Секрет обучения заключается в уважении к ученику (Ральф Эмерсон).

Линейная алгебра

Лекция 9

Агаев Рафиг Пашаевич

(доктор физико-математических наук)

Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования (матрицы линейного преобразования)

•

Собственные значения и собственные векторы

Определение 1. Рассмотрим квадратную матрицу A. Если для некоторых ненулевого вектора x и числа λ имеет место

$$Ax = \lambda x, \qquad (x \neq \mathbf{0}) \qquad (1)$$

то λ называется собственным значением, а x − собственным вектором матрицы A, соответствующим (отвечающим) λ.

Заметим, что в уравнении (1) произведение матрицы   на вектор x равен произведению числа λ на этот же вектор x. Т.е. для некоторых векторов есть числа, которые «заменяют» целую матрицу. **Хотя бы по этой причине собственные значения и собственные векторы заслуживают внимания!**

Пример 1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

$$|\lambda I - A| = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

$$\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 1.$$

Собственному значению $\lambda_1 = 3$ отвечает собственный вектор $[c, \ c]^T$, а $\lambda_2 = 1$ соответствует $[c, \ 0]^T$.

Собственные значения и собственные векторы матрицы

- **Определение 2.** Совокупность всех собственных значений матрицы A называют ее спектром и часто обозначают через $\sigma(A)$.

Определение 3. Неотрицательное вещественное число

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

называется спектральным радиусом матрицы A.

Заметка. $\rho(A)$ может быть собственным значением, и может не быть. Можем придумать примеры…

Пример 2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$.

$|\lambda I - A| = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0.$ $\lambda_1 = 3i,$ $\lambda_2 = -3i.$

Для этой матрицы $\rho(A) = 3,$ но, 3 не является собственным значением.

Собственные значения и собственные векторы матрицы

- Из формулы (1) $Ax = \lambda x$, при $x \neq \mathbf{0}$, получим

$$Ax = \lambda x \implies (\lambda I - A)x = \mathbf{0}.$$

По условию $x \neq \mathbf{0}$. Тогда уравнение $(\lambda I - A)x = \mathbf{0}$ будет иметь ненулевой корень (он же вектор x) только в том случае, когда определитель матрицы $\lambda I - A$ равен нулю. т.е.

$$|\lambda I - A| = 0.$$

С другой стороны определитель $|\lambda I - A|$ есть многочлен

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + \cdots \pm c_n \qquad (2)$$

n-го порядка. Для того, чтобы доказать это достаточно по индукцию разложить определитель $|\lambda I - A|$ по методу Лапласа.

Определение 3. Многочлен $p_A(\lambda) = |\lambda I - A|$ называют **характеристическим многочленом** матрицы A. (Саму матрицу $\lambda I - A$ часто называют характеристической матрицей для A).

Из того, что степень характеристического многочлена равна n, немедленно получаем.

Утверждение 1. Характеристический многочлен $p_A(\lambda) = |\lambda I - A|$ имеет n корней и множество этих корней совпадает с множеством (с учетом их кратности) собственных значений матрицы, т.е. с спектром $\sigma(A)$ матрицы A.

Собственные значения и собственные векторы матрицы

- **Полезно знать!** Уравнение $|\lambda I - A|$ имеет те же корни, что уравнение $|A - \lambda I|$. Иногда характеристический многочлен так же определяют, т.е. как $|A - \lambda I|$. Но, первое определение, т.е. $|\lambda I - A|$ гарантирует, что старший коэффициент при λ^n всегда равен +1.

Запомните следующую очень полезную теорему!

Теорема 1. Пусть

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} - \cdots \pm c_n$$

– характеристический многочлен матрицы A, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - ее собственные значения. Тогда c_i - сумма всех главных миноров порядка i. В частности ,

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = c_1, \qquad \det A = |A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = c_0. \qquad (1)$$

($\operatorname{tr}(A)$ – след матрицы равен сумме диагональных элементов).

Заметили? Если хотя бы одно из с.з. равно нулю, то определитель равен нулю. И наоборот!

Собственные значения и собственные векторы матрицы

- Пусть λ собственное значение, а x — соответствующий ему собственный вектор матрицы A. Тогда

$$Ax = \lambda x \Rightarrow A^2x = AAx = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda\lambda x \Rightarrow A^2x = \lambda^2 x. \qquad (3)$$

Из (3) следует:

Утверждение 3. Если λ собственное значение, а x — соответствующий λ собственный вектор матрицы A, тогда для любого натурального числа k имеет место

$$A^k x = \lambda^k x. \qquad (4)$$

А теперь рассмотрим произвольный многочлен

$$q(\mu) = a_k\mu^k + a_{k-1}\mu^{k-1} + \cdots + a_0.$$

Пусть λ собственное значение, а x — соответствующий λ собственный вектор матрицы A: $Ax = \lambda x$.

Рассмотрим выражение

$$q(A)x = a_kA^kx + a_{k-1}A^{k-1}x + \cdots + a_0Ix. \qquad (5)$$

В силу (4) получим:

$$q(A)x = a_k\lambda^kx + a_{k-1}\lambda^{k-1}x + \cdots + a_0x = (a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_0)x.$$

Утверждение 4. Если $Ax = \lambda x$, $(x \neq 0)$, тогда $q(\lambda)$ – собственное значение матрицы $q(A)$, вектор x – соответствующий собственный вектор для $q(A)$.

Собственные значения и собственные векторы матрицы

Еще раз вспомним утверждение 1.

Любая квадратная матрица порядка n имеет ровно n собственных значений с учетом их кратности. Некоторые из них могут быть комплексными.

Утверждение 4. Матрица A вырожденна (не обратима) в том и только в том случае, когда ноль является собственным значением для A.

Действительно, для вырожденности матрицы необходимо и достаточно выполнение условия $Ax = 0$ для некоторого $x \neq \mathbf{0}$.

Это возможно тогда и только тогда, когда $Ax = 0 \cdot x = 0$ для некоторого $x \neq 0$, т.е. тогда и только тогда, когда ноль – собственное значение.

- **Все, что здесь мы скажем для симметричных матриц, верно и для эрмитовых тоже. Напомним, что матрица A эрмитова,**

если верно $A^* = A$, где $A^* = \overline{A}^T$.

Собственные значения и собственные векторы матрицы

- **Пример 3.** Вычислим собственные значения и соответствующие собственные векторы матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, $p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 3 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} =$

$= (\lambda - 2)^2 (\lambda - 1) - 2(\lambda - 2) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = \lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6).$

$p_A(\lambda)=\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6)=0 \Longrightarrow \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0.$

Таким образом матрицы A имеет след. собственные значения:

$\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 2;\ \lambda_3 = 3.$

Заметим, что у нашей матрицы сумма строчных элементов равно 0. Поэтому $(1\ 1\ 1)^T$ – собственный вектор для собст. значения $\lambda_1 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения и собственные векторы матрицы

- А теперь вычислим собственный вектор (с.в.) для $\lambda_2 = 2$.

По определению должно быть $Ax = \lambda_2 x$ или для нашего случая

$$Ax = 2x \implies (2I - A)x = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} -x_2 + 3x_3 &= 0, \\ x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Решив систему получим: $x_1 = c$; $x_2 = x_3 = 0$, где c – ненулевое число. Итак, $x = (c \;\; 0 \;\; 0)^T$.

Находим с.в. для $\lambda_3 = 3$.

$$Ax = 2x \implies (2I - A)x = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 2x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Положив $x_3 = 3$, определяем другие компоненты: $x_2 = -1$; $x_1 = 7$.

Таким образом, у матрицы A – три линейно независимые с.в.:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Пример с комплексными с.з.

- Пример 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. $p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} =$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 2) + (\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0.$

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2 + \sqrt{-1} = 2 + i, \qquad \lambda_3 = 2 - \sqrt{-1} = 2 - i.$$

Находим собст. вектор, отвечающий $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2 & 1 \\ 0 & -1 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Находим собст. вектор, отвечающий $\lambda_2 = 2 + i$:

$$\begin{pmatrix} 2+i-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i-2 & 1 \\ 0 & -1 & 2+i-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$x_1 = 0, \quad ix_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 1, \quad x_2 = i.$

Итак, $\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом находим собст. вектор, отвечающий $\lambda_3 = 2 - i$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения и собственные векторы матрицы

- При решении предыдущей задачи я сказал, что у нашей матрицы три линейно независимые собственные вектора. При этом не проверял их на линейную независимость. Об этом чуть позже!

Думаю, следующее утверждение не нуждается в доказательстве!

Утверждение 5. Если x – собств. вектор, отвечающий λ матрицы A, тогда kx – также собств. вектор, отвечающий λ матрицы A, т. е.

$$A(kx) = \lambda(kx).$$

Утверждение 6. Собственные векторы x, y, соответствующие различным собственным значениям λ и μ линейно независимы.

Действительно, если x и y – линейно зависимы, $y = kx$, тогда согласно утверждению 5 должно быть

$$Ax = \lambda x,\; Ay = \mu y \;\Longrightarrow Ax = \lambda x,\; A(kx) = \mu(kx) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Ax = \lambda x, \qquad Ax = \mu x \;\Longrightarrow \lambda x = \mu x.$$

Но, по предположению $\lambda \neq \mu$. Значит, векторы x и y, не могут быть пропорциональными, т.е. линейно независимыми.

Более общая теорема доказана в теореме 2.

Инвариантные подпространства

Определение 5. Пусть A – линейное преобразование пространства R^n. Линейное подпространство $S \subset R^n$ называется инвариантным относительно , если имеет место: если из $x \in S$ следует $Ax \in S$.

Утверждение 1. Образ и ядро линейного преобразования являются инвариантными подпространствами.

Утверждение 2. Если λ – собст. значение матрицы (лин. преобр) A, $x_1, \ldots, x_k$ - лин. независимые собств. векторы, то подпространство $\mathrm{Span}\{x_1, \ldots, x_k\}$ инвариантно относительно матрицы (лин. преоб). A.

Диагональная матрица лин. преобразования

Теорема. 1. Если лин. преобразование F имеет n линейно независимых собственных векторов $e_1, \dots, e_n$, отвечающим собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (кратность этих чисел не исключена). Тогда выбрав $e_1, \dots, e_n$ за базис, матрицу преобразования можно привести к диагональной форме. Обратно, если матрица лин. преобразования в некотором базисе диагональная, то все векторы этого базиса являются собственными векторами.

Доказательство. Пусть F - такое лин. преобразование, что имеет n линейно независимых собственных векторов $e_1, \dots, e_n$, отвечающим собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (кратность этих чисел не исключена). Примем $e_1, \dots, e_n$ за базис для данного лин. преобразования F. Тогда из

$$Fe_1 = \lambda_1 e_1, \dots, Fe_n = \lambda_n e_n.$$

непосредственно следует, что лин. преобразование F в базисе $e_1, \dots, e_n$ имеет матрицу преобразования

$$A' = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

(На самом деле, если A – матрица данного лин преоб. F в первом базисе, тогда должно бы быть $AE = ED$, где $E = [e_1, \dots, e_n]$, $AE = ED \Longrightarrow E^{-1}AE = D$. Таким образом, матрицы A и D– матрицы одного и того же линейного преобразования F в различных базисах).

продолжение теоремы 2

- Обратное утверждение доказывается легко. Если при некотором базисе лин. преобразование имеет матрицу

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \cdots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

то все эти базисные векторы – собственные.

Заметим, матрицы A и D подобны.

Теорема Гамилтона-Кели. Каждая матрица A удовлетворяет своему характеристическому многочлену, т.е. $P_A(A) = 0$.

Теорема 4. Характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от базиса. Поэтому, Матрицы одного и того же лин. преобразования имеют одинаковые характеристические многочлены (иначе говоря их спектры совпадают с учетом кратности).

Доказательство. Если A и B две матрицы одного и того же лин. преобразования, тогда $B = C^{-1}AC$ и $|\lambda I - B| = |\lambda C^{-1}C - C^{-1}AC| =$ $|\lambda C^{-1}C - C^{-1}AC| = |C^{-1}(\lambda I - A)C| = |C^{-1}|\,|\,\lambda I - A\,||C|=|\,\lambda I - A\,|$.

Теорема о лин. независимости векторов

- Теорема 2. Если лин. преобразование A в n-мерном пространстве имеет собственные векторы $e_1, \dots, e_k$, отвечающие попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, то векторы $e_1, \dots, e_k$ - линейно независимы.

Для k=1 - все очевидно. Пусть это выполнено для k-1 тоже. Докажем теорему для k.

Предположим противное. Пусть

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k = 0. \tag{1}$$

и не уменьшая общности, предположим, что $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$A\alpha_1 e_1 + \dots + A\alpha_k e_k = 0 \Longrightarrow \alpha_1 \lambda_1 e_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k e_k = 0 \tag{2}$$

Вычитая из (2) равенство (1), умноженное на λ_k получим

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)e_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)e_2 + \dots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)e_{k-1} = 0, \tag{3}$$

где первый коэффициент отличен от нуля. Таким образом, из представления (3) и $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) \neq 0$ следует, что векторы $e_1, \dots, e_k$ - линейно независимы.

Следствие из теоремы 2. Если матрица имеет n различных собственных значений, то ее можно привести к диагональной форме.

Когда же у матрицы A нет n линейно независимых собственных векторов?

- Рассмотрим эту задачу на примере.

Пример 5. Пусть преобразование A в пространстве многочленов $P(t)$ степени не выше 2 ставит каждому многочлену его производную $P'(t)$. Тогда матрица преобразования в базисе $1,\ t,\ \frac{1}{2}t^2$ будет иметь вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Все собственные значения этой матрицы равны нулю, и этому собственному значению, соответствует с точностью до множителя один собственный вектор.

Действительно, $A[x_1, x_2,\ x_3]^T = 0$ следует, $x_2 = 0,\ \ x_3 = 0,\ x_1 = c.$

Но, если даже не имели матричного представления этого преобразования, то из $P'(t) = \lambda P(t)$ следует, что

$\lambda = 0$ и $P(t) = \text{const}.$

Собственные значения и собственные векторы матрицы

- Если x – собств. вектор, отвечающий λ матрицы A, тогда $\frac{x}{|x|}$ также будет собств. вектором, отвечающий λ матрицы A. Назовем его **нормированным собственным вектором**.

Утверждение 7. Любая симметричная (в общем случае - эрмитовая) матрицы имеет только действительные собственные значения.

Доказательство. Пусть матрица симметричная, т.е. $A = A^T$. Рассмотрим

$$Ax = \lambda x \implies x^*Ax = \lambda x^*x. \qquad (1)$$

Пусть x – нормированный собственный вектор, т.е. x^*x=1.

Напомним, что x^* получается из x транспонированием и заменой координат на сопряженное число.

Из (1) получим:

$$x^*Ax = \lambda \implies (x^*Ax)^* = (\lambda)^* = \bar{\lambda} \implies x^*Ax = \bar{\lambda} \implies \lambda = \bar{\lambda}.$$

Но, $\lambda = \bar{\lambda}$ возможно только тогда, когда λ – вещественное число.

Собственные значения и собственные векторы матрицы

Некоторые важные утверждения!

- Пусть матрица A – невырожденна и для $x \neq \mathbf{0}$ и $\lambda \neq 0$ имеет место $Ax = \lambda x$. Умножив обе стороны на A^{-1} получим

$$\frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x,$$

т.е. если λ собст. значение, а x – соответствующий ему собст. вектор матрицы A, тогда $\frac{1}{\lambda}$ будет собст. значением, а x – соответствующий ему собст. вектор для матрицы A^{-1}.

- Спектры матриц A и A^T совпадают.

Но, собственные векторы, отвечающие одному собственному значению могут сильно различаться. Например, для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

число 2 является собственным значением. Но для A собственное подпространство для 2 натянуто на вектор $(1,\ 0)^T$, а для матрицы A^T собственное подпространство для 2 натянуто на $\left(1,\ -\frac{3}{2}\right)^T$.

- Если $\lambda = \alpha + i\beta$ – собственное значение действительной матрицы A, тогда $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ тоже является ее собственным значением для A.

Теорема Гершгорина о локализации собственных значений

- **Теорема Гершгорина.** Пусть A - квадратная матрица и пусть $R_i(A) = \sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}|$ — - сумма модулей элементов i-й строки кроме диагонального элемента a_{ii}. Тогда все с.з. матрицы A заключены в объединение n кругов:

$$A \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in C : |z - a_{ii}| \leq R_i(A)\}.$$

Кроме того, если объединение k из этих кругов есть связная область, не пересекающаяся с остальными n-k кругами, то в ней находится ровно k собственных значений матрицы A.

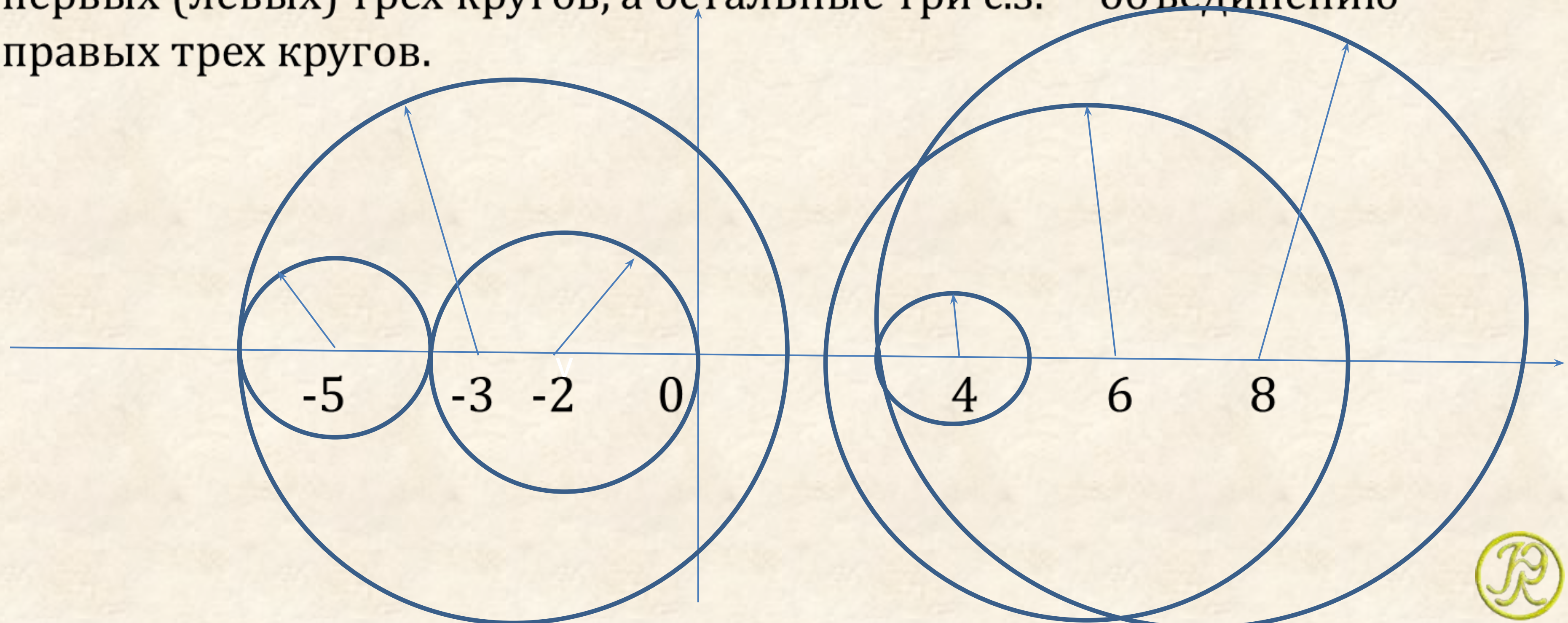
Теорема приведена без доказательства.

Теорема Гершгорина о локализации собственных значений

- Пример Теоремы Гершгорина. Рассмотрим матрицу A:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}. \ \sigma(A) = \begin{pmatrix} -5.4386 \\ -2.2951 + 0.9130i \\ -2.2951 - 0.9130i \\ 7.5021 + 1.7544i \\ 7.5021 - 1.7544i \\ 3.0246 \end{pmatrix}$$

Три собст. значений данной матрицы принадлежат объединению первых (левых) трех кругов, а остальные три с.з. – объединению правых трех кругов.



Жорданова форма квадратной матрицы и пользы от нее!

- **Теорема 2.** Для любой квадратной матрицы A существует невырожденная матрица S такая, что матрица $J = SAS^{-1}$ имеет следующий канонический вид (все другие элементы равны нулю):

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_k & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_k \end{matrix}} \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Жорданова форма квадратной матрицы и пользы от нее!

- Но, о спектре и собственных значениях расскажем исходя из жордановой формы!
- Если кратность собственного значения λ_1 равна k_{λ_1}, то у этого с.з. количество линейно независимых собст. векторов m_{λ_1} не больше k_{λ_1}. Количество линейно независимых собст. векторов для λ_1 равно число жордановых клеток этого собств. значения в жордановой форме матрицы A.
- **k_{λ_1} называют алгебраической кратностью,**
- **m_{λ_1} - геометрической кратностью λ_1. Всегда верно $m_{\lambda_1} \leq k_{\lambda_1}$**

Например, у матрицы (она же есть жорданова форма с одним блоком)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2 – с.з. кратности 3, т.е. $k_2 = 3$, а $m_2 = 1$.

3 – с.з. кратности 2, т.е. $k_3 = 2$, а $m_3 = 2$.

Вы заметили!? У матрицы все с.з. могут быть нулевыми, а при этом ранг матрицы может быть равным $n - 1$.

Собственные значения и собственные векторы матрицы

- Рассмотрим другой тривиальный случай:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

У матрицы A единица с.з. кратности 3. Но, здесь, у каждой единицы своя жорданова клетка размерности 1. Т.е. единица имеет 3 жордановые клетки и поэтому ей соответствует три лин. независимые собственные векторы и алгебраическая кратность k_1 единичного с.з. совпадает с ее геометрической кратностью: $k_1 = m_1$.

Определение 5. Если каноническая форма матрицы A из теоремы 2 является диагональной матрицей, тогда говорят матрица A диагонализуема.

Утверждение 8. Матрица порядка n диагонализуема тогда и только тогда, когда число линейно независимых собственных векторов матрицы A равен n.

Утверждение 9. Каждая симметричная матрица диагонализуема. Если все собственные значения симметричной матрицы положительна, тогда она положительно определена.

Это еще не все!

Собственные значения некоторых матриц специального вида.

- Матрица идемпотентная, если $A^2 = A$. Спектр состоит из нулей и единиц.
- Матрица нильпотентная, если $A^k = 0_{n\times n}$ для некоторого k. Спектр состоит из нулей.
- Матрица диагональная. Спектр совпадает с диагональными элементами.
- Матрица симметричная. Спектр – действителен.
- Если у матрицы модуль каждого диагонального элемента a_{ii} больше суммы модулей элементов i-й строки кроме диагонального, то матрица обратима. Если при этом диагональные элементы положительны, то все собственные значения имеют положительную действительную часть.
- Если у матрицы сумма строчных элементов равна нулю, то матрица вырожденная и 0 является собственным значением. А соответствующий ему собственный вектор равен $(1, 1, \ldots, 1)^T$.
- Если у матрицы сумма строчных элементов равна единице, то 1 является собственным значением. А соответствующий ему собственный вектор равен $(1, 1, \ldots, 1)^T$.

Домашняя работа

- Из книги Aleskerov-Piontkovski

Глава 9, раздел 5.

Задачи № 1; 2; 3(b); 4; 5; 7; 9; 10(a); 11; 12;

Из Демидовича

4.138

4.146. Доказать, что

а) если λ — собственное число, то $\bar{\lambda}$ — также собственное число;

б) если X — столбец координат собственного вектора, соответствующего собственному числу λ, то $\bar{X}$ — столбец координат собственного вектора, соответствующего собственному числу $\bar{\lambda}$.

(напомню, что $\bar{\lambda} = a - ib$ (сопряженное число к $\lambda = a + ib$)

4.147*. В комплексном пространстве $\mathscr{L}_3$ найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного вещественной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$