

# Линейные рекуррентные соотношения и методы их решения

Ирина Борисовна

Просвирина

- Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами
- Характеристическое уравнение линейного однородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами
- Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами степени 2 и степени 3
- Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами и методы их решений
- Производящие функции, решение рекуррентных соотношений с помощью производящих функций

# Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

## Определение 1

**Линейным однородным рекуррентным соотношением степени  $k$  с постоянными коэффициентами** называется рекуррентное соотношение вида

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k},$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_k$  – вещественные числа и  $c_k \neq 0$ .

# Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

- $$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

---

Последовательность, удовлетворяющая данному рекуррентному соотношению, однозначно определяется самим рекуррентным соотношением и  $k$  начальными условиями:

$$a_0 = C_0, a_1 = C_1, \dots, a_{k-1} = C_{k-1}.$$

# Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

## Пример 1

Рекуррентное соотношение

$$P_n = (1.11)P_{n-1}$$

– линейное однородное рекуррентное соотношение первой степени.

# Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

## Пример 2

Рекуррентное соотношение

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

– линейное однородное рекуррентное соотношение второй степени.

Это рекуррентное соотношение с начальными условиями  $f_0 = 0, f_1 = 1$  задает последовательность Фибоначчи.

# Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

## Пример 3

Рекуррентное соотношение

$$a_n = a_{n-5}$$

– линейное однородное рекуррентное соотношение пятой степени.

# Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

## Пример 4

Рекуррентное соотношение

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$$

– не линейное.

# Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

## Пример 5

Рекуррентное соотношение

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$

– не однородное.



# Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

## Пример 6

Коэффициенты рекуррентного соотношения

$$B_n = nB_{n-1}$$

не являются постоянными.

# Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами

Будем искать решение линейного однородного рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

в виде

$$a_n = r^n, \text{ где } r \text{ — константа.}$$

# Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами

Последовательность  $a_n = r^n$  является решением линейного однородного рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

тогда и только тогда, когда

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \dots + c_k r^{n-k}.$$

# Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами

- $$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \dots + c_k r^{n-k}$$

---

Разделим левую и правую части соотношения на  $r^{n-k}$ :

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \dots + c_{k-1} r + c_k;$$

перенесем выражение из правой части соотношения в левую с противоположным знаком:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_{k-1} r - c_k = 0.$$

## Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами

Таким образом, последовательность  $\{a_n\}$  с  $a_n = r^n$  является решением линейного однородного рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} \quad (*)$$

тогда и только тогда, когда  $r$  является решением уравнения

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_{k-1} r - c_k = 0.$$

Это уравнение называется **характеристическим уравнением** рекуррентного соотношения (\*).

Решения характеристического уравнения называются **характеристическими корнями** рекуррентного соотношения (\*).

# Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами

## степени 2

### Теорема 1

Пусть  $c_1$  и  $c_2$  – вещественные числа. Предположим, что уравнение

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

имеет два различных корня  $r_1$  и  $r_2$ .

Последовательность  $\{a_n\}$  является решением рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

тогда и только тогда, когда  $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$  для  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – константы.

# Доказательство теоремы 1

? Если  $r_1$  и  $r_2$  – корни характеристического уравнения  $r^2 - c_1r - c_2 = 0$  и  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – константы, то последовательность  $\{a_n\}$  с  $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$  является решением рекуррентного соотношения  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ .

---

$$r_1^2 = c_1 r_1 + c_2, \quad r_2^2 = c_1 r_2 + c_2$$

↓

$$\begin{aligned} c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= \\ c_1 (\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2 (\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) &= \\ \alpha_1 r_1^{n-2} (c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2} (c_1 r_2 + c_2) &= \\ \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 &= \\ \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n &= \\ a_n &\blacksquare \end{aligned}$$

## Доказательство теоремы 1

3 Любое решение  $\{a_n\}$  рекуррентного соотношения  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$  имеет вид:  $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$  для  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – константы, а  $r_1$  и  $r_2$  – различные корни уравнения  $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ .

---

Пусть  $\{a_n\}$  – решение рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

с начальными данными  $a_0 = C_0, a_1 = C_1$ .



## Доказательство теоремы 1

• Любое решение  $\{a_n\}$  рекуррентного соотношения  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$  имеет вид:  $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$  для  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – константы, а  $r_1$  и  $r_2$  – различные корни уравнения  $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ .

---

Покажем, что существуют константы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , такие, что последовательность  $\{a_n\}$  с  $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$  удовлетворяет тем же начальным данным  $a_0 = C_0, a_1 = C_1$ .

## Доказательство теоремы 1

**?** Любое решение  $\{a_n\}$  рекуррентного соотношения  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$  имеет вид:  $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$  для  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – константы, а  $r_1$  и  $r_2$  – различные корни уравнения  $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ .

---

Если последовательность  $\{a_n\}$  с  $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$  удовлетворяет начальным данным  $a_0 = C_0, a_1 = C_1$ , то

$$\begin{aligned} a_0 &= C_0 = \alpha_1 + \alpha_2, \\ a_1 &= C_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2, \end{aligned}$$

Решим эту систему относительно  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :

$$\alpha_1 = \frac{C_1 - C_0 r_2}{r_1 - r_2}, \quad \alpha_2 = \frac{C_0 r_1 - C_1}{r_1 - r_2}.$$

## Доказательство теоремы 1

• Любое решение  $\{a_n\}$  рекуррентного соотношения  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$  имеет вид:  $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$  для  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – константы, а  $r_1$  и  $r_2$  – различные корни уравнения  $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ .

---

Итак, последовательность  $\{a_n\}$  с  $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ , для которой

$$\alpha_1 = \frac{C_1 - C_0 r_2}{r_1 - r_2}, \alpha_2 = \frac{C_0 r_1 - C_1}{r_1 - r_2},$$

удовлетворяет начальным условиям

$$a_0 = C_0, a_1 = C_1.$$

## Доказательство теоремы 1

Любое решение  $\{a_n\}$  рекуррентного соотношения  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$  имеет вид:  $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$  для  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – константы, а  $r_1$  и  $r_2$  – различные корни уравнения  $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ .

---

Нам известно, что обе последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n\}$  являются решениями рекуррентного соотношения  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$  и обе удовлетворяют начальным условиям

$$a_0 = C_0, a_1 = C_1.$$

Решение линейного однородного рекуррентного соотношения степени 2, удовлетворяющего двум данным начальным условиям, единственно.

Следовательно,  $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$  для  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – константы, а  $r_1$  и  $r_2$  – различные корни уравнения  $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ . ■

# Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами

## степени 2

### Пример 7

Найти решение рекуррентного соотношения

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

с начальными условиями  $a_0 = 2$  и  $a_1 = 7$ .

### Решение

Характеристическое уравнение рекуррентного соотношения:  $r^2 - r - 2 = 0$ .

Характеристические корни рекуррентного соотношения:  $r = 2$  и  $r = -1$ .

По теореме 1 имеем:  $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$ .

# Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами

## степени 2

### Пример 7

Найти решение рекуррентного соотношения

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

с начальными условиями  $a_0 = 2$  и  $a_1 = 7$ .

Решение

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$$

---

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$a_1 = 7 = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-1), \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -1, \Rightarrow$$

$$a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n.$$

# Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами

## степени 2

Пример 8 (Последовательность Фибоначчи)

Найти решение рекуррентного соотношения

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

с начальными условиями  $f_0 = 0$  и  $f_1 = 1$ .

Решение

Характеристическое уравнение рекуррентного соотношения:  $r^2 - r - 1 = 0$ .

Характеристические корни рекуррентного соотношения:  $r = (1 + \sqrt{5})/2$  и  $r = (1 - \sqrt{5})/2$ .

По теореме 1

$$f_n = \alpha_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

# Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами

## степени 2

Пример 8 (Последовательность Фибоначчи)

Найти решение рекуррентного соотношения

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

с начальными условиями  $f_0 = 0$  и  $f_1 = 1$ .

Решение

$$f_n = \alpha_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

---

$$f_0 = 0 = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$f_1 = 1 = \alpha_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \alpha_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right), \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = 1/\sqrt{5}, \alpha_2 = -1/\sqrt{5}, \Rightarrow$$

$$f_n = 1/\sqrt{5} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + (-1/\sqrt{5}) \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$



# Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами

## степени 2

### Теорема 2

Пусть  $c_1$  и  $c_2$  – вещественные числа и  $c_2 \neq 0$ .

Предположим, что уравнение

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

имеет только один корень  $r_0$ .

Последовательность  $\{a_n\}$  является решением рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

тогда и только тогда, когда  $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$  для  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – константы.

# Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами

## степени 2

### Пример 9

Найти решение рекуррентного соотношения

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

с начальными условиями  $a_0 = 1$  и  $a_1 = 6$ .

### Решение

Характеристическое уравнение рекуррентного соотношения:  $r^2 - 6r + 9 = 0$ .

Характеристический корень рекуррентного соотношения:  $r = 3$ .

По теореме 2 имеем:  $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$ .

# Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами

## степени 2

### Пример 9

Найти решение рекуррентного соотношения

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

с начальными условиями  $a_0 = 1$  и  $a_1 = 6$ .

### Решение

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$$

---

$$a_0 = 1 = \alpha_1,$$

$$a_1 = 6 = \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3, \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \Rightarrow$$

$$a_n = 3^n + n 3^n.$$

# Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами

## степени 3

### Теорема 3

Пусть  $c_1, c_2, \dots, c_k$  – вещественные числа.

Предположим, что уравнение

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_{k-1} r - c_k = 0$$

имеет  $k$  различных корней  $r_1, r_2, \dots, r_k$ .

Последовательность  $\{a_n\}$  является решением рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

тогда и только тогда, когда

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \dots + \alpha_k r_k^n$$

для  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  – константы.

# Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами

## степени 3

### Пример 10

Найти решение рекуррентного соотношения

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$

с начальными условиями  $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$ .

### Решение

Характеристическое уравнение рекуррентного соотношения:  $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$ .

Характеристические корни рекуррентного соотношения:  $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$ .

По теореме 3 имеем:  $a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$ .

# Решение линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами

## степени 3

### Пример 10

Найти решение рекуррентного соотношения

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$

с начальными условиями  $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$ .

Решение

$$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$$

---

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

$$a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3,$$

$$a_2 = 15 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 9, \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 2, \Rightarrow$$

$$a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n.$$

# Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

## Определение 2

**Линейным неоднородным рекуррентным соотношением степени  $k$  с постоянными коэффициентами** называется рекуррентное соотношение вида

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + F(n),$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_k$  – вещественные числа,  $c_k \neq 0$ ;  $F(n)$  – не равная тождественно нулю функция.

Рекуррентное соотношение вида

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

называется **ассоциированным однородным рекуррентным соотношением**.

# Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

## Пример 11

$a_n = a_{n-1} + 2^n$  – линейное неоднородное рекуррентное соотношение;

$a_n = a_{n-1}$  – ассоциированное линейное однородное рекуррентное соотношение.



# Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

## Пример 12

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$  – линейное неоднородное рекуррентное соотношение;

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  – ассоциированное линейное однородное рекуррентное соотношение.

# Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

## Пример 13

$a_n = 3a_{n-1} + n3^n$  – линейное неоднородное рекуррентное соотношение;

$a_n = 3a_{n-1}$  – ассоциированное линейное однородное рекуррентное соотношение.

# Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

## Пример 14

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + n!$  – линейное неоднородное рекуррентное соотношение;

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$  – ассоциированное линейное однородное рекуррентное соотношение.

# Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

## Теорема 4

Если  $\{a_n^{(p)}\}$  – частное решение линейного неоднородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + F(n),$$

то любое его решение имеет вид  $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ ,

где  $\{a_n^{(h)}\}$  – решение ассоциированного линейного однородного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}.$$

## Доказательство теоремы 4

Если  $\{a_n^{(p)}\}$  – частное решение линейного неоднородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + F(n),$$

то

$$a_n^{(p)} = c_1 a_{n-1}^{(p)} + c_2 a_{n-2}^{(p)} + \dots + c_k a_{n-k}^{(p)} + F(n).$$

## Доказательство теоремы 4

Если  $\{b_n\}$  – другое решение линейного неоднородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + F(n),$$

то

$$b_n = c_1 b_{n-1} + c_2 b_{n-2} + \dots + c_k b_{n-k} + F(n).$$

## Доказательство теоремы 4

Итак,

$$a_n^{(p)} = c_1 a_{n-1}^{(p)} + c_2 a_{n-2}^{(p)} + \dots + c_k a_{n-k}^{(p)} + F(n),$$

$$b_n = c_1 b_{n-1} + c_2 b_{n-2} + \dots + c_k b_{n-k} + F(n).$$

Вычтем из второго равенства первое равенство:

$$b_n - a_n^{(p)} = c_1(b_{n-1} - a_{n-1}^{(p)}) + c_2(b_{n-2} - a_{n-2}^{(p)}) + \dots + c_k(b_{n-k} - a_{n-k}^{(p)}).$$

Следовательно,  $\{b_n - a_n^{(p)}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{a_n^{(h)}\}$  – решение ассоциированного линейного однородного соотношения.

$$\text{Значит, } b_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} \blacksquare$$

# Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

## Пример 15

Решить рекуррентное соотношение

$$a_n = 3a_{n-1} + 2n.$$

## Решение

Ассоциированное однородное рекуррентное соотношение:

$$a_n = 3a_{n-1}.$$

Его решение:  $a_n^{(h)} = \alpha \cdot 3^n$ .



# Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

## Пример 15

Решить рекуррентное соотношение

$$a_n = 3a_{n-1} + 2n.$$

## Решение

Найдем частное решение неоднородного рекуррентного соотношения.

Будем искать его в виде  $p_n = cn + d$ , где  $c$  и  $d$  – некоторые константы.

$$\begin{aligned} cn + d &= 3(c(n-1) + d) + 2n, \\ (2 + 2c)n + (2d - 3c) &= 0. \end{aligned}$$

# Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

## Пример 15

Решить рекуррентное соотношение

$$a_n = 3a_{n-1} + 2n.$$

## Решение

$$(2 + 2c)n + (2d - 3c) = 0,$$

$$\begin{cases} 2 + 2c = 0, \\ 2d - 3c = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$c = -1, d = -\frac{3}{2}, \Rightarrow$$

$$a_n^{(p)} = -n - 3/2, \Rightarrow$$

$$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = -n - 3/2 + \alpha \cdot 3^n.$$

# Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

## Пример 16

Решить рекуррентное соотношение

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n.$$

## Решение

Ассоциированное однородное рекуррентное соотношение

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}.$$

Его решение:  $a_n^{(h)} = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot 2^n.$

# Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

## Пример 16

Решить рекуррентное соотношение

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n.$$

## Решение

Найдем частное решение неоднородного рекуррентного соотношения.

Будем искать его в виде  $F(n) = C \cdot 7^n$ .

$$C \cdot 7^n = 5C \cdot 7^{n-1} - 6C \cdot 7^{n-2} + 7^n,$$

$$49C = 35C - 6C + 49,$$

$$C = 49/20.$$

# Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

## Пример 16

Решить рекуррентное соотношение

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n.$$

Решение

$$a_n^{(p)} = (49/20)7^n, \Rightarrow$$

$$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot 2^n + (49/20)7^n.$$

# Производящие функции

## Определение 1

**Производящей функцией** последовательности

$$a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$$

вещественных чисел называется формальный ряд

$$G(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k$$

# Производящие функции

- $$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

Последовательность, удовлетворяющая данному рекуррентному соотношению, однозначно определяется самим рекуррентным соотношением и  $k$  начальными условиями:

$$a_0 = c_0, a_1 = c_1, \dots, a_{k-1} = c_{k-1}.$$

# Производящие функции

## Пример 1

Рекуррентное соотношение

$$P_n = (1.11)P_{n-1}$$

– линейное однородное рекуррентное соотношение первой степени.



# Производящие функции

## Пример 2

Рекуррентное соотношение

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

– линейное однородное рекуррентное соотношение второй степени.

Это рекуррентное соотношение с начальными условиями  $f_0 = 0, f_1 = 1$  задает последовательность Фибоначчи.

# Производящие функции

## Пример 3

Рекуррентное соотношение

$$a_n = a_{n-5}$$

– линейное однородное рекуррентное соотношение пятой степени.

# Производящие функции

## Пример 4

Рекуррентное соотношение

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$$

– не линейное.

# Производящие функции

## Пример 5

Рекуррентное соотношение

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$

– не однородное.

# Производящие функции

## Пример 6

Коэффициенты рекуррентного соотношения

$$B_n = nB_{n-1}$$

не являются постоянными.

# Производящие функции

Будем искать решение линейного однородного рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

в виде

$$a_n = r^n, \text{ где } r \text{ — константа.}$$

# Применение производящих функций для решения рекуррентных соотношений

Последовательность  $a_n = r^n$  является решением линейного однородного рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

тогда и только тогда, когда

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \dots + c_k r^{n-k}.$$

$$a_k = 3a_{k-1}, a_0 = 2$$

Таким образом, последовательность  $\{a_n\}$  с  $a_n = r^n$  является решением линейного однородного рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} \quad (*)$$

тогда и только тогда, когда  $r$  является решением уравнения

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_{k-1} r - c_k = 0.$$

Это уравнение называется **характеристическим уравнением** рекуррентного соотношения (\*).

Решения характеристического уравнения называются **характеристическими корнями** рекуррентного соотношения (\*).



$$a_k = 3a_{k-1}, a_0 = 2$$

## Теорема 1

Пусть  $c_1$  и  $c_2$  – вещественные числа. Предположим, что уравнение

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

имеет два различных корня  $r_1$  и  $r_2$ .

Последовательность  $\{a_n\}$  является решением рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

тогда и только тогда, когда  $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$  для  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – константы.

$$a_k = 3a_{k-1}, a_0 = 2$$

Решение примера 8

$$G(x) - 3xG(x) = 2$$

⇓

$$(1 - 3x)G(x) = 2$$

⇓

$$G(x) = 2/(1 - 3x)$$

⇓

$$G(x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot 3^k x^k$$

$$a_k = 3a_{k-1}, a_0 = 2$$

Решение примера 8

$$G(x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot 3^k x^k$$

⇓

$$a_k = 2 \cdot 3^k$$

# Применение производящих функций для решения рекуррентных соотношений

## Пример 9

Решить рекуррентное соотношение

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, n = 2, 3, 4, \dots,$$

с начальным условием  $a_1 = 9$ .

(**Неискаженное кодовое слово** – это последовательность, состоящая из десятичных цифр и имеющая четное число нулей.)

Докажите, что  $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, n = 2, 3, 4, \dots$ , с начальным условием  $a_1 = 9$ , – это число неискаженных кодовых слов длины  $n$ .)

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, a_1 = 9$$

### Решение примера 9

Чтобы упростить работу с производящими функциями, расширим исходную числовую последовательность, положив  $a_0 = 1$  (имеется одна строка длины 0: это пустая строка).

Тогда

$$a_1 = 8a_{1-1} + 10^{1-1} = 8a_0 + 10^0 = 8 + 1 = 9,$$

что согласуется с условием задачи.

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, a_0 = 1$$

### Пример 7

Найти решение рекуррентного соотношения

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

с начальными условиями  $a_0 = 2$  и  $a_1 = 7$ .

### Решение

Характеристическое уравнение рекуррентного соотношения:  $r^2 - r - 2 = 0$ .

Характеристические корни рекуррентного соотношения:  $r = 2$  и  $r = -1$ .

По теореме 1,  $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, a_0 = 1$$

### Пример 7

Найти решение рекуррентного соотношения

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

с начальными условиями  $a_0 = 2$  и  $a_1 = 7$ .

---

### Решение

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$$

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$a_1 = 7 = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-1), \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -1, \Rightarrow$$

$$a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n.$$

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, a_0 = 1$$

Пример 8 (Последовательность Фибоначчи)

Найти решение рекуррентного соотношения

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

с начальными условиями  $f_0 = 0$  и  $f_1 = 1$ .

Решение

Характеристическое уравнение рекуррентного соотношения:  $r^2 - r - 1 = 0$ .

Характеристические корни рекуррентного соотношения:  $r = (1 + \sqrt{5})/2$  и  $r = (1 - \sqrt{5})/2$ .

По теореме 1

$$f_n = \alpha_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$



$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, a_0 = 1$$

Пример 8 (Последовательность Фибоначчи)

Найти решение рекуррентного соотношения

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

с начальными условиями  $f_0 = 0$  и  $f_1 = 1$ .

Решение

$$f_n = \alpha_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$f_0 = 0 = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$f_1 = 1 = \alpha_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \alpha_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right), \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = 1/\sqrt{5}, \alpha_2 = -1/\sqrt{5}, \Rightarrow$$

$$f_n = 1/\sqrt{5} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + (-1/\sqrt{5}) \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, a_0 = 1$$

### Решение примера 9

$$G(x) - 1 = 8xG(x) + x/(1 - 10x)$$

⇓

$$G(x) = \frac{1 - 9x}{(1 - 8x)(1 - 10x)}$$

Разложим выражение, стоящее в правой части равенства, в сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1 - 9x}{(1 - 8x)(1 - 10x)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - 8x} + \frac{1}{1 - 10x} \right)$$

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, a_0 = 1$$

### Пример 9

Найти решение рекуррентного соотношения

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

с начальными условиями  $a_0 = 1$  и  $a_1 = 6$ .

### Решение

Характеристическое уравнение рекуррентного соотношения:  $r^2 - 6r + 9 = 0$ .

Характеристический корень рекуррентного соотношения:  $r = 3$ .

По теореме 2,  $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$ .

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, a_0 = 1$$

### Пример 9

Найти решение рекуррентного соотношения

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

с начальными условиями  $a_0 = 1$  и  $a_1 = 6$ .

### Решение

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$$

$$a_0 = 1 = \alpha_1,$$

$$a_1 = 6 = \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3, \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \Rightarrow$$

$$a_n = 3^n + n 3^n.$$