

Параллелограмм и трапеция



Параллелограмм.

Определение: Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

На рисунке изображен параллелограмм ABCD: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.
Параллелограмм является выпуклым четырехугольником.



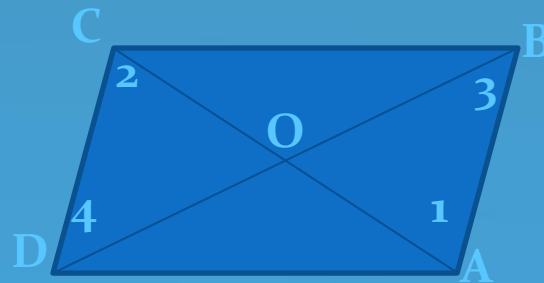
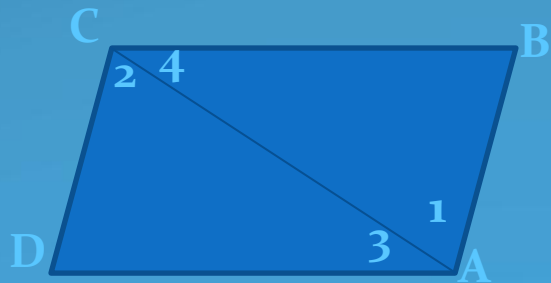
Рассмотрим некоторые свойства параллелограмма.

1. В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

Рассмотрим параллелограмм ABCD (рис. слева). Диагональ AC разделяет его на два треугольника: ABC и ADC. Эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим углам (AC-общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении секущей AC параллельных прямых AB и CD, AD и BC соответственно). Поэтому $AB = CD$, $AD = BC$, и $\angle B = \angle D$. Далее, пользуясь равенствами углов 1 и 2, 3 и 4, получаем $\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C$.

2. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

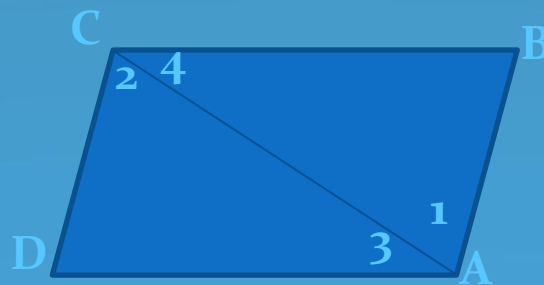
Пусть O - точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма ABCD (рис. справа). Треугольники AOB и COD равны по стороне и двум прилежащим углам ($AB = CD$ как противоположные стороны параллелограмма, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущими AC и BD соответственно). Поэтому $AO = OC$ и $OB = OD$, что и требовалось доказать.



Признаки параллелограмма

1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник-параллелограмм.

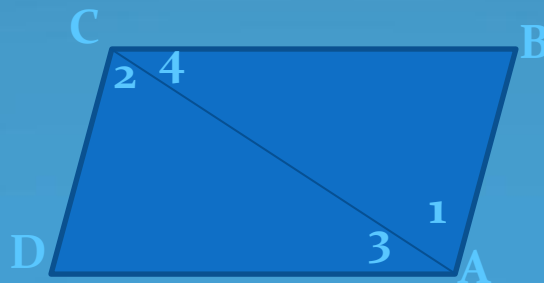
Пусть в четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $AB=CD$ (см.рис). Проведем диагональ AC , разделяющую данный четырехугольник на два треугольника: ABC и CDA . Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними (AC -общая сторона, $AB=CD$ по условию, $\angle 1=\angle 2$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AC), поэтому $\angle 3=\angle 4$. Но углы 3 и 4 накрест лежащие при пересечении прямых AD и BC секущей AC , следовательно, $AD\parallel BC$. Таким образом, в четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны попарно параллельны, и, значит четырехугольник $ABCD$ -параллелограмм.



Признаки параллелограмма

2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Проведем диагональ AC данного четырехугольника $ABCD$, разделяющую его на треугольники ABC и CDA (см.рис.). Эти треугольники равны по трем сторонам (AC -общая сторона, $AB=CD$ и $BC=DA$ по условию), поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Отсюда следует, что $AB \parallel CD$. Так как $AB=CD$ и $AB \parallel CD$, то по признаку 1 четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.



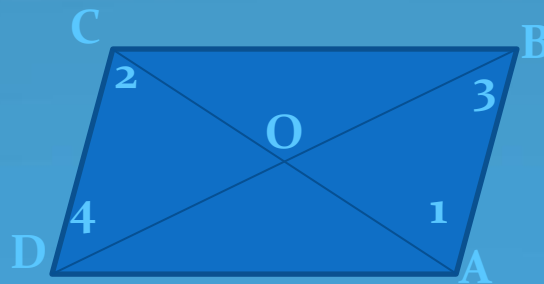
Признаки параллелограмма

3. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, в котором диагонали AC и BD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам (см.рис.). Треугольники AOB и COD равны по первому признаку равенства треугольников ($AO=OC$, $BO=OD$ по условию, $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные углы), поэтому $AB=CD$ и $\angle 1 = \angle 2$.

Из равенства углов 1 и 2 следует, что $AB \parallel CD$.

Итак, в четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны и параллельны, значит, по признаку 1 четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

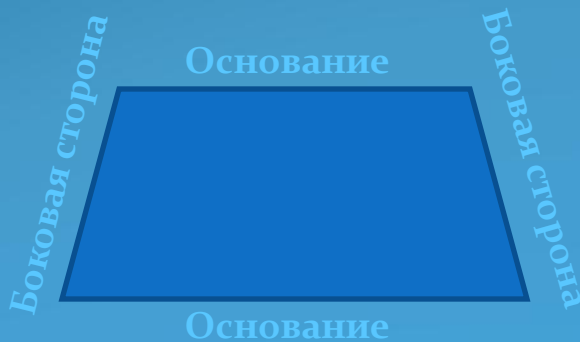


Трапеция

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.

Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*, а две другие стороны – *боковыми сторонами* (рис.слева)

Трапеция называется *равнобедренной*, если ее боковые стороны равны (рис. посередине). Трапеция, один из углов которой прямой, называется *прямоугольной* (рис.справа).



Вопросы

1. Что такое параллелограмм? Его свойства.
2. Признаки параллелограмма.
3. Что такое трапеция?
4. Какая трапеция называется равнобедренной, прямоугольной?