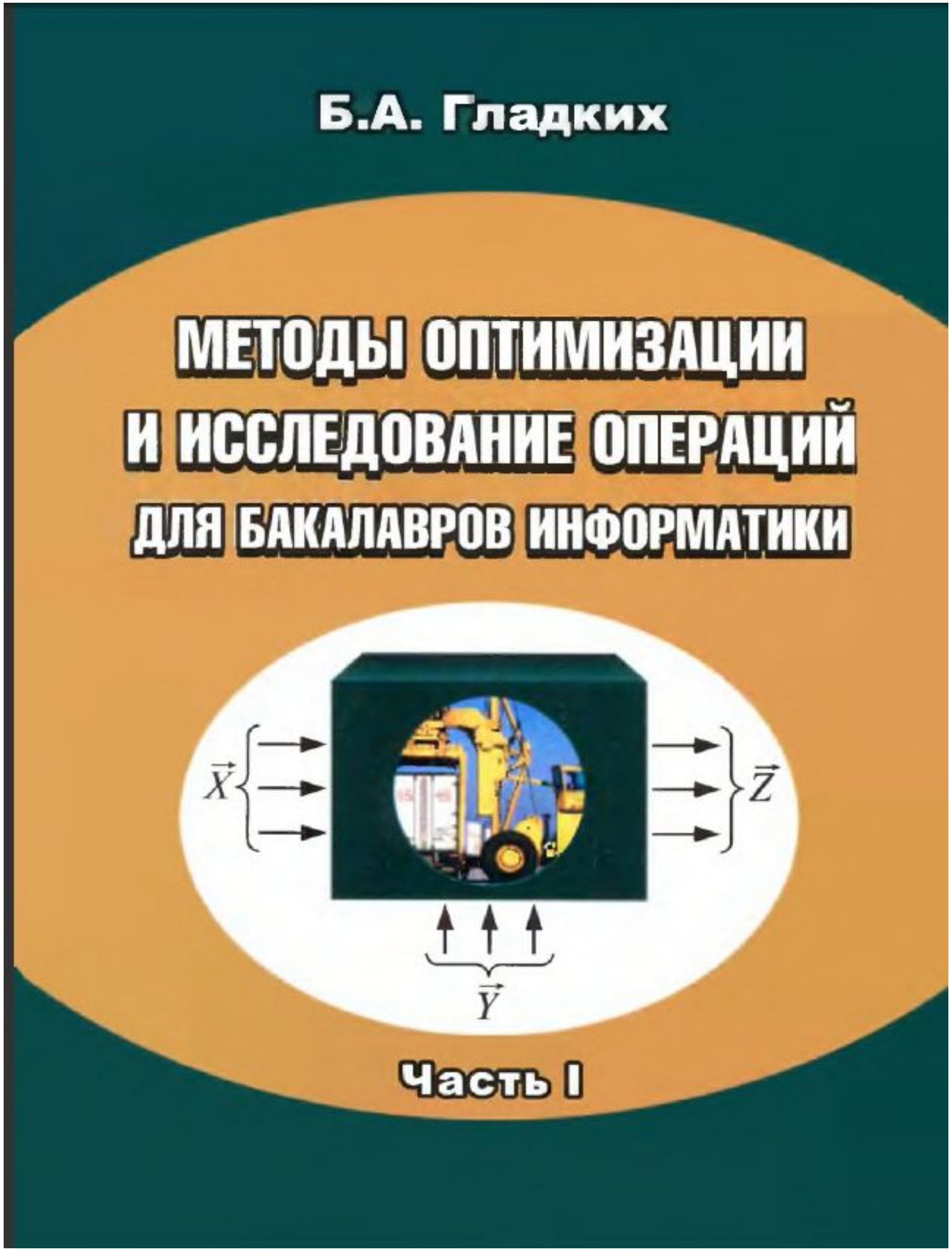
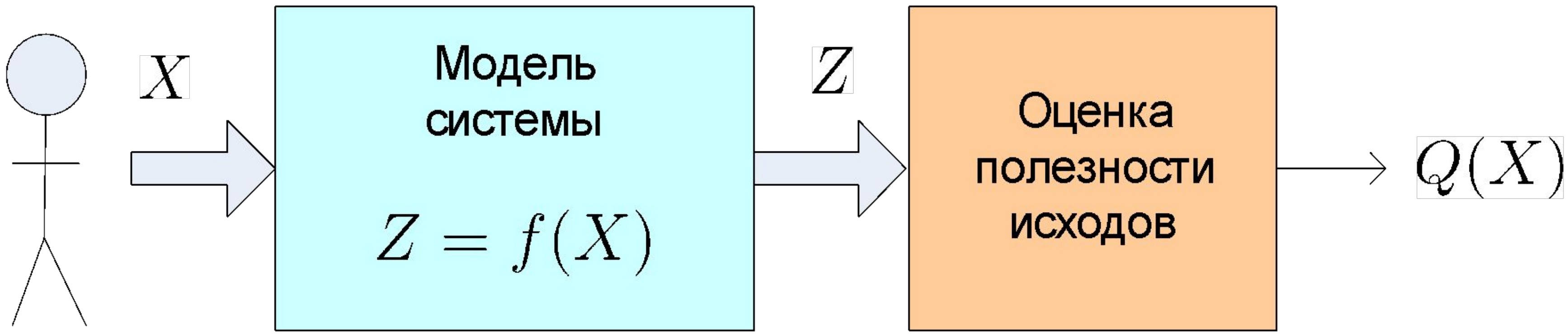


ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Главы 2 - 8

Предисловие. Общая задача оптимизации



ЛПР

$$Q(X) \to \max\ (\min)$$

$$X \in D$$

X — объект оптимизации,

$Q(X)$ — целевая функция *(objective function)*,

D — допустимое множество *(feasible set)*

Конечная и бесконечномерная оптимизация

Оптимизация

Конечномерная
математическое программирование
(mathematical programming)

$$X = \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$Q(\vec{X}) \to \max\ (\min)$$

$$\vec{X} \in D$$

Бесконечномерная
вариационное исчисление,
(variations calculus)

$$X = x(t)$$

$$Q[x()] = \int_{T_1}^{T_2} x(t)dt$$

$$x(t) \in D$$

Математическое программирование – это не программирование!

Классификация задач математического программирования

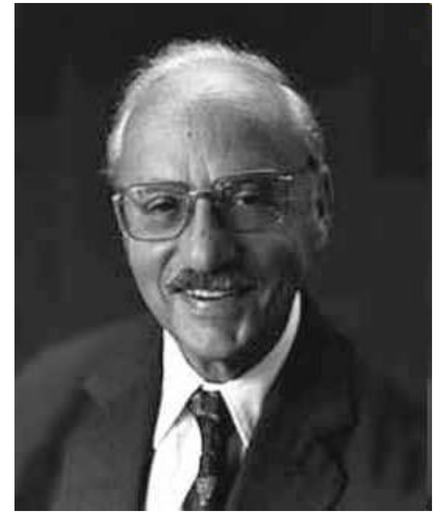
Математическое программирование

Линейное программирование
Linear programming - LP

Нелинейное программирование
Nonlinear programming - NLP

Важность линейного программирования для теории и практики

Леонид Витальевич Канторович
(1912--1986)



Джордж Данциг
(Dantzig, George Bernard; 1914 - 2005)

Вручение Нобелевской премии,
1975

Слева направо: Тьяллинг Купманс (Koopmans, Tjalling;
1910--1985), Джордж Данциг,
Леонид Канторович

Глава 2. Примеры и каноническая форма задачи линейного программирования

2.1. Задача о производственном плане

На примере мебельной фабрики

50 ед.

54 ед.

9 ед.

10 ед.

6 ед.

5 ед.

?

8 у. е.

6 у. е.

	Столы	Стулья	Всего
Дерево, ед	10	5	50
Железо, ед	6	9	54
Цена, у.е.	8	6	

$$L(x_1, x_2) = 8x_1 + 6x_2 \to \max,$$

$$\begin{array}{rrl} 10x_1 & +5x_2 & \leqslant 50, \\ 6x_1 & +9x_2 & \leqslant 54. \end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$$

Замечание 1. О целочисленности

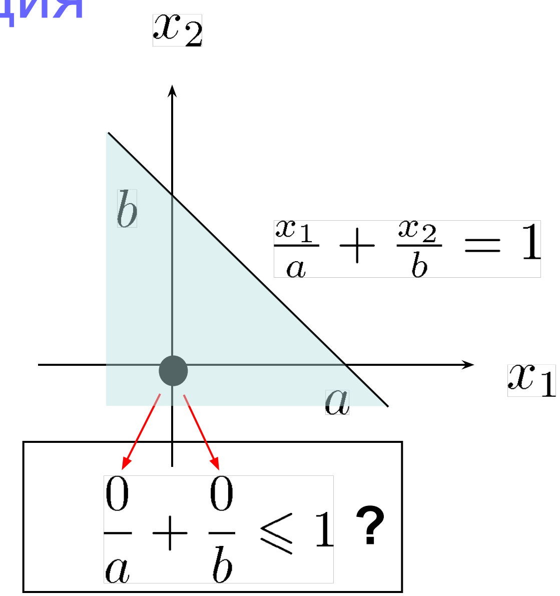
Графическая интерпретация

$$L(x_1, x_2) = 8x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$10x_1 + 5x_2 \leqslant 50$$

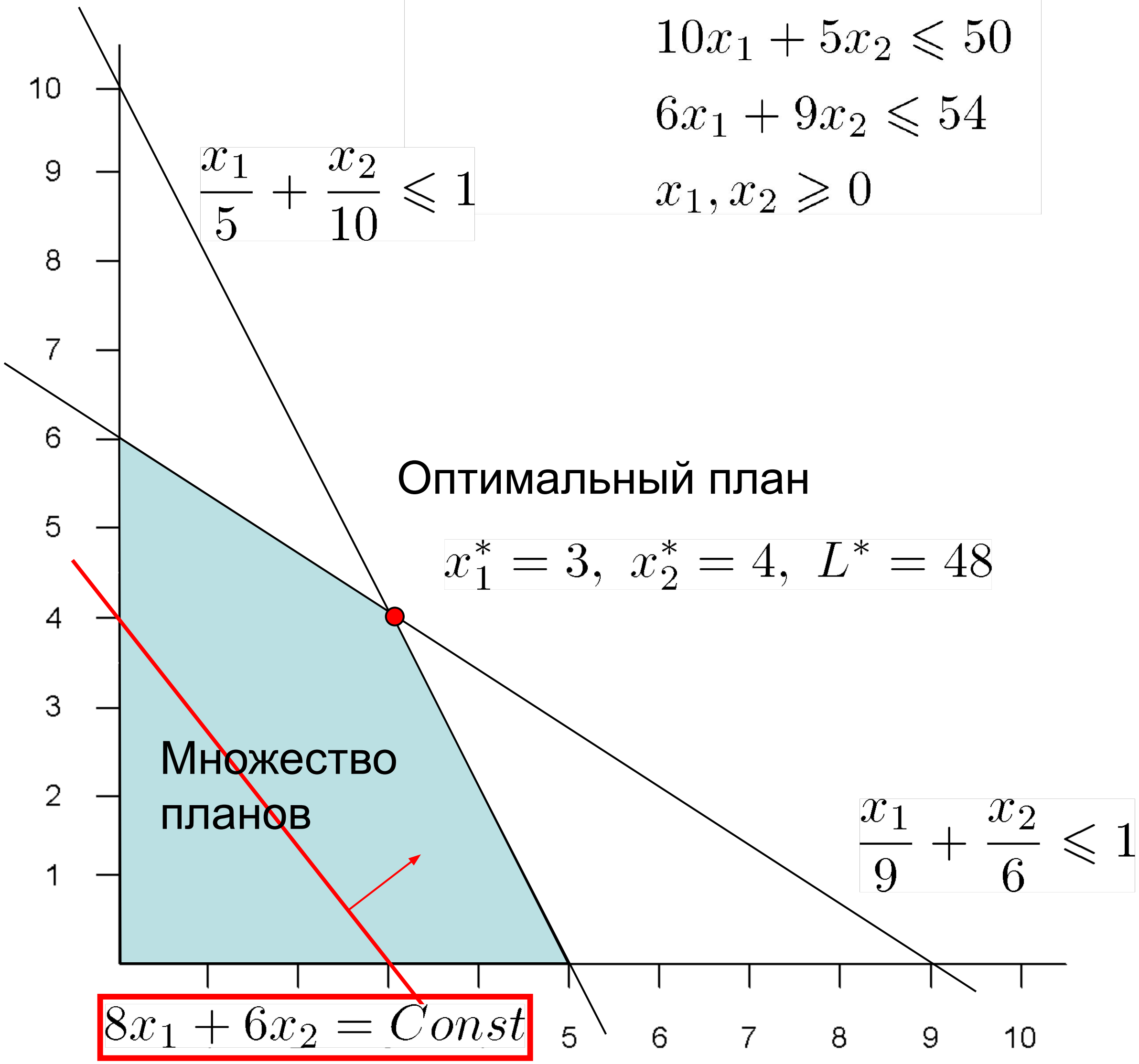
$$6x_1 + 9x_2 \leqslant 54$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$



Оптимальный план

$$x_1^* = 3,\ x_2^* = 4,\ L^* = 48$$



2.2. Задача о диете

Белки 0.1 кг

Жиры 0.1 кг

Углеводы 0.4 кг

	Рыба	Масло	Сахар	Мясо	Молоко	Хлеб
Белки	0,12	0	0	0,13	0,03	0,07
Жиры	0	1	0	0,03	0,03	0
Углеводы	0	0	1	0	0,05	0,5

Июль 2008 г.

	Рыба	Масло	Сахар	Мясо	Молоко	Хлеб
Цена	60	70	20	150	25	20

Белки – 0, 1 кг, жиры – 0,1 кг, углеводы – 0,4 кг

	Рыба	Масло	Сахар	Мясо	Молоко	Хлеб
Белки	0,12	0	0	0,13	0,03	0,07
Жиры	0	1	0	0,03	0,03	0
Углеводы	0	0	1	0	0,05	0,5

	Рыба	Масло	Сахар	Мясо	Молоко	Хлеб
Цена	60	70	20	150	25	20

$$L(x_1, \ldots, x_6) = 60x_1 + 70x_2 + 20x_3 + 150x_4 + 25x_5 + 20x_6 \to \min$$

$$\begin{array}{lllllll} 0,12x_1 & & & +0,13x_4 & +0,03x_5 & +0,07x_6 & = 0,1, \\ & +x_2 & & +0,03x_4 & +0,03x_5 & & = 0,1, \\ & & +x_3 & & +0,05x_5 & +0,5x_6 & = 0,4 \end{array}$$

$$x_1, \ldots, x_6 \geqslant 0$$

2.3. Каноническая форма

1

Развернутая запись

$$L(x_1,\ldots,x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \min$$

$$\begin{array}{lcll} a_{11}x_1+ & \ldots & +a_{1n}x_n & = b_1, \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1+ & \ldots & +a_{mn}x_n & = b_m, \end{array}$$

$$b_1,\ldots,b_m \geqslant 0,$$

$$x_1 \geqslant 0,\ldots,x_n \geqslant 0.$$

$$L(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1,\ldots,m,$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1,\ldots,n.$$

2

Матричная запись

Обозначения:

$\vec{X} = (x_1, \cdots, x_n)^T$ – вектор переменных,

$\vec{c} = (c_1, \cdots, c_n)^T$ – вектор стоимостей,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица условий,

$\vec{b} = (b_1, \cdots, b_m)^T$ – вектор ограничений.

$$L(\vec{X}) = \vec{c}^T \vec{X} \to \min,$$
$$A\vec{X} = \vec{b},$$
$$\vec{X} \geqslant 0$$

3

Векторная запись

$$A = (\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_n),$$

$$\vec{P}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{pmatrix}. \qquad \vec{P}_0 = \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$L(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{P}_j = \vec{P}_0,$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

4

Приведение к канонической форме

1) целевая функция максимизируется. В этом случае следует поменять знаки у стоимостных коэффициентов c_j;

2) свободный член b_i в некотором i-м уравнении отрицателен. Умножаем это уравнение на -1;

4

Приведение к канонической форме

3) i-е ограничение задано неравенством вида

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leqslant b_i.$$

Для приведения данного неравенства к равенству следует ввести дополнительную **неотрицательную** переменную x_{n+1}, входящую в целевую функцию с **нулевым** коэффициентом, т. е. $c_{n+1} = 0$. Эта переменная, прибавленная к левой части, превращает неравенство в равенство:

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i.$$

Для каждого неравенства следует вводить свою дополнительную переменную;

4

Приведение к канонической форме

4) i-е ограничение задано неравенством вида

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i.$$

Для приведения его к равенству также вводим дополнительную неотрицательную переменную, которую вычитаем из левой части неравенства:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i;$$

5) некоторая переменная x_j неограничена по знаку:

$$-\infty < x_j < \infty.$$

Для приведения к канонической форме, в которой все переменные неотрицательны, представляем эту переменную в виде разности двух неотрицательных переменных:

$$x_j = x_j' - x_j'', \quad (x_j' \geqslant 0,\ x_j'' \geqslant 0).$$

5

Пример

$$
\begin{array}{rrrl}
L(x_1, x_2) = & 2x_1 & -3x_2 & \to \max, \\
& 5x_1 & +7x_2 & \geqslant 5, \\
& x_1 & -x_2 & \leqslant -7,
\end{array}
$$

$$x_1 \geqslant 0, \; x_2 \text{ – любое.}$$

Представляем x_2 в виде разности $x_2 - x_3$ (определяем $x_2' = x_2$, $x_2'' = x_3$, чтобы нумерация переменных шла по порядку), вводим дополнительные переменные x_4 и x_5 для устранения неравенств, меняем направление оптимизации и умножаем второе уравнение на -1. В результате получим:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
L(x_1, \ldots, x_5) = & -2x_1 & +3x_2 & -3x_3 & +0x_4 & +0x_5 & \to \min, \\
& 5x_1 & +7x_2 & -7x_3 & -x_4 & & = 5, \\
& -x_1 & +x_2 & -x_3 & & -x_5 & = 7,
\end{array}
$$

$$x_1, \ldots, x_5 \geqslant 0.$$