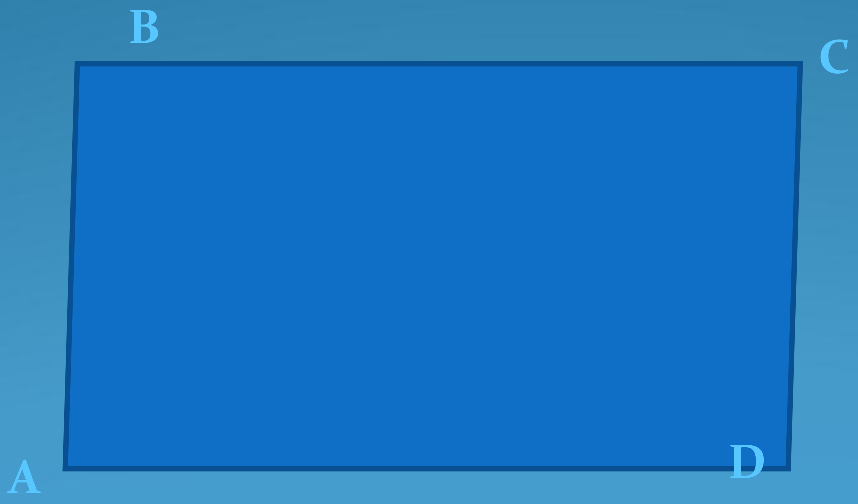
Параллелограмм и трапеция

Параллелограмм.

Определение: *Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.*

На рисунке изображен параллелограмм ABCD: AB||CD, AD||BC. Параллелограмм является выпуклым четырехугольником.



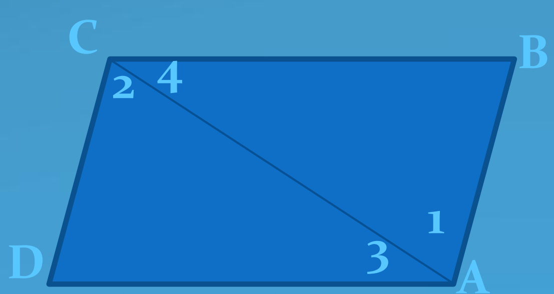
Рассмотрим некоторые свойства параллелограмма.

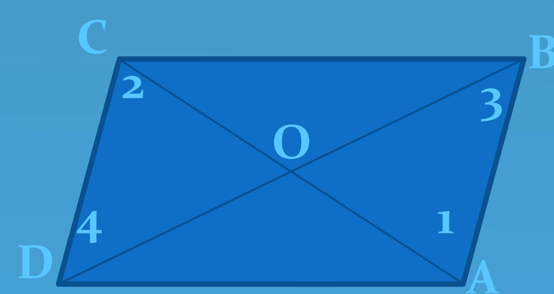
1. ***В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.***

Рассмотрим параллелограмм ABCD (рис. слева). Диагональ AC разделяет его на два треугольника: ABC и ADC. Эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим углам (AC-общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении секущей AC параллельных прямых AB и CD, AD и BC соответственно). Поэтому AB=CD, AD=BC, и $\angle B = \angle D$. Далее, пользуясь равенствами углов 1 и 2, 3 и 4, получаем $\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C$.

2. ***Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.***

Пусть O - точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма ABCD (рис. справа). Треугольники AOB и COD равны по стороне и двум прилежащим углам (AB=CD как противоположные стороны параллелограмма, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущими AC и BD соответственно). Поэтому AO=OC и OB=OD, что и требовалось доказать.

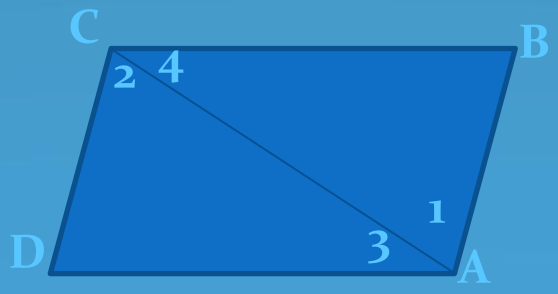




Признаки параллелограмма

1. *Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник-параллелограмм.*

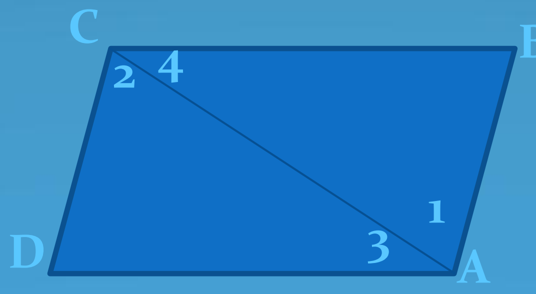
Пусть в четырехугольникеABCD стороны AB и CD параллельны и AB=CD(см.рис). Проведем диагональ AC, разделяющую данный четырехугольник на два треугольника: ABC и CDA. Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними (AC-общая сторона, AB=CD по условию, $\angle 1=\angle 2$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AC), поэтому $\angle 3=\angle 4$. Но углы 3 и 4 накрест лежащие при пересечении прямых AD и BC секущей AC, следовательно, AD||BC. Таким образом, в четырехугольнике ABCD противоположные стороны попарно параллельны, и, значит четырехугольник ABCD-параллелограмм.



Признаки параллелограмма

2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Проведем диагональ АС данного четырехугольника АВСD, разделяющую его на треугольники АВС и СDA (см.рис.). Эти треугольники равны по трем сторонам (АС-общая сторона, АВ=СD и ВС=DA по условию), поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Отсюда следует, что АВ||СD. Так как АВ=СD и АВ||СD, то по признаку 1 четырехугольник АВСD – параллелограмм.



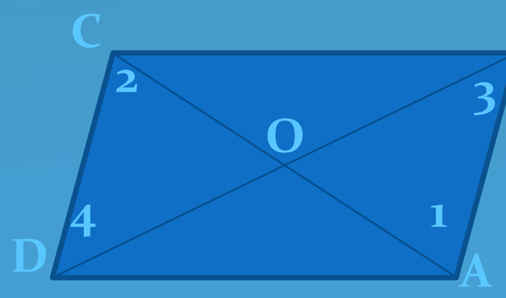
Признаки параллелограмма

3. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Рассмотрим четырехугольник ABCD, в котором диагонали AC и BD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам (см.рис.). Треугольники AOB и COD равны по первому признаку равенства треугольников (AO=OC, BO=OD по условию, $\angle$ AOB=$\angle$COD как вертикальные углы), поэтому AB=CD и $\angle$1=$\angle$2.

Из равенства углов 1 и 2 следует, что AB||CD.

Итак, в четырехугольнике ABCD стороны AB и CD равны и параллельны, значит, по признаку 1 четырехугольник ABCD – параллелограмм.

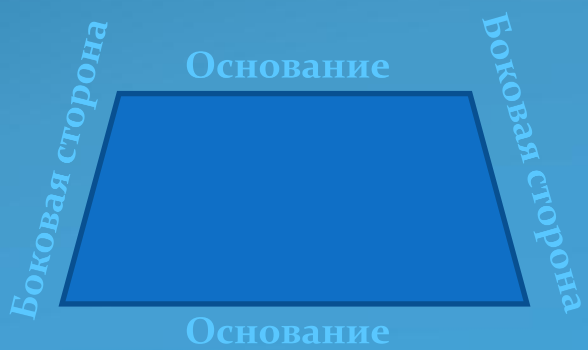


Трапеция

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.

Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями,* а две другие стороны – *боковыми сторонами* (рис.слева)

Трапеция называется *равнобедренной* , если ее боковые стороны равны (рис. посередине). Трапеция, один из углов которой прямой, называется *прямоугольной* (рис.справа).



Равнобедренная трапеция

Прямоугольная трапеция

Вопросы

1. Что такое параллелограмм? Его свойства.
2. Признаки параллелограмма.
3. Что такое трапеция?
4. Какая трапеция называется равнобедренной, прямоугольной?