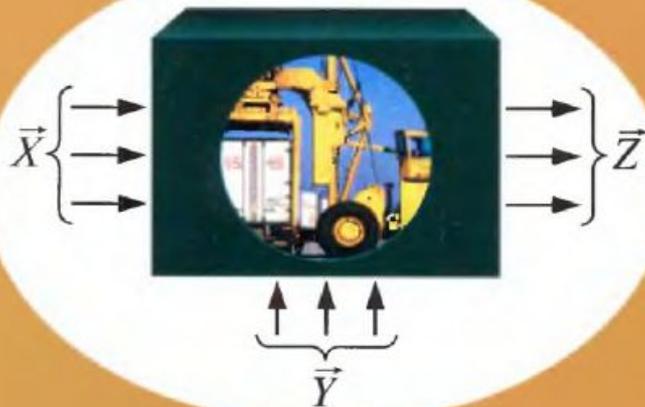


Б.А. Гладких

**МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
ДЛЯ БАКАЛАВРОВ ИНФОРМАТИКИ**

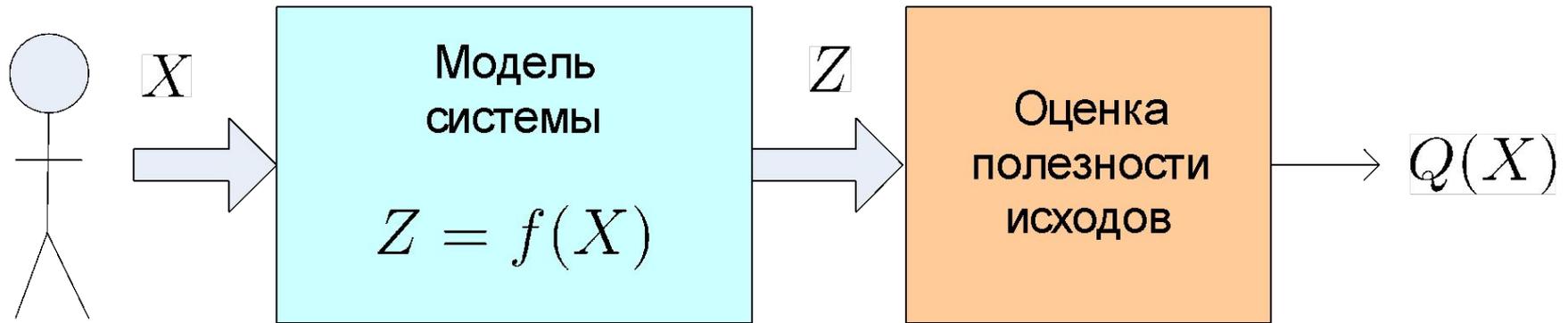


Часть I

**ЛИНЕЙНОЕ
ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

Главы 2 - 8

Предисловие. Общая задача оптимизации



ЛПР

$$Q(X) \rightarrow \max (\min)$$
$$X \in D$$

X — объект оптимизации,

$Q(X)$ — целевая функция (*objective function*),

D — допустимое множество (*feasible set*)

Конечная и бесконечномерная оптимизация

Оптимизация

Конечномерная
математическое программирование
(mathematical programming)

Бесконечномерная
вариационное исчисление,
(variations calculus)

$$X = \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

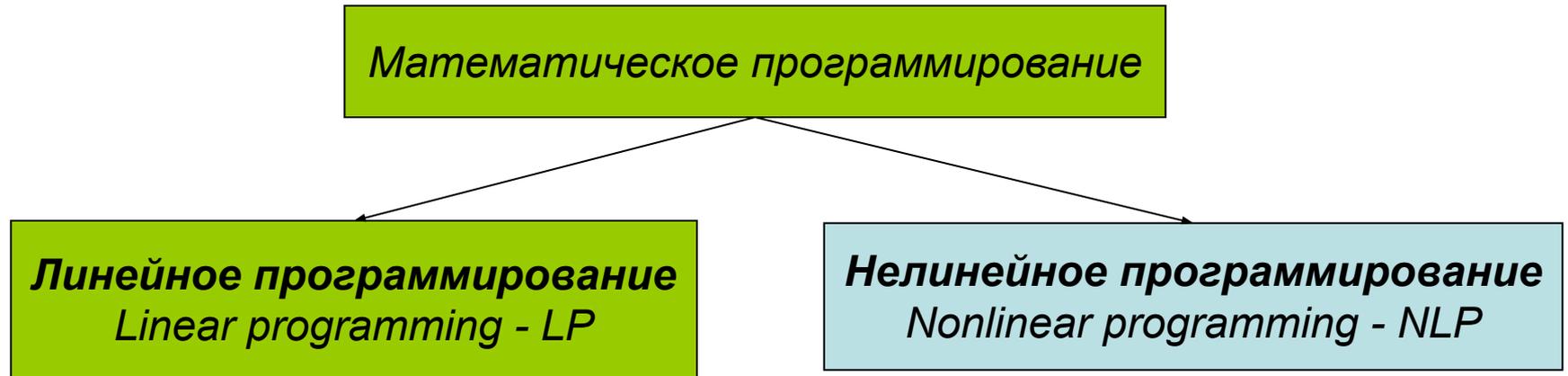
$$Q(\vec{X}) \rightarrow \max (\min)$$
$$\vec{X} \in D$$

$$X = x(t)$$

$$Q[x()] = \int_{T_1}^{T_2} x(t) dt$$
$$x(t) \in D$$

Математическое программирование – это не программирование!

Классификация задач математического программирования



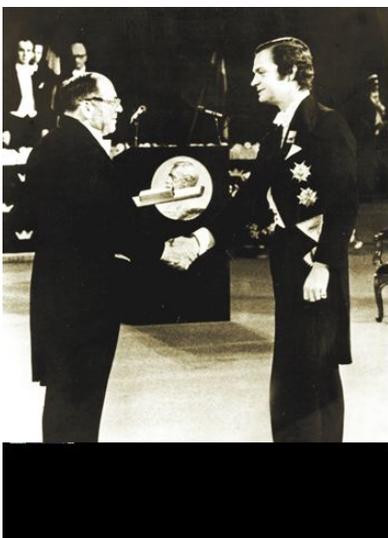
Важность линейного программирования для теории и практики



Леонид Витальевич Канторович
(1912--1986)



Джордж Данциг
(Dantzig, George Bernard; 1914 - 2005)



Вручение Нобелевской премии,
1975



Слева направо: Тьяллинг Купманс (Koopmans, Tjalling;
1910--1985), Джордж Данциг,
Леонид Канторович

Глава 2. Примеры и каноническая форма задачи линейного программирования

2.1. Задача о производственном плане

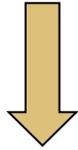


На примере мебельной фабрики

50 ед.



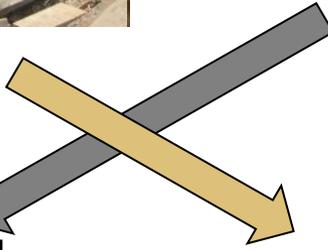
54 ед.



10 ед.



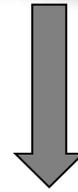
8 y. e.



6 ед.



5 ед.



9 ед.



6 y. e.

	Стол	Стуль	Всего
Дерево, ед	10	5	50
Железо, ед	6	9	54
Цена, у.е.	8	6	

$$L(x_1, x_2) = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max,$$

$$10x_1 + 5x_2 \leq 50,$$

$$6x_1 + 9x_2 \leq 54.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Замечание 1. О целочисленности

Графическая интерпретация

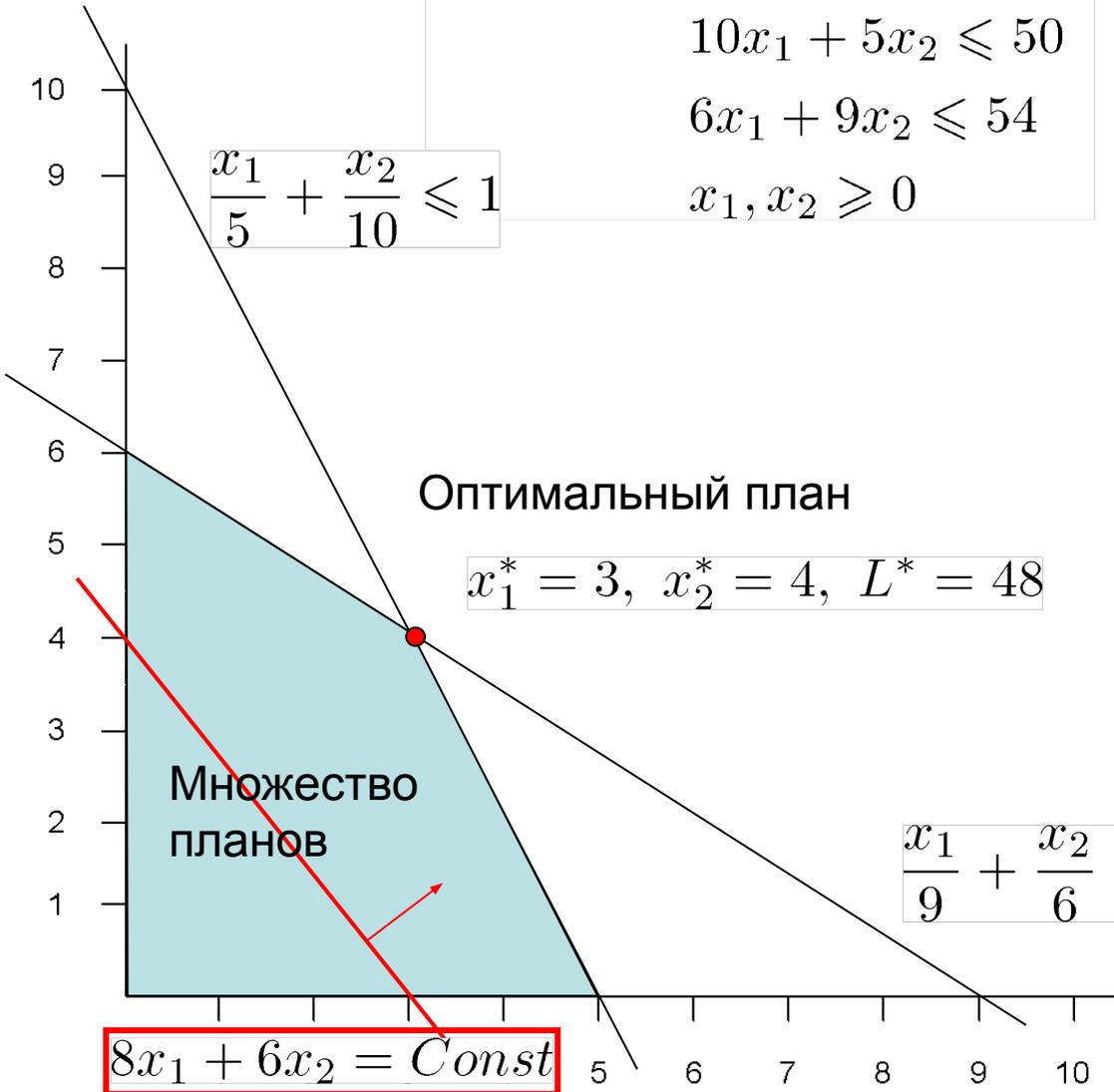
$$L(x_1, x_2) = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$10x_1 + 5x_2 \leq 50$$

$$6x_1 + 9x_2 \leq 54$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{10} \leq 1$$

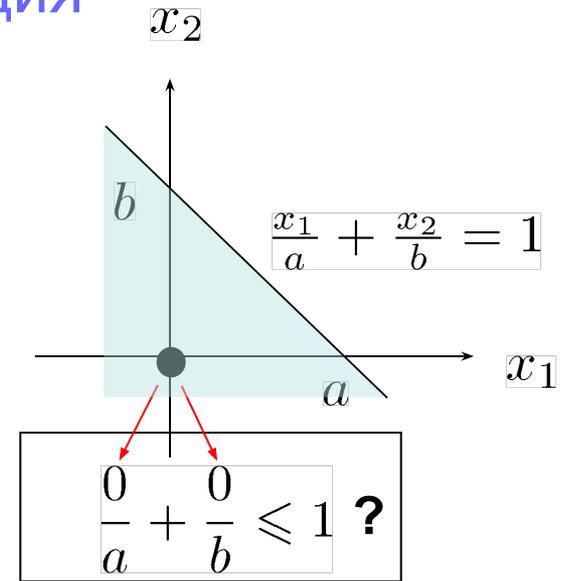


Оптимальный план

$$x_1^* = 3, x_2^* = 4, L^* = 48$$

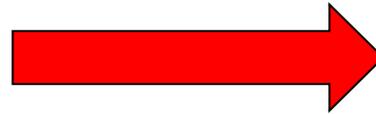
Множество планов

$$\frac{x_1}{9} + \frac{x_2}{6} \leq 1$$



2.2. Задача о диете

Белки 0.1 кг



Жиры 0.1 кг



Углеводы 0.4 кг



	Рыба	Масло	Сахар	Мясо	Молоко	Хлеб
Белки	0,12	0	0	0,13	0,03	0,07
Жиры	0	1	0	0,03	0,03	0
Углеводы	0	0	1	0	0,05	0,5

Июль
2008 г.

	Рыба	Масло	Сахар	Мясо	Молоко	Хлеб
Цена	60	70	20	150	25	20

Белки – 0, 1 кг, жиры – 0,1 кг, углеводы – 0,4 кг

	Рыба	Масло	Сахар	Мясо	Молоко	Хлеб
Белки	0,12	0	0	0,13	0,03	0,07
Жиры	0	1	0	0,03	0,03	0
Углеводы	0	0	1	0	0,05	0,5

	Рыба	Масло	Сахар	Мясо	Молоко	Хлеб
Цена	60	70	20	150	25	20

$$L(x_1, \dots, x_6) = 60x_1 + 70x_2 + 20x_3 + 150x_4 + 25x_5 + 20x_6 \rightarrow \min$$

$$0,12x_1 \quad \quad \quad +0,13x_4 \quad +0,03x_5 \quad +0,07x_6 \quad = 0,1,$$

$$\quad \quad \quad +x_2 \quad \quad \quad +0,03x_4 \quad +0,03x_5 \quad \quad \quad = 0,1,$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad +x_3 \quad \quad \quad +0,05x_5 \quad +0,5x_6 \quad = 0,4$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0$$

2.3. Каноническая форма

Развернутая запись

$$L(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

.....

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m,$$

$$b_1, \dots, b_m \geq 0,$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

$$L(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Матричная запись

Обозначения:

$\vec{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$ – вектор переменных,

$\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$ – вектор стоимостей,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица условий,

$\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$ – вектор ограничений.

$$L(\vec{X}) = \vec{c}^T \vec{X} \rightarrow \min,$$

$$A\vec{X} = \vec{b},$$

$$\vec{X} \geq 0$$

Векторная запись

$$A = (\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n),$$

$$\vec{P}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

$$\vec{P}_0 = \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$L(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min,$$
$$\sum_{j=1}^n x_j \vec{P}_j = \vec{P}_0,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

- 1) целевая функция максимизируется. В этом случае следует поменять знаки у стоимостных коэффициентов c_j ;
- 2) свободный член b_i в некотором i -м уравнении отрицателен. Умножаем это уравнение на -1 ;

3) i -е ограничение задано неравенством вида

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i.$$

Для приведения данного неравенства к равенству следует ввести дополнительную **неотрицательную** переменную x_{n+1} , входящую в целевую функцию с **нулевым** коэффициентом, т. е. $c_{n+1} = 0$. Эта переменная, прибавленная к левой части, превращает неравенство в равенство:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i.$$

Для каждого неравенства следует вводить свою дополнительную переменную;

Приведение к канонической форме

4) i -е ограничение задано неравенством вида

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i.$$

Для приведения его к равенству также вводим дополнительную неотрицательную переменную, которую вычитаем из левой части неравенства:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i;$$

5) некоторая переменная x_j неограничена по знаку:

$$-\infty < x_j < \infty.$$

Для приведения к канонической форме, в которой все переменные неотрицательны, представляем эту переменную в виде разности двух неотрицательных переменных:

$$x_j = x'_j - x''_j, \quad (x'_j \geq 0, x''_j \geq 0).$$

Пример

$$\begin{aligned}
 L(x_1, x_2) = \quad & 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \max, \\
 & 5x_1 + 7x_2 \geq 5, \\
 & x_1 - x_2 \leq -7, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 - \text{любое}.
 \end{aligned}$$

Представляем x_2 в виде разности $x_2 - x_3$ (определяем $x'_2 = x_2$, $x''_2 = x_3$, чтобы нумерация переменных шла по порядку), вводим дополнительные переменные x_4 и x_5 для устранения неравенств, меняем направление оптимизации и умножаем второе уравнение на -1 . В результате получим:

$$\begin{aligned}
 L(x_1, \dots, x_5) = \quad & -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \min, \\
 & 5x_1 + 7x_2 - 7x_3 - x_4 = 5, \\
 & -x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 7, \\
 & x_1, \dots, x_5 \geq 0.
 \end{aligned}$$