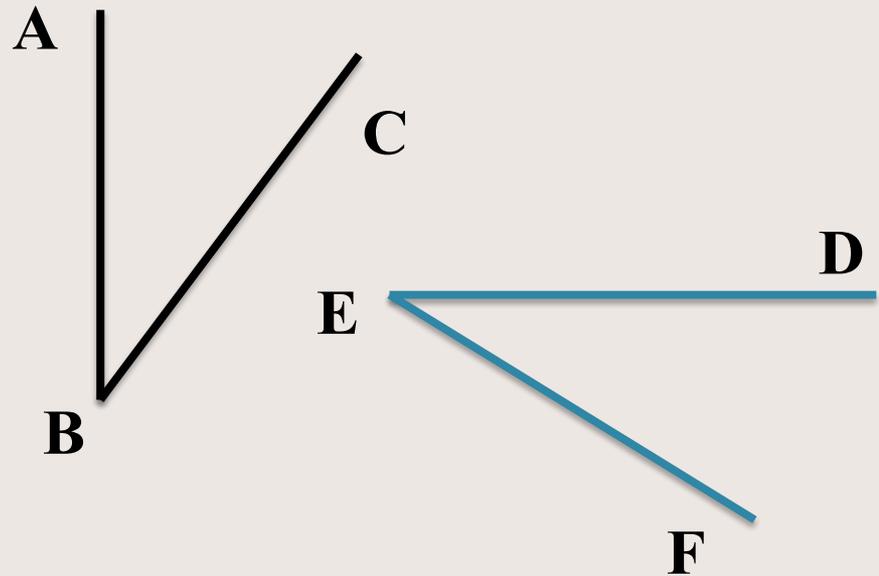
**Треугольники и
четырёхугольники**

Полезные факты и теоремы



О равенстве углов со взаимно перпендикулярными сторонами

Если $\angle ABC$ и $\angle DEF$ оба острые или оба тупые и $AB \perp DE$, $BC \perp EF$, то $\angle ABC = \angle DEF$.



Задача 1

Задача 2

Задача 5

Полезные факты и теоремы

О точках пересечения медиан, биссектрис, высот треугольника



Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.



Три высоты треугольника пересекаются в одной точке (ортоцентр треугольника).



Три медианы треугольника пересекаются в одной точке (центроид треугольника) и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины.

Задача 4

Полезные факты и теоремы

Свойства средней линии трапеции



Средняя линия параллельна основаниям трапеции.



Средняя линия равна полусумме оснований трапеции.



Средняя линия (и только она) делит пополам любой отрезок, заключенный между основаниями трапеции.



Эти теоремы справедливы и для средней линии треугольника.

Полезные факты и теоремы

Свойство медианы

в прямоугольном треугольнике



В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

Обратная теорема



Если в треугольнике одна из медиан равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный.

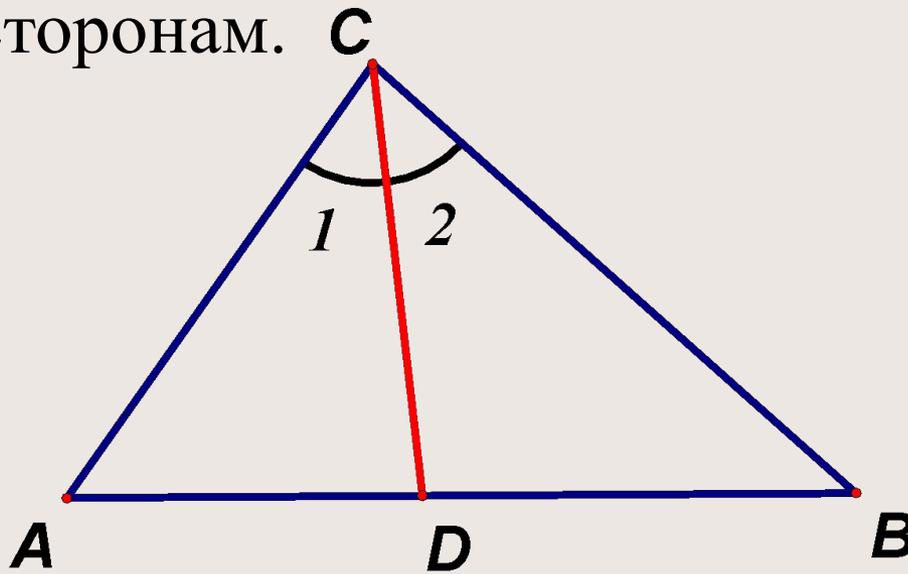
Задача 5

Полезные факты и теоремы

Свойство биссектрисы

внутреннего угла треугольника

Биссектриса внутреннего угла треугольника делит сторону, к которой она проведена, на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

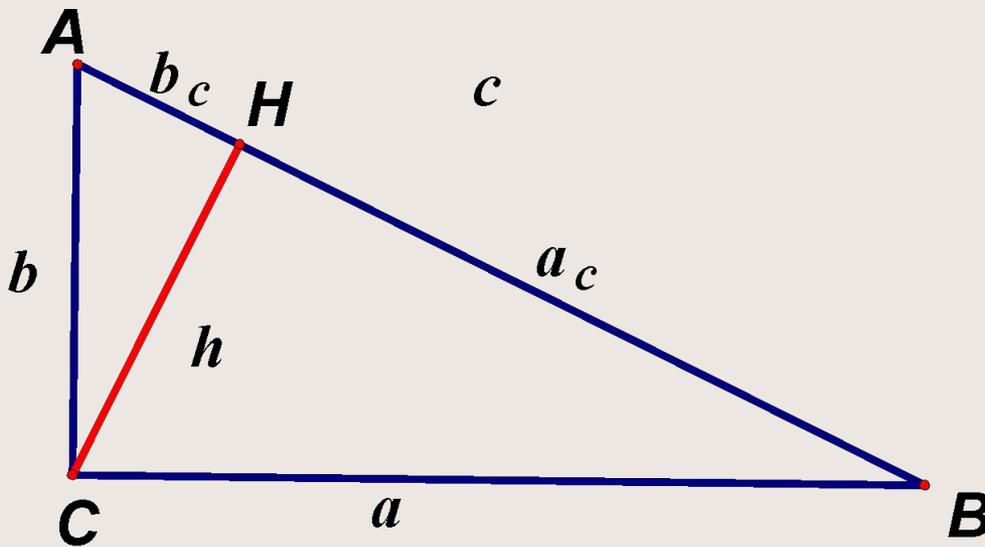


$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{CB}{DB}$$

Полезные факты и теоремы

Метрические соотношения
в прямоугольном треугольнике



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$h^2 = a_c \cdot b_c$$

$$a^2 = c \cdot a_c$$

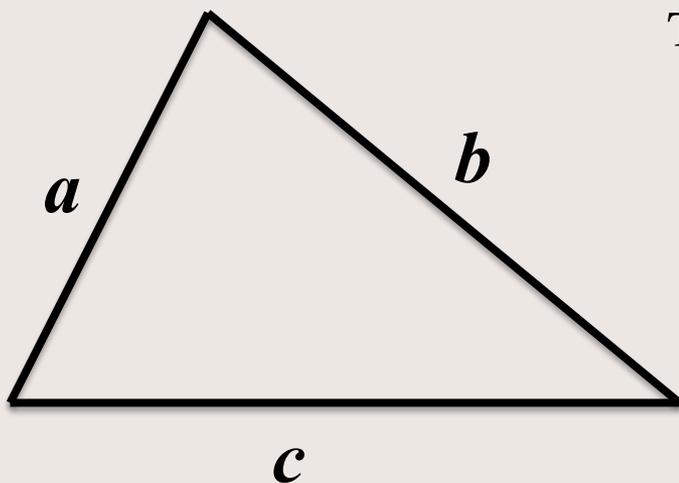
$$b^2 = c \cdot b_c$$

$$h = \frac{a \cdot b}{c}$$

Полезные факты и теоремы

Определение вида треугольника по его сторонам

Пусть a , b и c – стороны треугольника, причем c - наибольшая сторона, тогда



если $c^2 < a^2 + b^2$, то
треугольник остроугольный

если $c^2 = a^2 + b^2$, то
треугольник прямоугольный

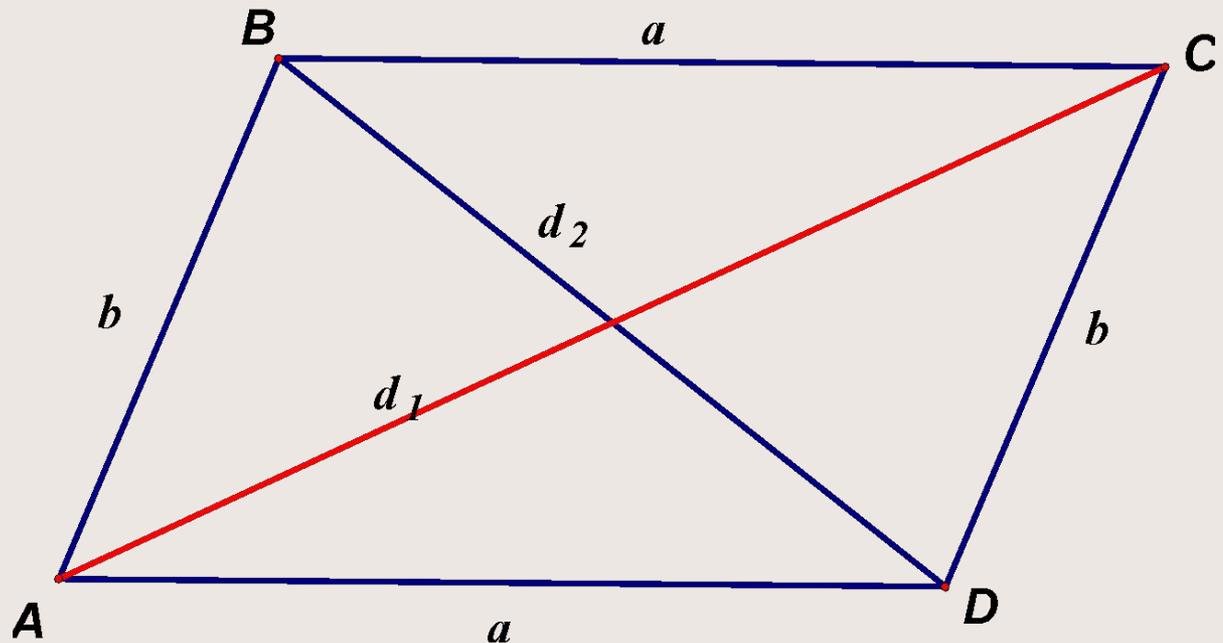
если $c^2 > a^2 + b^2$, то
треугольник тупоугольный

Полезные факты и теоремы

Метрические соотношения в параллелограмме

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$



Задача 3



Полезные факты и теоремы

Обобщенная теорема подобия

Если два треугольника подобны, то любой линейный элемент (или сумма линейных элементов) одного треугольника относится к соответствующему линейному элементу (или сумме соответствующих линейных элементов) другого треугольника как соответственные стороны.

Соответственные линейные элементы: медианы, высоты, биссектрисы, периметры, радиусы описанной и вписанной окружностей.

Задача 9

Три пути доказательства равенства отрезков



Рассмотреть эти отрезки как стороны двух треугольников и доказать, что треугольники равны.



Рассмотреть эти отрезки как стороны одного треугольника и доказать, что треугольник равнобедренный.



Заменить отрезок a равным отрезком a_1 , отрезок b равным отрезком b_1 и доказать равенство отрезков a_1 и b_1 .

Дополнительные построения



Проведение прямой, параллельной или перпендикулярной одной из имеющихся.



Удвоение медианы треугольника с целью достроить треугольник до параллелограмма.

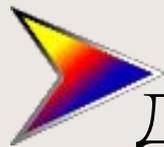


Проведение вспомогательной биссектрисы.

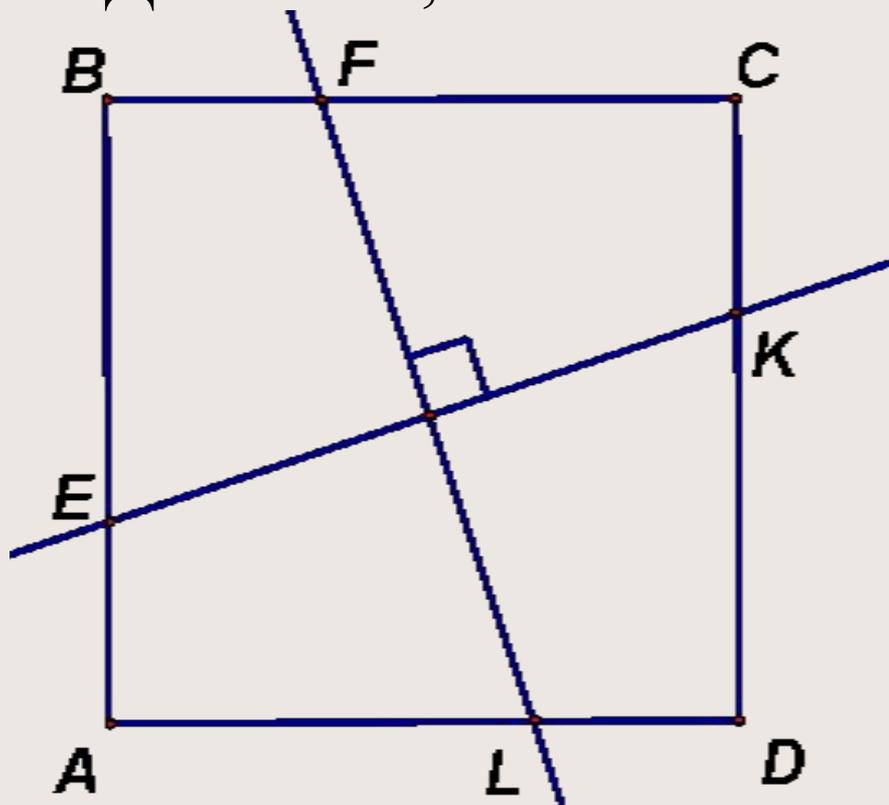


Дополнительные построения, связанные с окружностью.

Задача 1

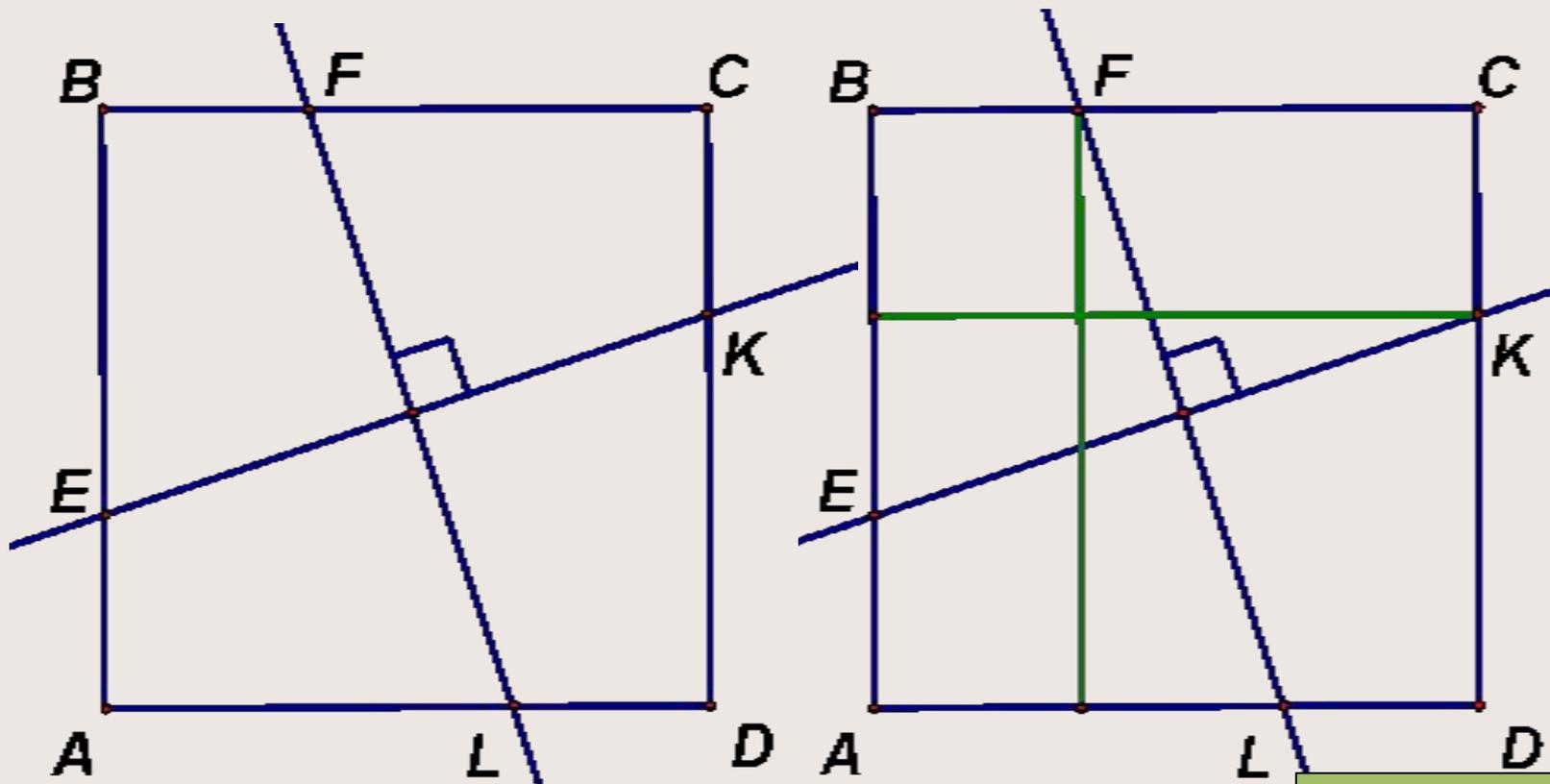


Две взаимно перпендикулярные прямые пересекают стороны AB , BC , CD , AD квадрата $ABCD$ в точках E , F , K , L соответственно. Докажите, что $EK=FL$.



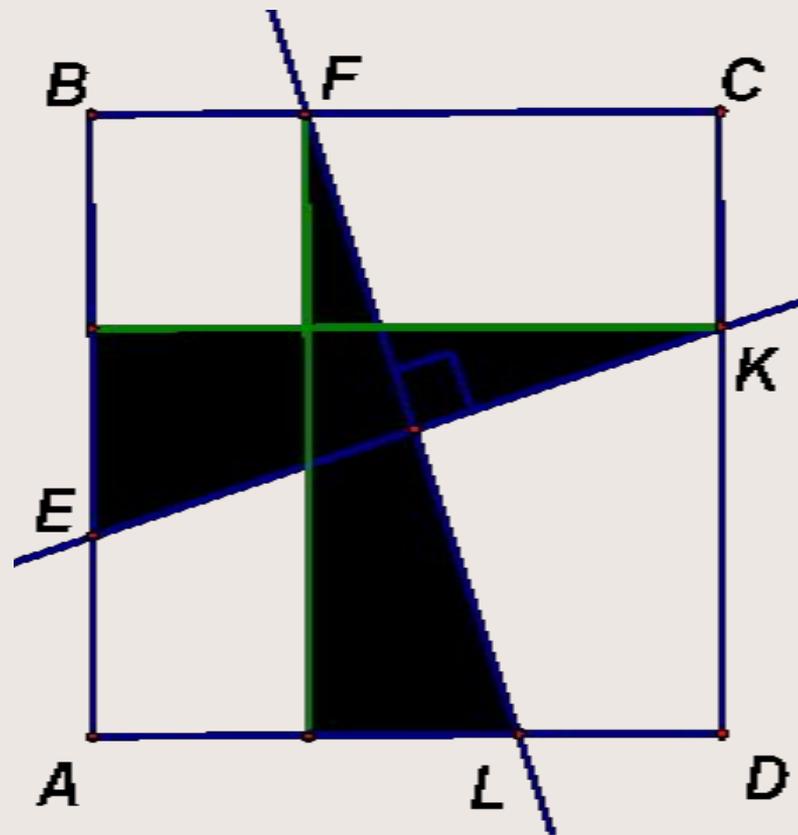
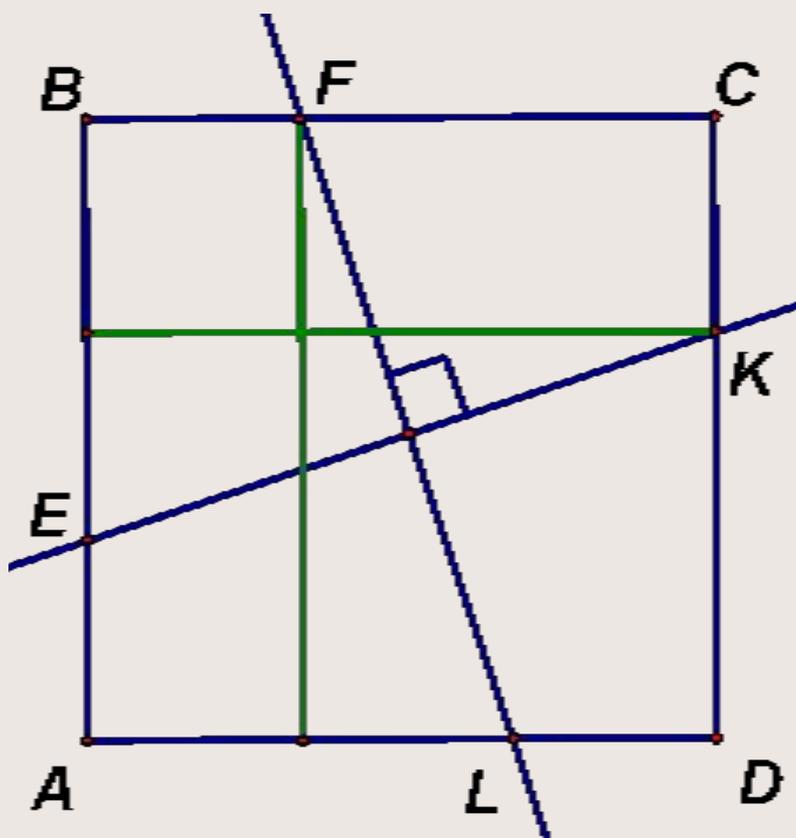
Две взаимно перпендикулярные прямые пересекают стороны AB , BC , CD , AD квадрата $ABCD$ в точках E , F , K , L соответственно.

Докажите, что $EK=FL$.



Две взаимно перпендикулярные прямые пересекают стороны AB , BC , CD , AD квадрата $ABCD$ в точках E , F , K , L соответственно.

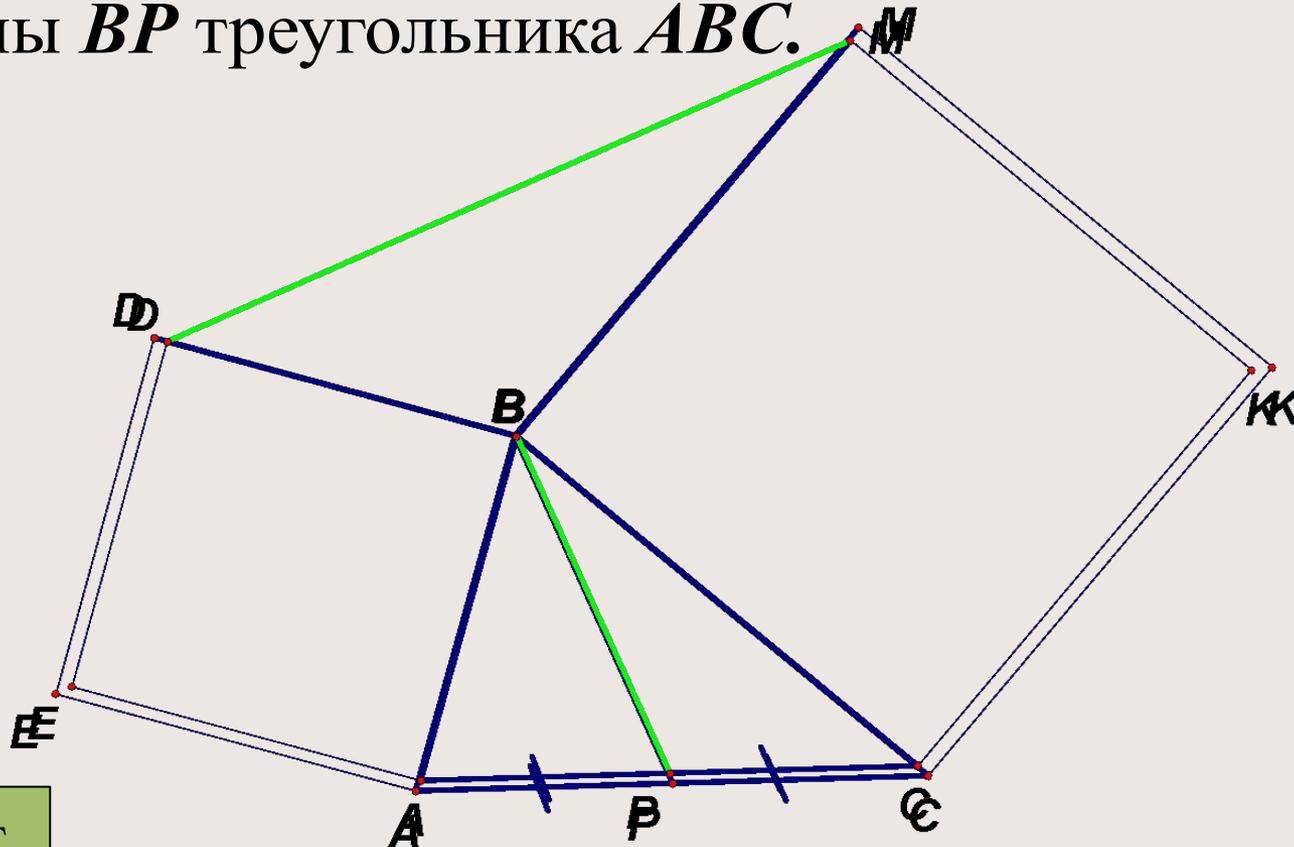
Докажите, что $EK=FL$.



Задача 2

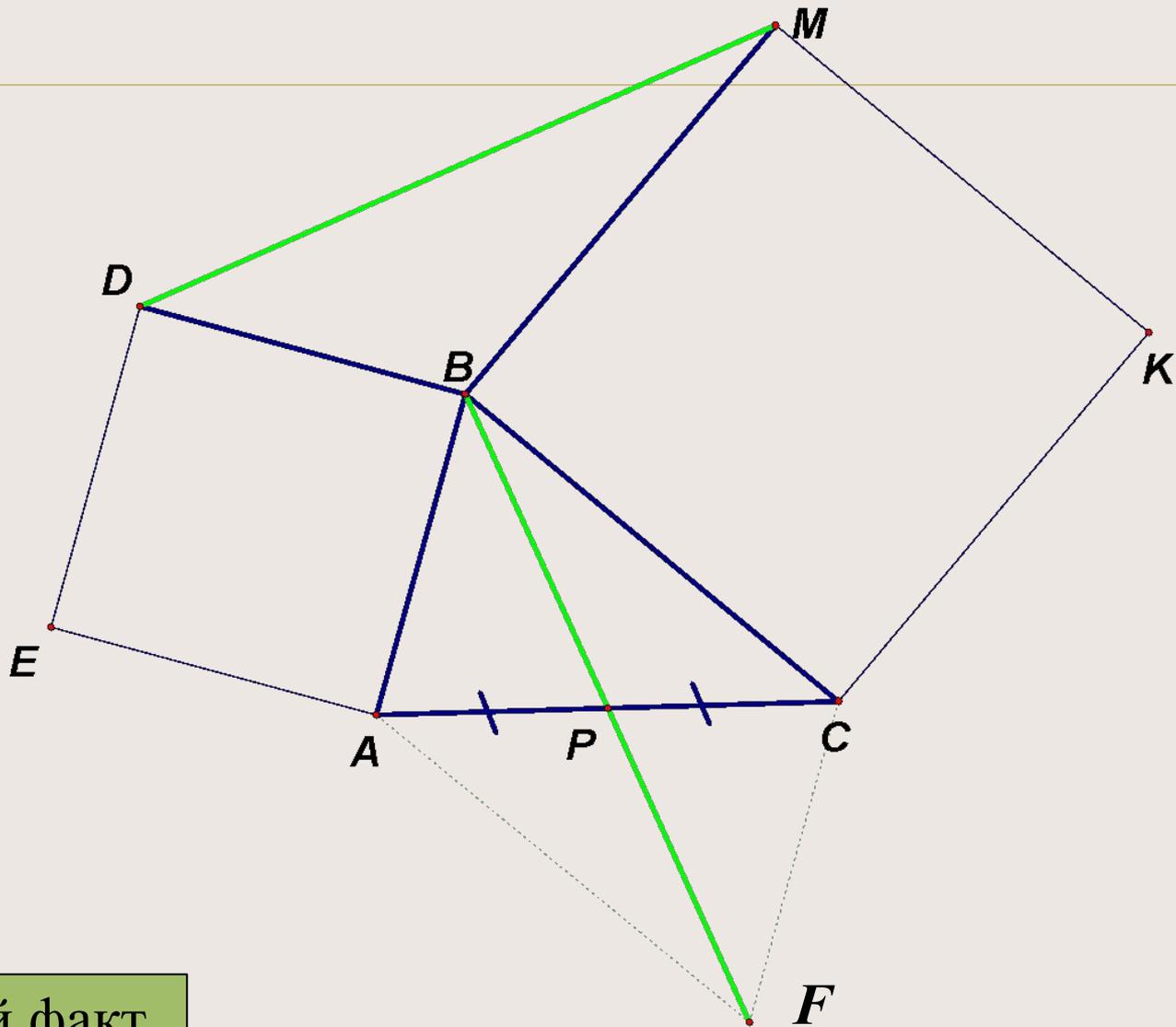


На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены квадраты $ABDE$ и $BCKM$. Докажите, что отрезок DM в два раза больше медианы BP треугольника ABC .



Нужный факт

На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены квадраты $ABDE$ и $BCKM$. Докажите, что отрезок DM в два раза больше медианы BP треугольника ABC .

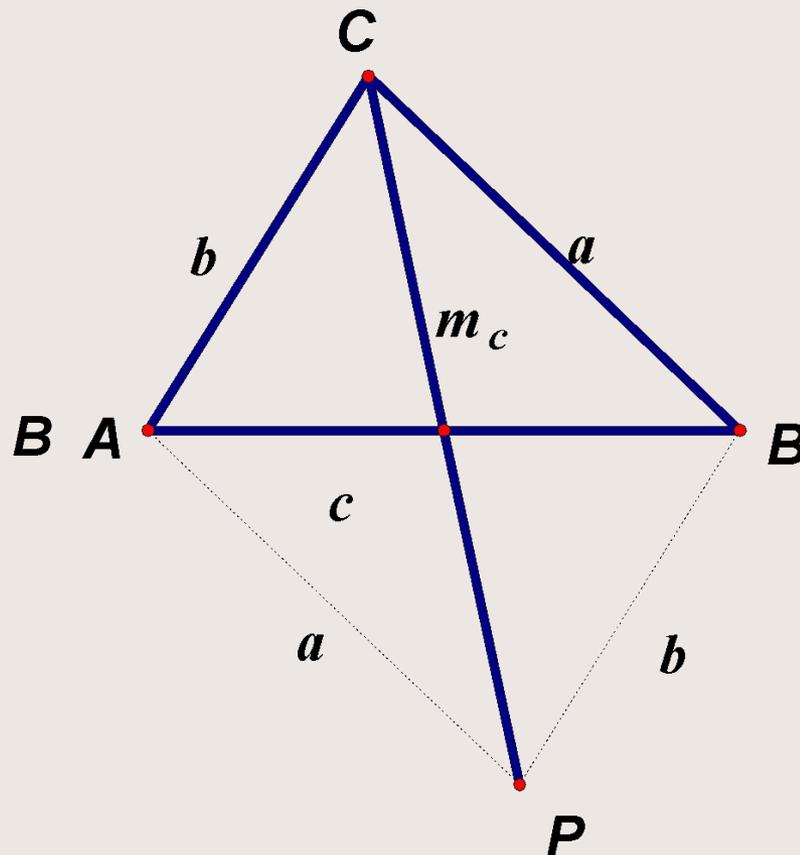
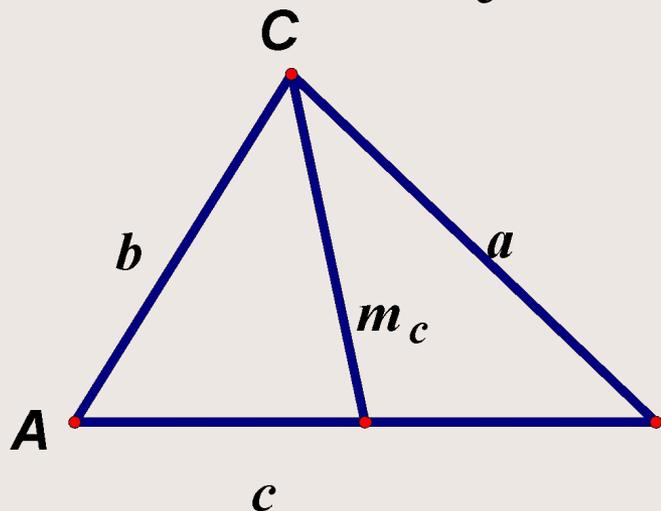


Нужный факт

Задача 3



Стороны треугольника a , b , c . Вычислить медиану m_c , проведенную к стороне c .

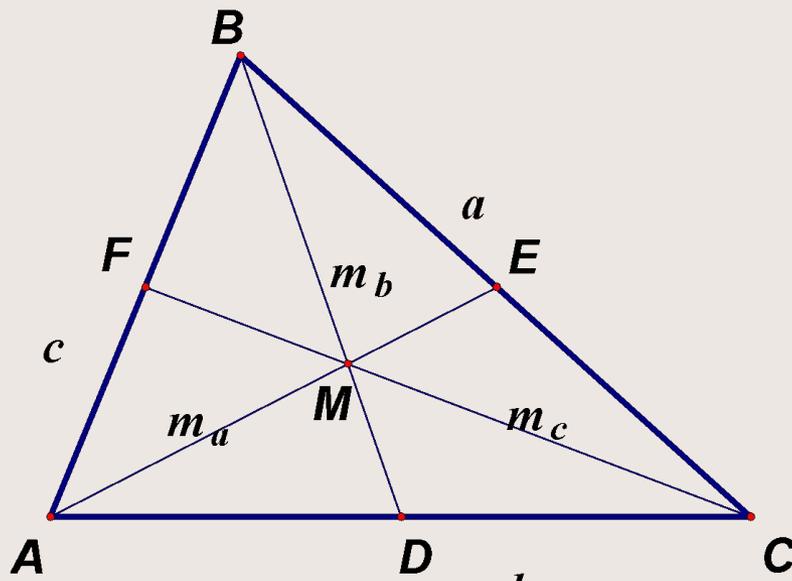


Нужный

факт

Задача 4

Доказать, что в любом треугольнике сумма медиан меньше периметра, но больше $\frac{3}{4}$ периметра.



Сначала докажем, что сумма медиан **больше** $\frac{3}{4}$ **периметра**.

Затем докажем, что сумма медиан **меньше** **периметра**.

Нужный

факт

Сначала докажем, что сумма медиан *больше* $\frac{3}{4}$ периметра.

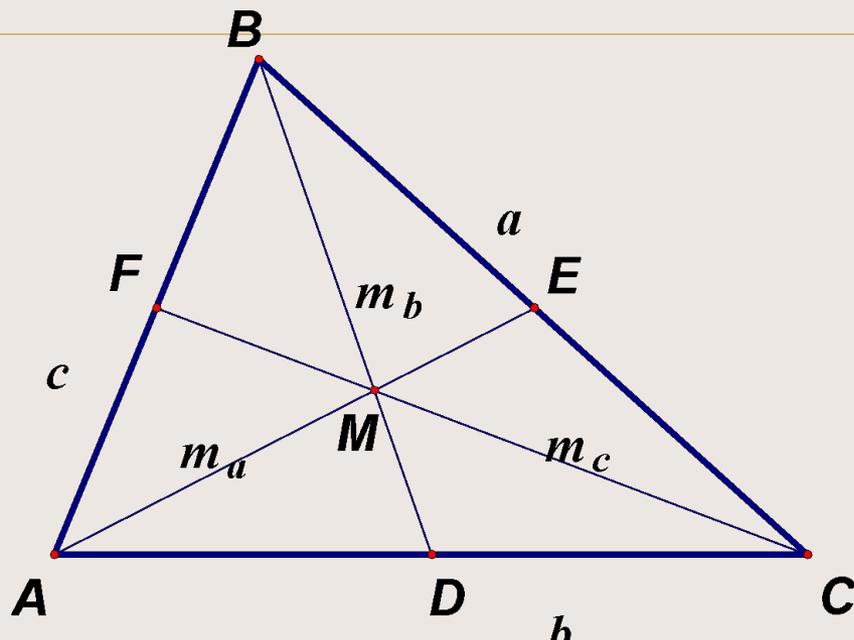
Рассмотрим $\triangle ABC$

$$AM = \frac{2}{3} AE = \frac{2}{3} m_a$$

$$MC = \frac{2}{3} CF = \frac{2}{3} m_c$$

$$AC < AM + MC$$

$$b < \frac{2}{3} m_a + \frac{2}{3} m_c$$



Нужный

факт

Рассмотрим $\triangle BMC$: $BC < BM + MC$

$$a < \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c$$

Рассмотрим $\triangle ABM$: $AB < BM + AM$

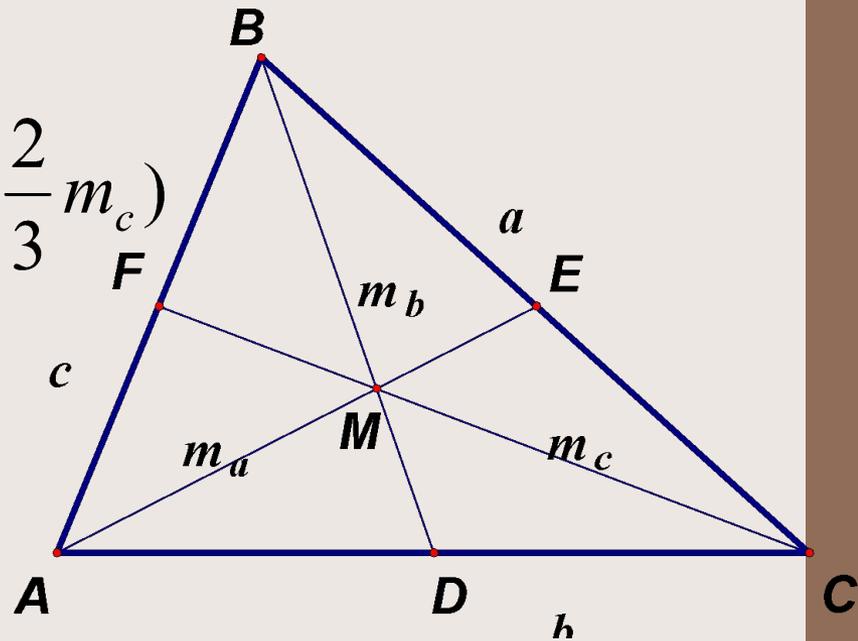
$$c < \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_a$$

$$a + b + c < 2 \cdot \left(\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c \right)$$

$$a + b + c < \frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c)$$

$$\frac{3}{4}(a + b + c) < m_a + m_b + m_c$$

$$m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}(a + b + c)$$



Докажем, что сумма медиан *меньше периметра*.

Рассмотрим $\triangle BCK$:

$$BK < BC + CK$$

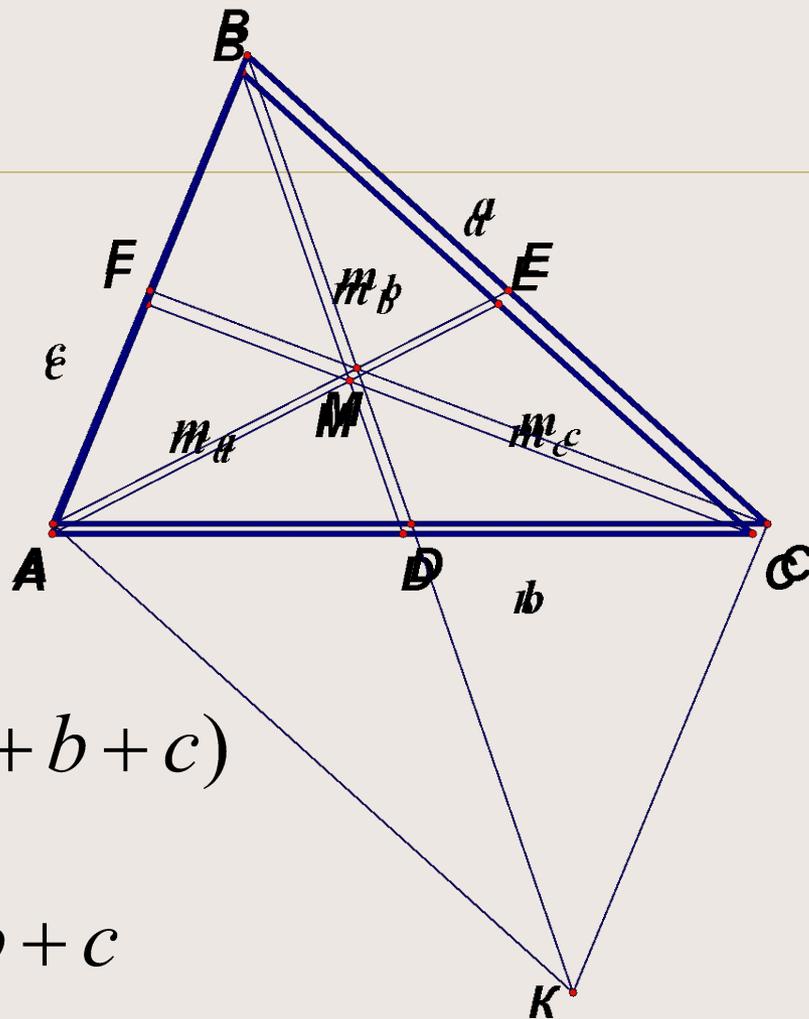
$$2m_b < a + c$$

$$2m_a < b + c$$

$$2m_c < a + b$$

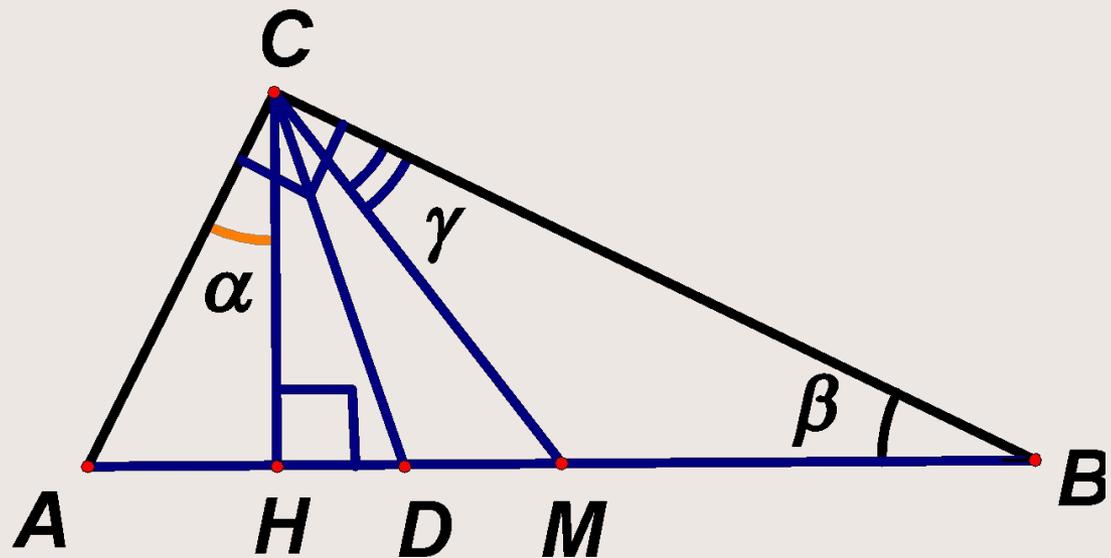
$$2(m_a + m_b + m_c) < 2(a + b + c)$$

$$m_a + m_b + m_c < a + b + c$$



Задача 5

Доказать, что в неравнобедренном прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенной из той же вершины.

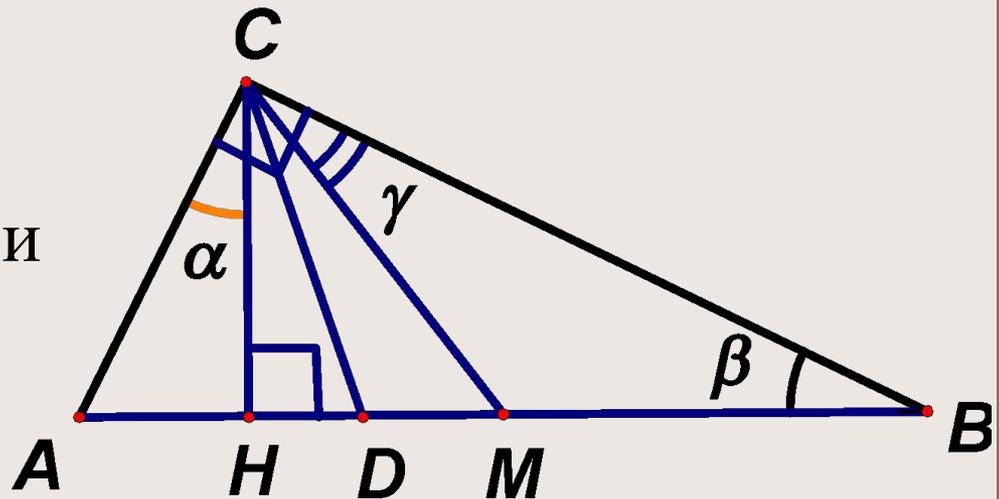


Нужный факт 1

Нужный факт 2

Доказать, что в неравнобедренном
 прямоугольном треугольнике биссектриса
 прямого угла делит пополам угол между
 медианой и высотой, проведенной из той же
 вершины $\alpha = \gamma$

как углы с взаимно
 перпендикулярными
 сторонами:



$$AC \perp BC, CH \perp AB$$

$$2. CM = \frac{1}{2} AB; CM = MB; \gamma = \beta; \quad \alpha = \gamma$$

$$3. \angle HCD = \angle ACD - \alpha;$$

$$\angle DCM = \angle DCB - \gamma;$$

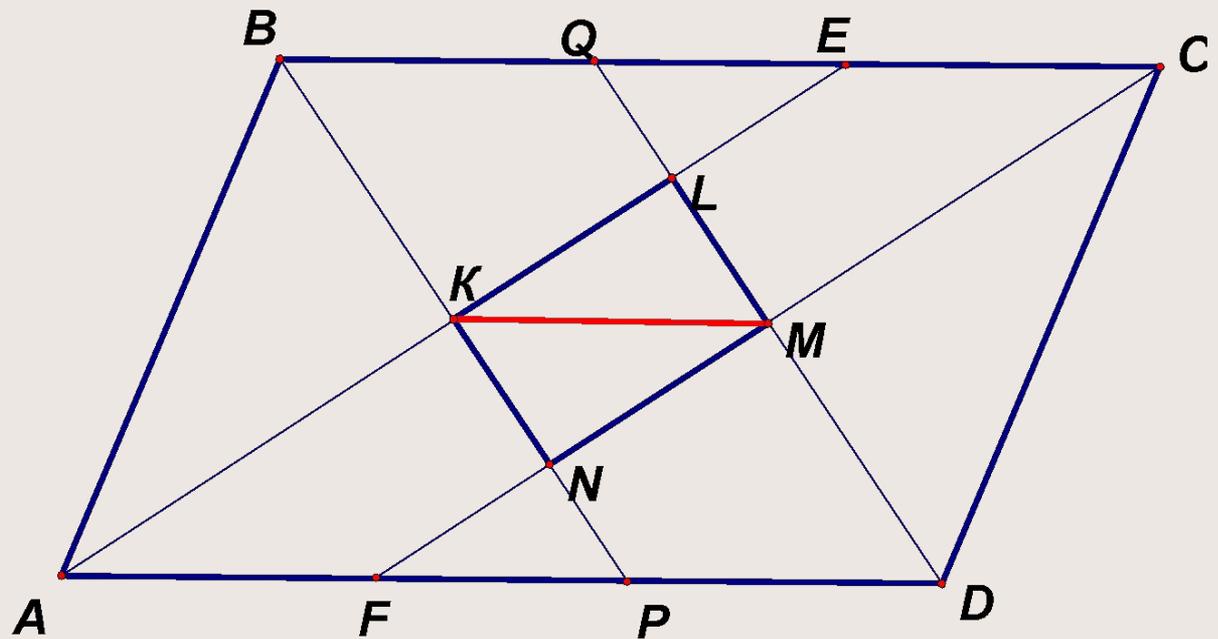
$$\angle HCD = \angle DCM$$

Доказано.

Задача 6



В параллелограмме со сторонами a и b проведены биссектрисы внутренних углов. Найдите длины диагоналей четырехугольника, образованного в пересечении биссектрис.



Нужный факт

1. AE - биссектриса угла A ,
 BP - биссектриса угла B
 $\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$

$$2\angle ABP + 2\angle BAE = 180$$

Значит,

$\angle BKA + \angle BAE = 90^\circ$ и биссектрисы AE и BP

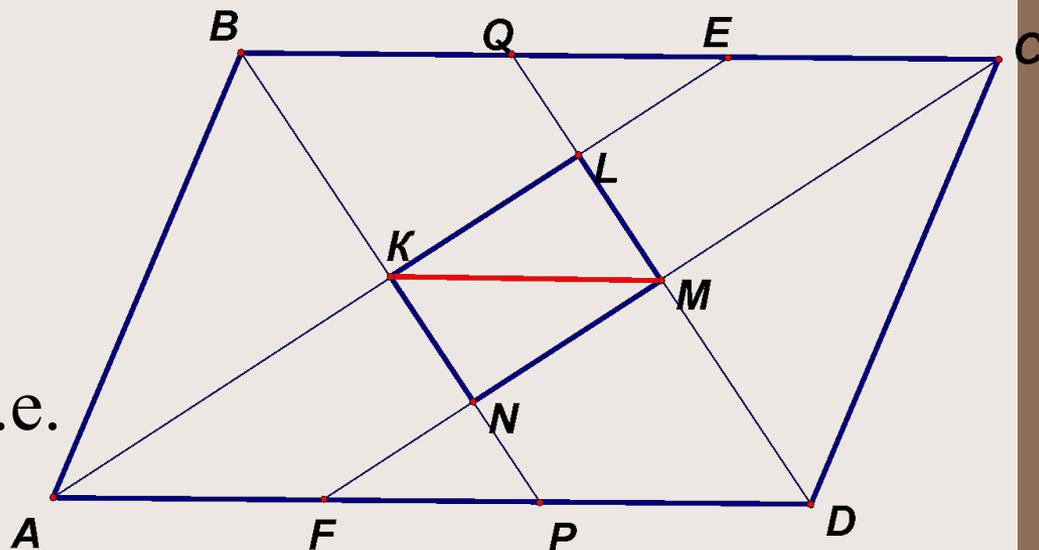
взаимно перпендикулярны

2. Докажите аналогично взаимную перпендикулярность биссектрис AE и QD , BP и CF , CF и QD

3. Вывод.

$KLMN$ –

четырехугольник с
 прямыми углами, т.е.
 прямоугольник.



4. Так как $KLMN$ – прямоугольник, достаточно найти длину KM .

5. Рассмотрим $\triangle ABP$.

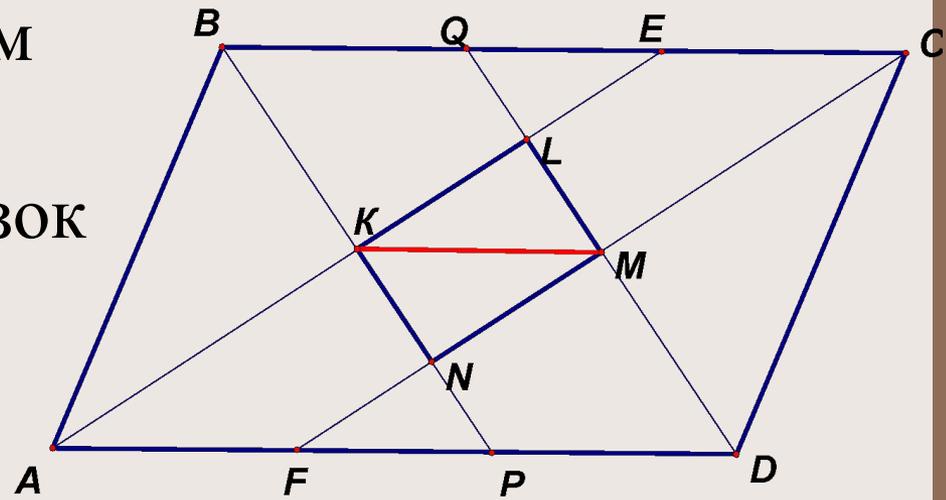
AK – биссектриса и высота, значит $\triangle ABP$ – равнобедренный и AK – медиана.

6. $AB=AP = b$, K – середина BP .

Аналогично, M – середина QD .

7. KM делит пополам отрезки BP и QD .

Значит KM – отрезок на средней линии параллелограмма, поэтому $KM \parallel AD$.

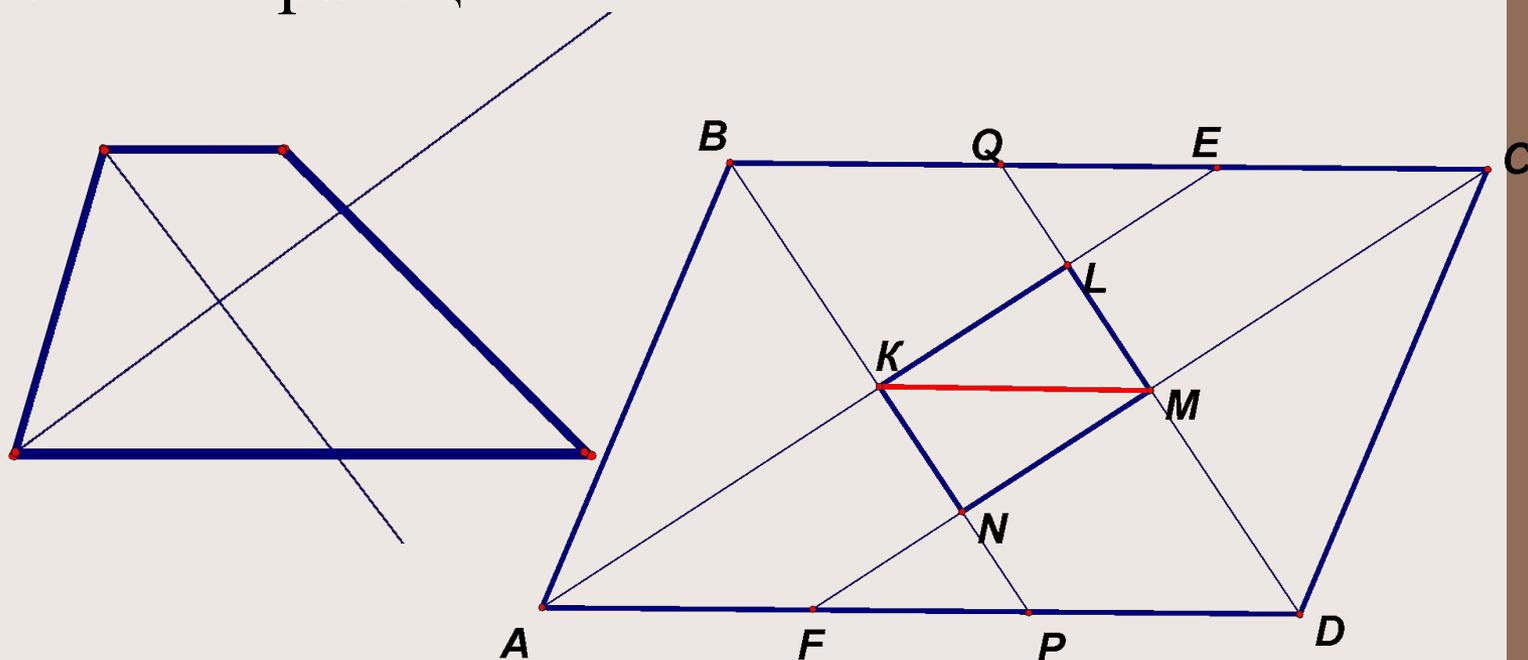


8. $KMDP$ – параллелограмм, $KM=PD = AD-AP = a-b$

Важный результат задачи 6



Биссектрисы углов, прилежающих к боковой стороне трапеции, пересекаются под прямым углом в точке, лежащей на средней линии трапеции.



Замечание

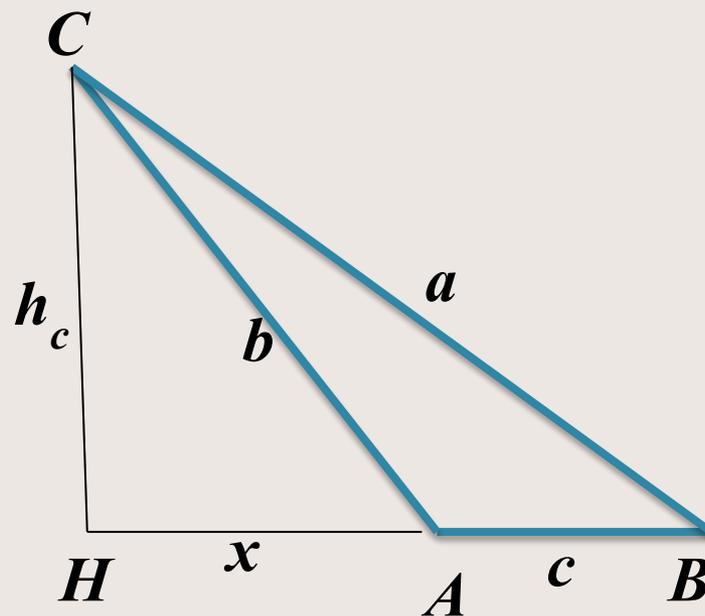
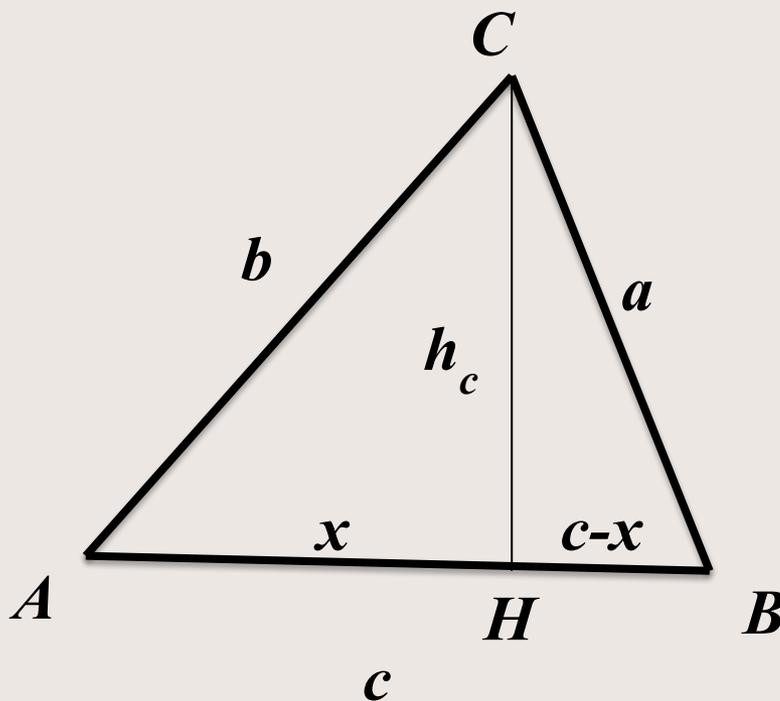
Основным методом составления уравнений в геометрических задачах является *метод опорного элемента*.

Он заключается в том, что один и тот же элемент (сторона, угол, площадь, радиус и т.д.) выражается через известные и неизвестные величины двумя различными способами и полученные выражения приравниваются.

В качестве опорного элемента часто выбирается площадь фигуры. Тогда говорят, что используется *метод площадей*.

Задача 7

Стороны треугольника a , b и c . Вычислить высоту h_c , проведенную к стороне c .



$$h_c = \frac{1}{2c} \sqrt{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)(b+c+a)}$$

Замечание

Если в задаче требуется найти отношение каких-либо величин, то она решается методом введения вспомогательного параметра.

В начале решения задачи какая-либо линейная величина принимается как известная.

Обозначив ее буквой a , выражаем через нее те величины, отношение которых требуется найти.

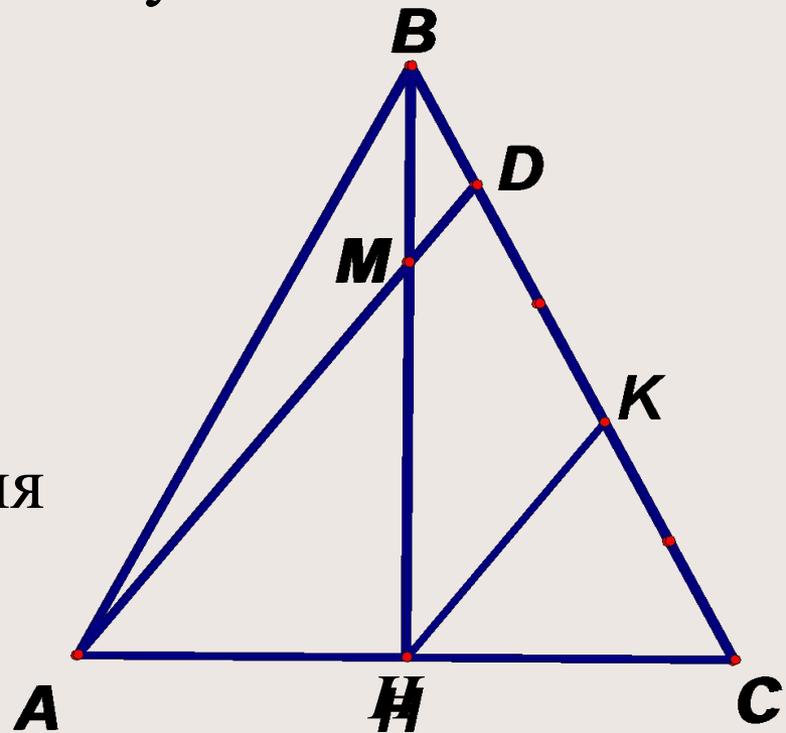
Тогда при составлении искомого отношения вспомогательный параметр a сократится.

Задача 8

В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, BH высота. На стороне BC взята точка D так, что $BD:DC=1:4$. Найдите в каком отношении отрезок AD делит высоту BH .

Пусть $BD=a$, тогда
 $DC=4a$, $BC=AB=5a$

Проведем $HK \parallel AD$,
тогда
 HK – средняя линия
 $\triangle ADC$, то
 $DK=KC=2a$



В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, BH высота. На стороне BC взята точка D так, что $BD:DC=1:4$. Найдите в каком отношении отрезок AD делит высоту BH .

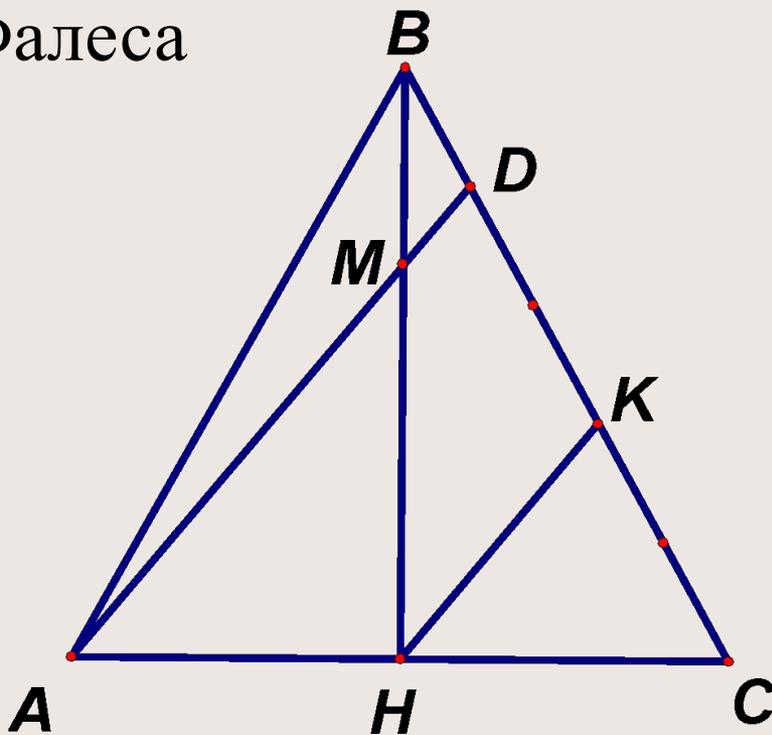
В $\triangle BHK$ по теореме Фалеса

$$\frac{BM}{MH} = \frac{BD}{DK}$$

$$\frac{BD}{DK} = \frac{a}{2a}$$

$$\frac{BD}{DK} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{BM}{MH} = \frac{1}{2}$$



Задача 9

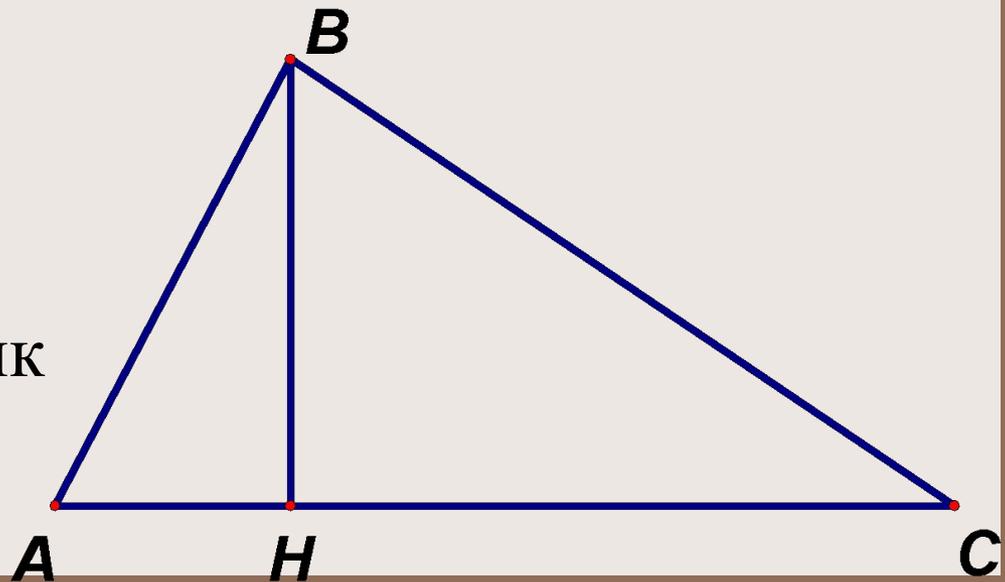


В треугольник со сторонами 10 , 17 и 21 см, вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на одной стороне треугольника, а две вершины - на двух других сторонах треугольника. Найти стороны прямоугольника, если известно, что его периметр равен $22,5$ см.

Определим вид треугольника.

$$21^2 ? 10^2 + 17^2$$

Значит, треугольник тупоугольный.



Нужный факт

В треугольник со сторонами 10 , 17 и 21 см, вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на одной стороне треугольника, а две вершины - на двух других сторонах треугольника. Найти стороны прямоугольника, если известно, что его периметр равен $22,5$ см.

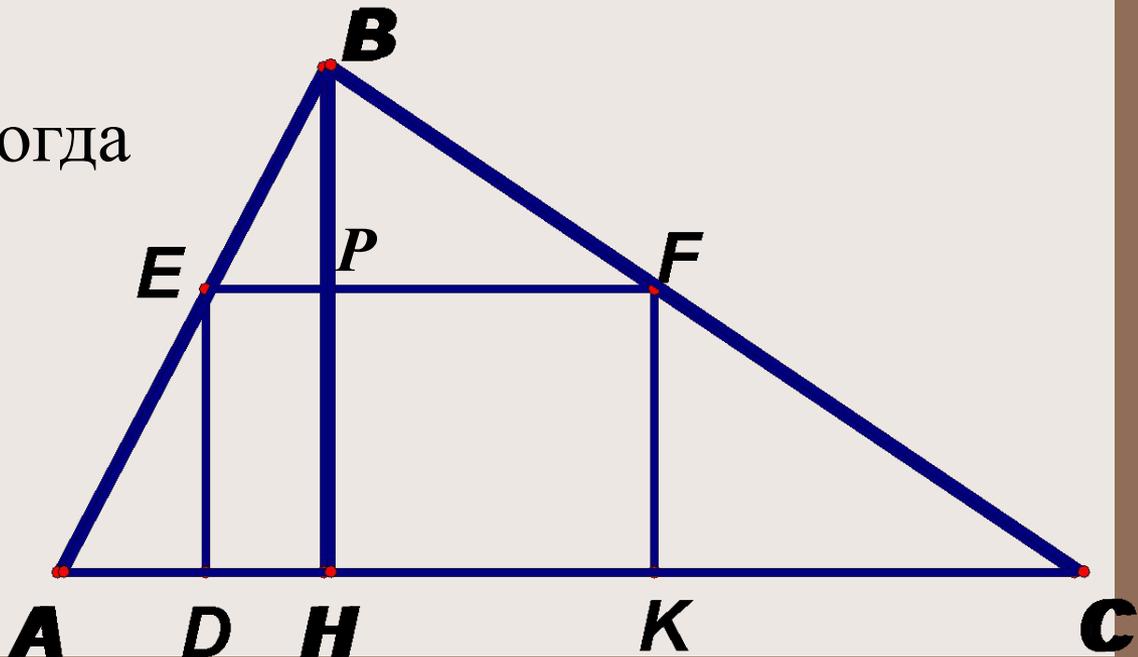
Тогда две вершины прямоугольника лежат на большей стороне треугольника.
Найдем высоту BH как в задаче 7.

$$BH = 8 \text{ см}$$

Пусть $ED = x$, тогда

$$EF = 11,25 - x,$$

$$BP = 8 - x$$



В треугольник со сторонами 10 , 17 и 21 см, вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на одной стороне треугольника, а две вершины - на двух других сторонах треугольника. Найти стороны прямоугольника, если известно, что его периметр равен $22,5$ см.

$$\triangle BEF \sim \triangle ABC$$

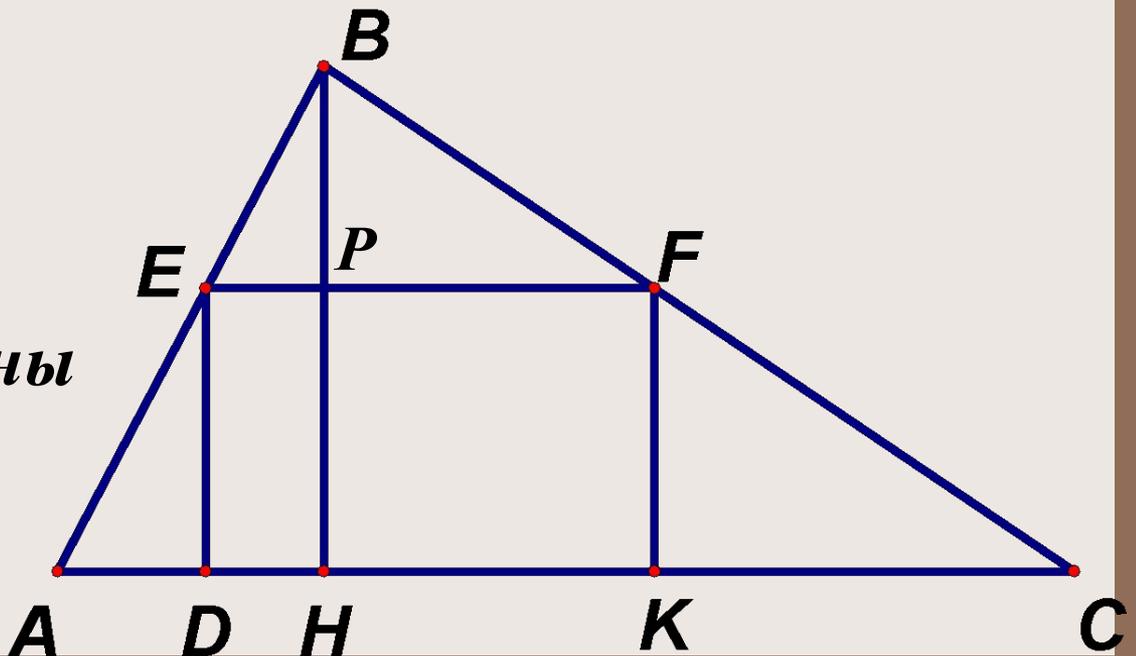
$$\frac{EF}{AC} = \frac{BP}{BH}$$

$$\frac{11,25 - x}{21} = \frac{8 - x}{8}$$

$$x = 6$$

**Ответ: стороны
6 см и 5,25 см**

Нужный факт



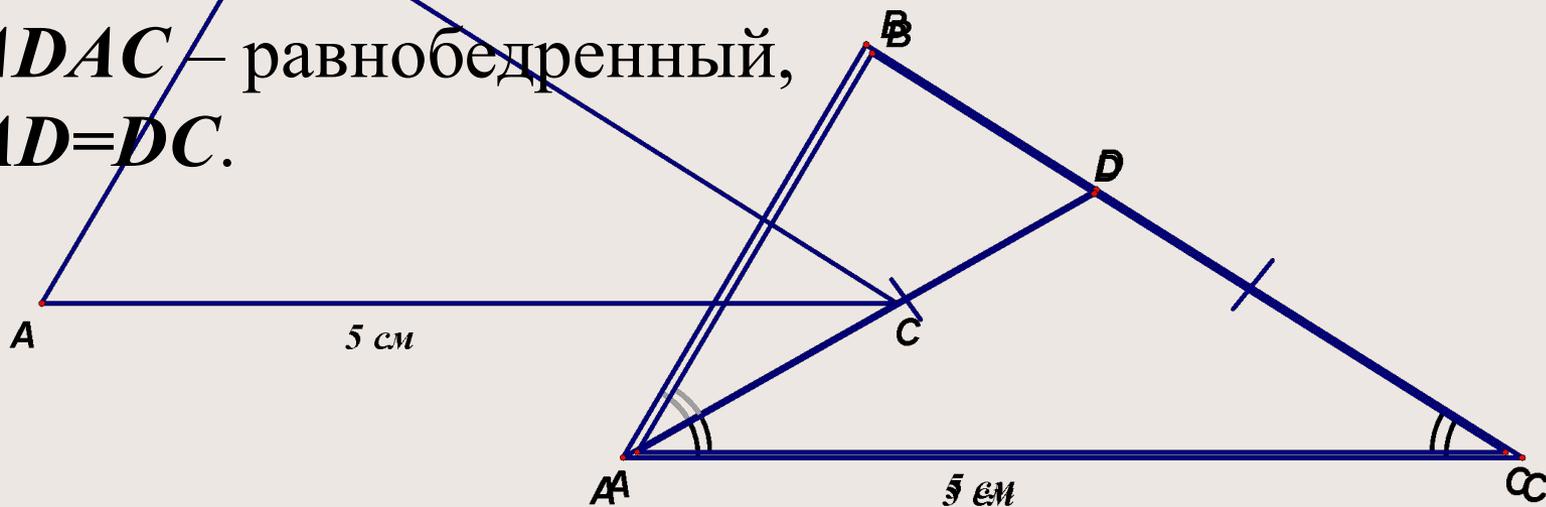
Задача 10

В треугольнике ABC известно, что угол A в два раза больше угла C , сторона BC на 2 см больше стороны AB , а $AC=5$ см. Найти AB и BC .

Проведем биссектрису AD угла A .

Тогда $\angle BAD = \angle DAC = \angle ACB$.

$\triangle DAC$ – равнобедренный,
 $AD=DC$.



В треугольнике ABC известно, что угол A в два раза больше угла C , сторона BC на 2 см больше стороны AB , а $AC=5$ см. Найти AB и BC .

Т.к. $\angle BAD = \angle BCA$, $\angle B$ — общий, то $\triangle ABD \sim \triangle ABC$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

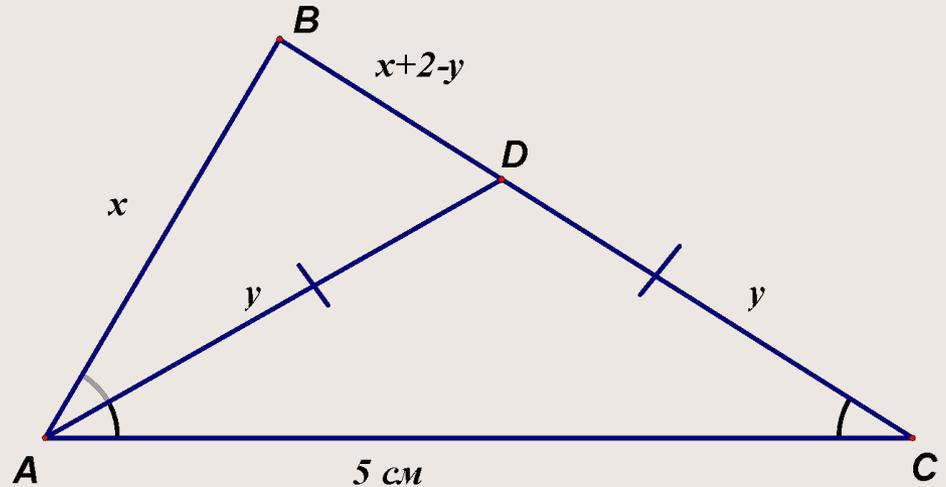
$$\frac{x}{x+2} = \frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{x+2} = \frac{y}{5}, \\ \frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x = xy + 2y, \\ 5x + 10 - 5y = xy \end{array} \right.$$

$$5x = xy + 2y,$$

$$5x + 10 - 5y = xy$$



$$5y - 10 = 2y$$

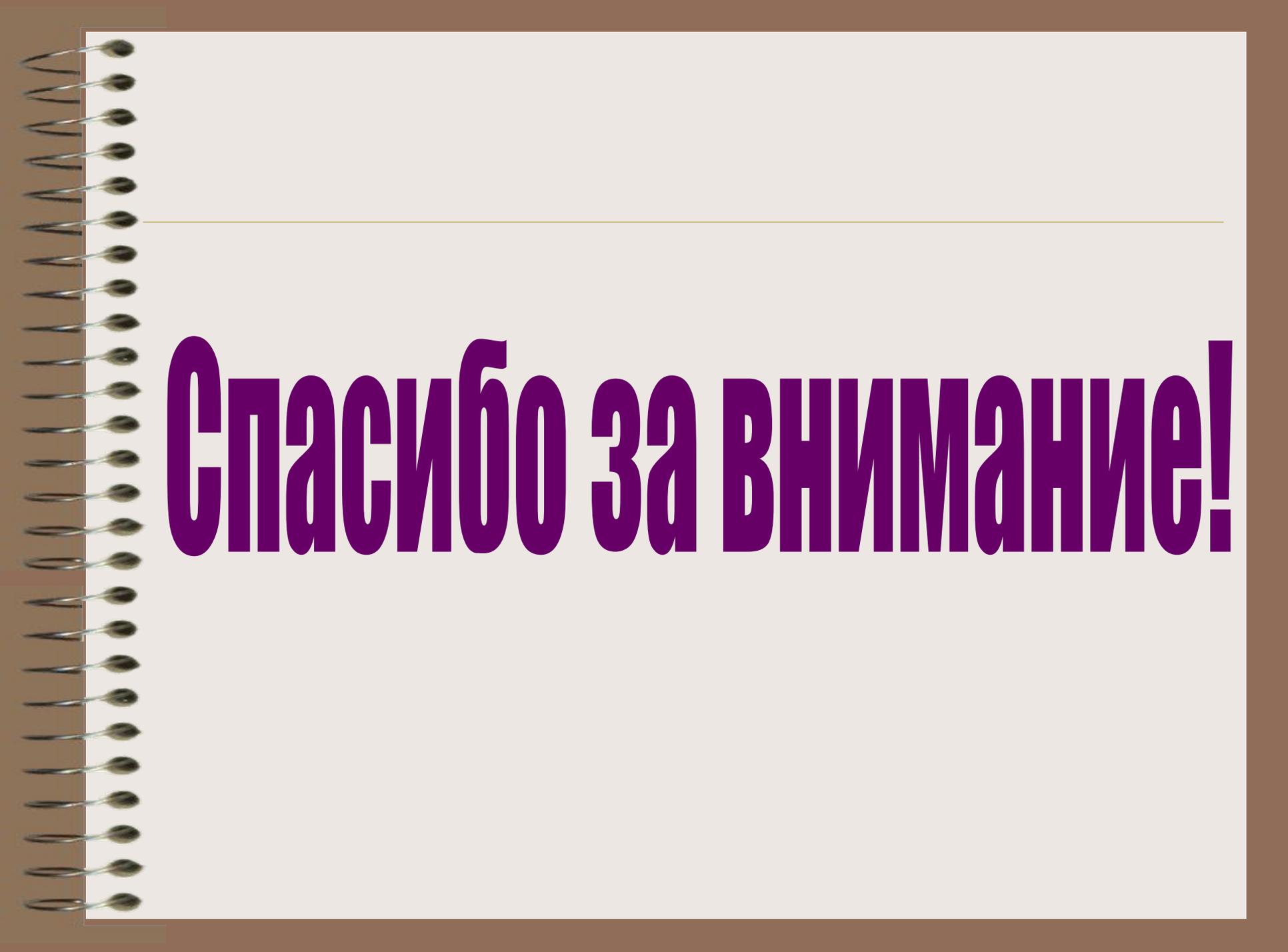
$$y = \frac{10}{3}$$

$$\frac{x}{x+2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x}{x+2} = \frac{2}{3}$$

$$x = 4$$

Ответ: $AB=4$ см,
 $BC=6$ см

A spiral-bound notebook with a brown cover and a white page. The spiral binding is on the left side. The text "Спасибо за внимание!" is written in a large, bold, purple font across the middle of the page.

Спасибо за внимание!