Линейные рекуррентные соотношения и методы их решения

Ирина Борисовна Просвирнина

- Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами
- Характеристическое уравнение линейного однородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами
- Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами степени 2 и степени 3
- Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами и методы их решений
- Производящие функции, решение рекуррентных соотношений с помощью производящих функций

Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Определение 1

Линейным однородным рекуррентным соотношением степени k с постоянными коэффициентами называется рекуррентное соотношение вида

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_k$ – вещественные числа и $c_k \neq 0$.

Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

- $$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

Последовательность, удовлетворяющая данному рекуррентному соотношению, однозначно определяется самим рекуррентным соотношением и k начальными условиями:

$$\boldsymbol{a_0 = C_0, a_1 = C_1, \dots, a_{k-1} = C_{k-1}}.$$

Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

- Пример 1

Рекуррентное соотношение

$$P_n = (1.11)P_{n-1}$$

– линейное однородное рекуррентное соотношение первой степени.

Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Пример 2

Рекуррентное соотношение

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

– линейное однородное рекуррентное соотношение второй степени.

Это рекуррентное соотношение с начальными условиями $f_0 = 0, f_1 = 1$ задает последовательность Фибоначчи.

Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

<u>Пример 3</u>

Рекуррентное соотношение

$$a_n = a_{n-5}$$

– линейное однородное рекуррентное соотношение пятой степени.

Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

<u>Пример 4</u>

Рекуррентное соотношение

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$$

– не линейное.

Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

<u>Пример 5</u>

Рекуррентное соотношение

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$

– не однородное.

Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Пример 6

Коэффициенты рекуррентного соотношения

$$B_n = nB_{n-1}$$

не являются постоянными.

Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами

- Будем искать решение линейного однородного рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

в виде

$$\boldsymbol{a_n = r^n}, \text{ где } r \text{ – константа.}$$

Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами

- Последовательность $a_n = r^n$ является решением линейного однородного рекуррентного соотношения
$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$
тогда и только тогда, когда
$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}.$$

Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами

- $$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}$$

Разделим левую и правую части соотношения на r^{n-k}:

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_{k-1} r + c_k;$$

перенесем выражение из правой части соотношения в левую с противоположным знаком:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0.$$

Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами

- Таким образом, последовательность $\{a_n\}$ с $a_n = r^n$ является решением линейного однородного рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \quad (*)$$

тогда и только тогда, когда r является решением уравнения

$$\boldsymbol{r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0}.$$

Это уравнение называется **характеристическим уравнением** рекуррентного соотношения $(*)$.

Решения характеристического уравнения называются **характеристическими корнями** рекуррентного соотношения $(*)$.

Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами **степени 2**

Теорема 1

Пусть c_1 и c_2 – вещественные числа. Предположим, что уравнение

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

имеет два различных корня r_1 и r_2.

Последовательность $\{a_n\}$ является решением рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n}$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$, где α_1 и α_2 – константы.

Доказательство теоремы 1

? Если r_1 и r_2 – корни характеристического уравнения $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ и α_1 и α_2 – константы, то последовательность $\{a_n\}$ с $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ является решением рекуррентного соотношения $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$.

$$r_1^2 = c_1 r_1 + c_2, \quad r_2^2 = c_1 r_2 + c_2$$

$$\Downarrow$$

$$c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} =$$
$$c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) =$$
$$\alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) =$$
$$\alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 =$$
$$\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n =$$
$$a_n \ \blacksquare$$

Доказательство теоремы 1

- ? Любое решение $\{a_n\}$ рекуррентного соотношения $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ имеет вид: $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ для $n = 0, 1, 2, \dots$, где α_1 и α_2 – константы, а r_1 и r_2 – различные корни уравнения $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$.

Пусть $\{a_n\}$ – решение рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

с начальными данными $a_0 = C_0, a_1 = C_1$.

Доказательство теоремы 1

?• Любое решение $\{a_n\}$ рекуррентного соотношения $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ имеет вид: $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ для $n = 0, 1, 2, \dots$, где α_1 и α_2 – константы, а r_1 и r_2 – различные корни уравнения $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$.

Покажем, что существуют константы α_1 и α_2, такие, что последовательность $\{a_n\}$ с $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ удовлетворяет тем же начальным данным $a_0 = C_0, a_1 = C_1$.

Доказательство теоремы 1

? Любое решение $\{a_n\}$ рекуррентного соотношения $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ имеет вид: $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$, где α_1 и α_2 – константы, а r_1 и r_2 – различные корни уравнения $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$.

Если последовательность $\{a_n\}$ с $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ удовлетворяет начальным данным $a_0 = C_0, a_1 = C_1$, то

$$a_0 = C_0 = \alpha_1 + \alpha_2,$$
$$a_1 = C_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2,$$

Решим эту систему относительно α_1 и α_2:

$$\alpha_1 = \frac{C_1 - C_0 r_2}{r_1 - r_2}, \alpha_2 = \frac{C_0 r_1 - C_1}{r_1 - r_2}.$$

Доказательство теоремы 1

? Любое решение $\{a_n\}$ рекуррентного соотношения $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ имеет вид: $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$, где α_1 и α_2 – константы, а r_1 и r_2 – различные корни уравнения $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$.

Итак, последовательность $\{a_n\}$ с $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, для которой

$$\alpha_1 = \frac{C_1 - C_0 r_2}{r_1 - r_2}, \alpha_2 = \frac{C_0 r_1 - C_1}{r_1 - r_2},$$

удовлетворяет начальным условиям

$a_0 = C_0, a_1 = C_1$.

Доказательство теоремы 1

- Любое решение $\{a_n\}$ рекуррентного соотношения $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ имеет вид: $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ для $n = 0, 1, 2, \dots$, где α_1 и α_2 – константы, а r_1 и r_2 – различные корни уравнения $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$.

Нам известно, что обе последовательности $\{a_n\}$ и $\{\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n\}$ являются решениями рекуррентного соотношения $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ и обе удовлетворяют начальным условиям

$$a_0 = C_0, a_1 = C_1.$$

Решение линейного однородного рекуррентного соотношения степени 2, удовлетворяющего двум данным начальным условиям, единственно.

Следовательно, $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ для $n = 0, 1, 2, \dots$, где α_1 и α_2 – константы, а r_1 и r_2 – различные корни уравнения $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$. ■

Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами **степени 2**

- Пример 7

Найти решение рекуррентного соотношения

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

с начальными условиями $a_0 = 2$ и $a_1 = 7$.

Решение

Характеристическое уравнение рекуррентного соотношения: $r^2 - r - 2 = 0$.

Характеристические корни рекуррентного соотношения: $r = 2$ и $r = -1$.

По теореме 1 имеем: $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$.

Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами **степени 2**

Пример 7

Найти решение рекуррентного соотношения

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

с начальными условиями $a_0 = 2$ и $a_1 = 7$.

Решение

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$$

$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2,$

$a_1 = 7 = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-1), \Rightarrow$

$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -1, \Rightarrow$

$a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n.$

Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами **степени 2**

- Пример 8 (Последовательность Фибоначчи)

Найти решение рекуррентного соотношения

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

с начальными условиями $f_0 = 0$ и $f_1 = 1$.

Решение

Характеристическое уравнение рекуррентного соотношения: $r^2 - r - 1 = 0$.

Характеристические корни рекуррентного соотношения: $r = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$ и $r = \left(1 - \sqrt{5}\right)/2$.

По теореме 1

$f_n = \alpha_1 \left(\left(1 + \sqrt{5}\right)/2\right)^n + \alpha_2 \left(\left(1 - \sqrt{5}\right)/2\right)^n$.

Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами **степени 2**

Пример 8 (Последовательность Фибоначчи)

Найти решение рекуррентного соотношения

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

с начальными условиями $f_0 = 0$ и $f_1 = 1$.

Решение

$$f_n = \alpha_1\left((1+\sqrt{5})/2\right)^n + \alpha_2\left((1-\sqrt{5})/2\right)^n$$

$f_0 = \ 0 = \alpha_1 + \alpha_2,$

$f_1 = \ 1 = \alpha_1\left((1+\sqrt{5})/2\right) + \alpha_2\left((1-\sqrt{5})/2\right), \Rightarrow$

$\alpha_1 = 1/\sqrt{5}\,, \alpha_2 = -\,1/\sqrt{5}\,, \Rightarrow$

$f_n = 1/\sqrt{5}\left((1+\sqrt{5})/2\right)^n + (-\,1/\sqrt{5})\left((1-\sqrt{5})/2\right)^n.$

Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами **степени 2**

Теорема 2

Пусть c_1 и c_2 – вещественные числа и $c_2 \neq 0$. Предположим, что уравнение

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

имеет только один корень r_0.

Последовательность $\{a_n\}$ является решением рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n}$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$, где α_1 и α_2 – константы.

Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами **степени 2**

- Пример 9

Найти решение рекуррентного соотношения

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

с начальными условиями $a_0 = 1$ и $a_1 = 6$.

Решение

Характеристическое уравнение рекуррентного соотношения: $r^2 - 6r + 9 = 0$.

Характеристический корень рекуррентного соотношения: $r = 3$.

По теореме 2 имеем: $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$.

Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами **степени 2**

- Пример 9

Найти решение рекуррентного соотношения

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

с начальными условиями $a_0 = 1$ и $a_1 = 6$.

Решение

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$$

$a_0 = 1 = \alpha_1,$

$a_1 = 6 = \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3, \Rightarrow$

$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \Rightarrow$

$a_n = 3^n + n3^n.$

Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами **степени 3**

Теорема 3

Пусть $c_1, c_2, \dots, c_k$ – вещественные числа. Предположим, что уравнение

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0$$

имеет k различных корней $r_1, r_2, \dots, r_k$.

Последовательность $\{a_n\}$ является решением рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n}$$

для $n = 0, 1, 2, \dots$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – константы.

Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами **степени 3**

- Пример 10

Найти решение рекуррентного соотношения

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$

с начальными условиями $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$.

Решение

Характеристическое уравнение рекуррентного соотношения: $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$.

Характеристические корни рекуррентного соотношения: $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$.

По теореме 3 имеем: $a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$.

Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами **степени 3**

- Пример 10

Найти решение рекуррентного соотношения

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$

с начальными условиями $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15.$

Решение

$$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$$

$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$

$a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3,$

$a_2 = 15 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 9, \Rightarrow$

$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 2, \Rightarrow$

$a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n.$

Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Определение 2

Линейным неоднородным рекуррентным соотношением степени k с постоянными коэффициентами называется рекуррентное соотношение вида

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n),$$

где $c_1, c_2, \dots, c_k$ – вещественные числа, $c_k \neq 0; F(n)$ – не равная тождественно нулю функция.

Рекуррентное соотношение вида

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

называется **ассоциированным однородным рекуррентным соотношением**.

Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

<u>Пример 11</u>

$a_n = a_{n-1} + 2^n$ – линейное неоднородное рекуррентное соотношение;

$a_n = a_{n-1}$ – ассоциированное линейное однородное рекуррентное соотношение.

Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

- Пример 12

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$ – линейное неоднородное рекуррентное соотношение;

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ – ассоциированное линейное однородное рекуррентное соотношение.

Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

<u>Пример 13</u>

$a_n = 3a_{n-1} + n3^n$– линейное неоднородное рекуррентное соотношение;

$a_n = 3a_{n-1}$ – ассоциированное линейное однородное рекуррентное соотношение.

Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

- <u>Пример 14</u>

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + n!$ – линейное неоднородное рекуррентное соотношение;

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ – ассоциированное линейное однородное рекуррентное соотношение.

Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Теорема 4

Если $\left\{a_n^{(p)}\right\}$ – частное решение линейного неоднородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами

$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$,

то любое его решение имеет вид $\left\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\right\}$,

где $\left\{a_n^{(h)}\right\}$ – решение ассоциированного линейного однородного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}.$$

Доказательство теоремы 4

- Если $\left\{a_n^{(p)}\right\}$– частное решение линейного неоднородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n),$$

то

$$a_n^{(p)} = c_1 a_{n-1}^{(p)} + c_2 a_{n-2}^{(p)} + \cdots + c_k a_{n-k}^{(p)} + F(n).$$

Доказательство теоремы 4

- Если $\{b_n\}$ – другое решение линейного неоднородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n),$$

то

$$b_n = c_1 b_{n-1} + c_2 b_{n-2} + \cdots + c_k b_{n-k} + F(n).$$

Доказательство теоремы 4

Итак,

$$a_n^{(p)} = c_1 a_{n-1}^{(p)} + c_2 a_{n-2}^{(p)} + \cdots + c_k a_{n-k}^{(p)} + F(n),$$

$$b_n = c_1 b_{n-1} + c_2 b_{n-2} + \cdots + c_k b_{n-k} + F(n).$$

Вычтем из второго равенства первое равенство:

$$b_n - a_n^{(p)} =$$

$$c_1(b_{n-1} - a_{n-1}^{(p)}) + c_2(b_{n-2} - a_{n-2}^{(p)}) + \cdots + c_k(b_{n-k} - a_{n-k}^{(p)}).$$

Следовательно, $\left\{b_n - a_n^{(p)}\right\} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{a_n^{(h)}\right\}$ – решение ассоциированного линейного однородного соотношения.

Значит, $b_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$ ■

Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Пример 15

Решить рекуррентное соотношение

$$a_n = 3a_{n-1} + 2n.$$

Решение

Ассоциированное однородное рекуррентное соотношение:

$$a_n = 3a_{n-1}.$$

Его решение: $a_n^{(h)} = \alpha \cdot 3^n$.

Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

- Пример 15

Решить рекуррентное соотношение

$$a_n = 3a_{n-1} + \mathbf{2n}.$$

Решение

Найдем частное решение неоднородного рекуррентного соотношения.

Будем искать его в виде $p_n = \boldsymbol{cn + d}$, где c и d – некоторые константы.

$$cn + d = 3(c(n-1) + d) + 2n,$$
$$(2 + 2c)n + (2d - 3c) = 0.$$

Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Пример 15

Решить рекуррентное соотношение

$$a_n = 3a_{n-1} + \mathbf{2n}.$$

Решение

$$(2 + 2c)n + (2d - 3c) = 0,$$

$$\begin{cases} 2 + 2c = 0, \\ 2d - 3c = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$c = -1, d = -\frac{3}{2}, \Rightarrow$$

$$a_n^{(p)} = -n - 3/2, \Rightarrow$$

$$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = -n - 3/2 + \alpha \cdot 3^n.$$

Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Пример 16

Решить рекуррентное соотношение

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n.$$

Решение

Ассоциированное однородное рекуррентное соотношение

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}.$$

Его решение: $a_n^{(h)} = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot 2^n$.

Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

- Пример 16

Решить рекуррентное соотношение

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + \mathbf{7^n}.$$

Решение

Найдем частное решение неоднородного рекуррентного соотношения.

Будем искать его в виде $F(n) = \boldsymbol{C \cdot 7^n}$.

$$C \cdot 7^n = 5C \cdot 7^{n-1} - 6C \cdot 7^{n-2} + 7^n,$$

$$49C = 35C - 6C + 49,$$

$$C = 49/20.$$

Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Пример 16

Решить рекуррентное соотношение

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + \mathbf{7^n}.$$

Решение

$a_n^{(p)} = (49/20)7^n, \Rightarrow$

$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot 2^n + (49/20)7^n.$

Производящие функции

Определение 1

Производящей функцией последовательности

$$a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$$

вещественных чисел называется формальный ряд

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \ \dots + a_k x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Производящие функции

- $$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

Последовательность, удовлетворяющая данному рекуррентному соотношению, однозначно определяется самим рекуррентным соотношением и k начальными условиями:

$$\boldsymbol{a_0 = C_0, a_1 = C_1, \ldots, a_{k-1} = C_{k-1}}.$$

Производящие функции

Пример 1

Рекуррентное соотношение

$$P_n = (1.11)P_{n-1}$$

– линейное однородное рекуррентное соотношение первой степени.

Производящие функции

<u>Пример 2</u>

Рекуррентное соотношение

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

– линейное однородное рекуррентное соотношение второй степени.

Это рекуррентное соотношение с начальными условиями $f_0 = 0, f_1 = 1$ задает последовательность Фибоначчи.

Производящие функции

- <u>Пример 3</u>

Рекуррентное соотношение

$$a_n = a_{n-5}$$

– линейное однородное рекуррентное соотношение пятой степени.

Производящие функции

Пример 4

Рекуррентное соотношение

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$$

– не линейное.

Производящие функции

<u>Пример 5</u>

Рекуррентное соотношение

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$

– не однородное.

Производящие функции

<u>Пример 6</u>

Коэффициенты рекуррентного соотношения

$$B_n = nB_{n-1}$$

не являются постоянными.

Производящие функции

- Будем искать решение линейного однородного рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

в виде

$$\boldsymbol{a_n = r^n}, \text{ где } r \text{ – константа.}$$

Применение производящих функций для решения рекуррентных соотношений

- Последовательность $a_n = r^n$ является решением линейного однородного рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

тогда и только тогда, когда

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}.$$

$$a_k = 3a_{k-1}, a_0 = 2$$

- Таким образом, последовательность $\{a_n\}$ с $a_n = r^n$ является решением линейного однородного рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \quad (*)$$

тогда и только тогда, когда r является решением уравнения

$$\boldsymbol{r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0}.$$

Это уравнение называется **характеристическим уравнением** рекуррентного соотношения $(*)$.

Решения характеристического уравнения называются **характеристическими корнями** рекуррентного соотношения $(*)$.

$$a_k = 3a_{k-1}, a_0 = 2$$

Теорема 1

Пусть c_1 и c_2 – вещественные числа. Предположим, что уравнение

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

имеет два различных корня r_1 и r_2.

Последовательность $\{a_n\}$ является решением рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n}$ для $n = 0, 1, 2, \dots$, где α_1 и α_2 – константы.

$$a_k = 3a_{k-1}, a_0 = 2$$

Решение примера 8

$$G(x) - 3xG(x) = 2$$

$$\Downarrow$$

$$(1 - 3x)G(x) = 2$$

$$\Downarrow$$

$$G(x) = 2/(1 - 3x)$$

$$\Downarrow$$

$$G(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot 3^k x^k$$

$$a_k = 3a_{k-1}, a_0 = 2$$

- Решение примера 8

$$G(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot 3^k x^k$$

$$\Downarrow$$

$$a_k = 2 \cdot 3^k$$

Применение производящих функций для решения рекуррентных соотношений

- Пример 9

Решить рекуррентное соотношение

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, n = 2, 3, 4, \dots,$$

с начальным условием $a_1 = 9$.

(**Неискаженное кодовое слово** – это последовательность, состоящая из десятичных цифр и имеющая четное число нулей.

Докажите, что $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, n = 2, 3, 4, \dots,$ с начальным условием $a_1 = 9$, – это число неискаженных кодовых слов длины n.)

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, a_1 = 9$$

Решение примера 9

Чтобы упростить работу с производящими функциями, расширим исходную числовую последовательность, положив $a_0 = 1$ (имеется одна строка длины 0: это пустая строка).

Тогда

$$a_1 = 8a_{1-1} + 10^{1-1} = 8a_0 + 10^0 = 8 + 1 = 9,$$

что согласуется с условием задачи.

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, a_0 = 1$$

Пример 7

Найти решение рекуррентного соотношения

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

с начальными условиями $a_0 = 2$ и $a_1 = 7$.

Решение

Характеристическое уравнение рекуррентного соотношения: $r^2 - r - 2 = 0$.

Характеристические корни рекуррентного соотношения: $r = 2$ и $r = -1$.

По теореме 1, $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, a_0 = 1$$

Пример 7

Найти решение рекуррентного соотношения

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

с начальными условиями $a_0 = 2$ и $a_1 = 7$.

Решение

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$$

$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2,$

$a_1 = 7 = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-1), \Rightarrow$

$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -1, \Rightarrow$

$a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n.$

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, a_0 = 1$$

• Пример 8 (Последовательность Фибоначчи)

Найти решение рекуррентного соотношения

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

с начальными условиями $f_0 = 0$ и $f_1 = 1$.

Решение

Характеристическое уравнение рекуррентного соотношения: $r^2 - r - 1 = 0$.

Характеристические корни рекуррентного соотношения: $r = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$ и $r = \left(1 - \sqrt{5}\right)/2$.

По теореме 1

$f_n = \alpha_1\left(\left(1 + \sqrt{5}\right)/2\right)^n + \alpha_2\left(\left(1 - \sqrt{5}\right)/2\right)^n$.

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, a_0 = 1$$

Пример 8 (Последовательность Фибоначчи)

Найти решение рекуррентного соотношения

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

с начальными условиями $f_0 = 0$ и $f_1 = 1$.

Решение

$$f_n = \alpha_1\left(\left(1+\sqrt{5}\right)/2\right)^n + \alpha_2\left(\left(1-\sqrt{5}\right)/2\right)^n$$

$f_0 = \ 0 = \alpha_1 + \alpha_2,$

$f_1 = \ 1 = \alpha_1\left(\left(1+\sqrt{5}\right)/2\right) + \alpha_2\left(\left(1-\sqrt{5}\right)/2\right), \Rightarrow$

$\alpha_1 = 1/\sqrt{5}\,, \alpha_2 = -\,1/\sqrt{5}\,, \Rightarrow$

$f_n = 1/\sqrt{5}\left(\left(1+\sqrt{5}\right)/2\right)^n + \left(-\,1/\sqrt{5}\right)\left(\left(1-\sqrt{5}\right)/2\right)^n.$

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, a_0 = 1$$

Решение примера 9

$$G(x) - 1 = 8xG(x) + x/(1 - 10x)$$

$$\Downarrow$$

$$G(x) = \frac{1 - 9x}{(1 - 8x)(1 - 10x)}$$

Разложим выражение, стоящее в правой части равенства, в сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1 - 9x}{(1 - 8x)(1 - 10x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - 8x} + \frac{1}{1 - 10x}\right)$$

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, a_0 = 1$$

Пример 9

Найти решение рекуррентного соотношения

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

с начальными условиями $a_0 = 1$ и $a_1 = 6$.

Решение

Характеристическое уравнение рекуррентного соотношения: $r^2 - 6r + 9 = 0$.

Характеристический корень рекуррентного соотношения: $r = 3$.

По теореме 2, $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$.

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, a_0 = 1$$

Пример 9

Найти решение рекуррентного соотношения

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

с начальными условиями $a_0 = 1$ и $a_1 = 6$.

Решение

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$$

$a_0 = 1 = \alpha_1,$

$a_1 = 6 = \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3, \Rightarrow$

$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \Rightarrow$

$a_n = 3^n + n3^n.$