



# Теория групп и квантовая физика XX век

**А.В. Горохов**  
**СамГУ**

[gorokhov@ssu.samara.ru](mailto:gorokhov@ssu.samara.ru)

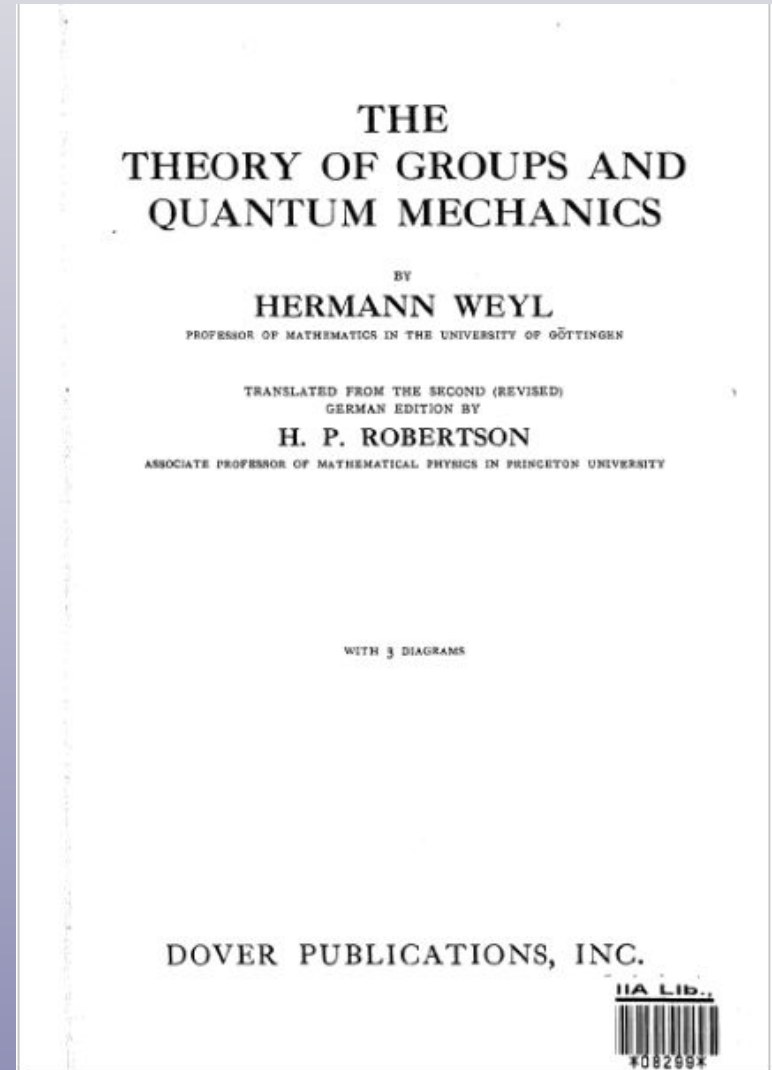
# Принципы симметрии и теория групп

## “Доисторические времена” (1927-1962):

элементарные частицы, атомы, молекулы, кристаллы (классификация состояний, правила отбора, “скрытая” симметрия атома водорода, группы Лоренца, Пуанкаре и классификация частиц)

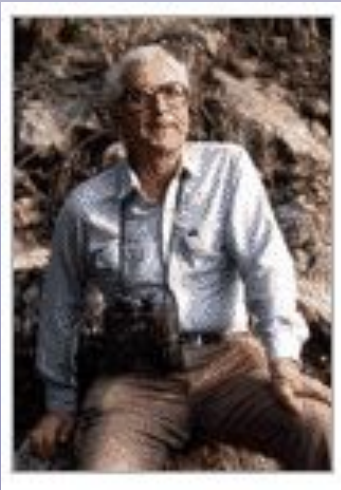


E. Wigner

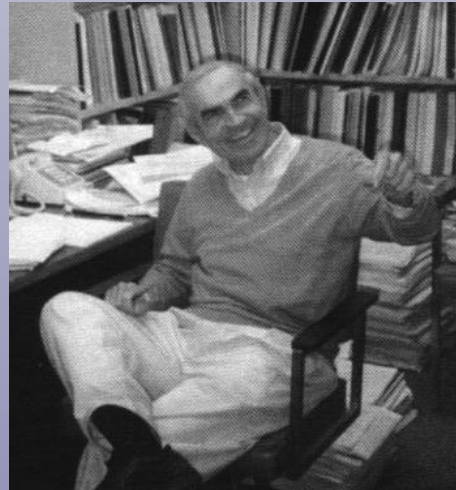


## “Новая эра” (1962 -1973):

- Классификация адронов  $SU(3)$ ,  $SU(6)$ , симметрия ароматов, кварки
- Динамические симметрии квантовых систем
- Спектр генерирующие алгебры
- Когерентные состояния



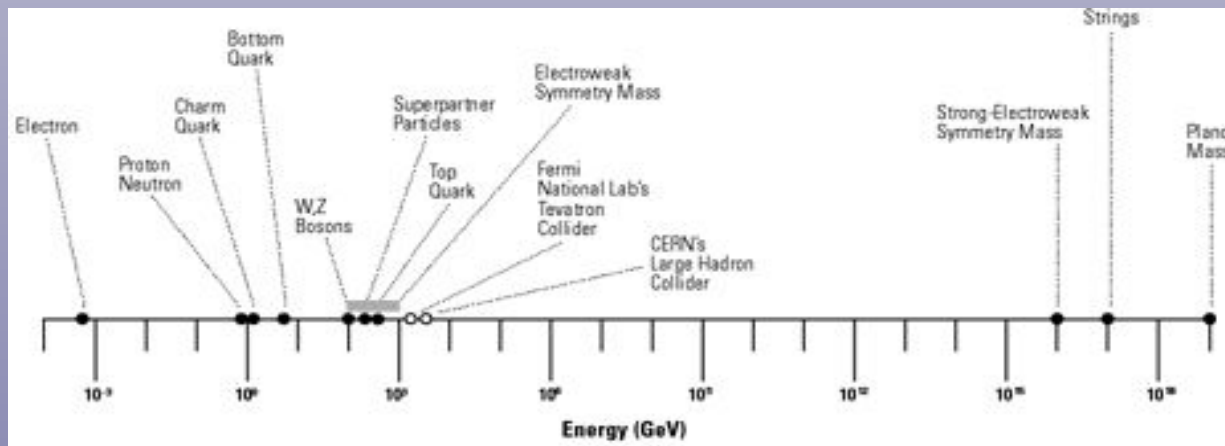
M. Gell-Mann



A.O. Barut

# “Новейшая история” (1973- ...):

- калибровочные поля
- спонтанное нарушение симметрии
- суперсимметричные модели
- суперструны, d – branes and “Theory of Everything”



# Теория групп и квантовая оптика?

- Нелинейная оптика. Вырожденный параметрический генератор. ( $SU(1,1)$ )
- Сжатый свет
- Квантовый хаос
- Двух- и много- уровневые атомы
- Cavity QED, micromaser
- Диссипативные квантовые системы
- Квантовые вычисления, декогеренция

# Модельные гамильтонианы квантовой оптики и когерентные состояния

$$\hat{H} = \sum_{s_1, \dots, s_r} \omega_{s_1 \dots s_r} \hat{A}_1^{s_1} \dots \hat{A}_r^{s_r}$$

$$\hat{H} = \sum_k \omega_k \hat{A}_k,$$

$$[\hat{A}_k, \hat{A}_l] = i C_{kl}^m \hat{A}_m$$

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{T}(g(t, t_0)) = \exp \left[ -i \sum_k \lambda_k(t, t_0) \hat{A}_k \right]$$

$$\forall g_\xi \in \mathcal{X} = G/G_0 \longmapsto |\xi\rangle = \hat{T}(g_\xi)|0\rangle$$

$$\hat{T}(h)|\Psi_0\rangle = e^{i\alpha(h)}|\Psi_0\rangle$$

$$\xi \longmapsto z \equiv (z^1, \dots, z^n), \quad 2n = \dim(G/G_0).$$

# Coherent States on Lie Group G

$$|\Psi\rangle \longmapsto \Psi(z) = \langle z|\Psi\rangle / \langle z|0\rangle, \quad |z\rangle \equiv |\xi(z^1, \dots, z^n)\rangle,$$

$$\rho(z, \bar{z}) = 2 \ln |\langle z|0\rangle|,$$

$$\Psi(z) = \int_{\mathcal{X}} K(z, \bar{w}) \Psi(w) \exp[-\rho(w, \bar{w})] d\mu(w, \bar{w}),$$

$$K(z, \bar{w}) = \langle z|w\rangle / \langle z|0\rangle \langle 0|w\rangle$$

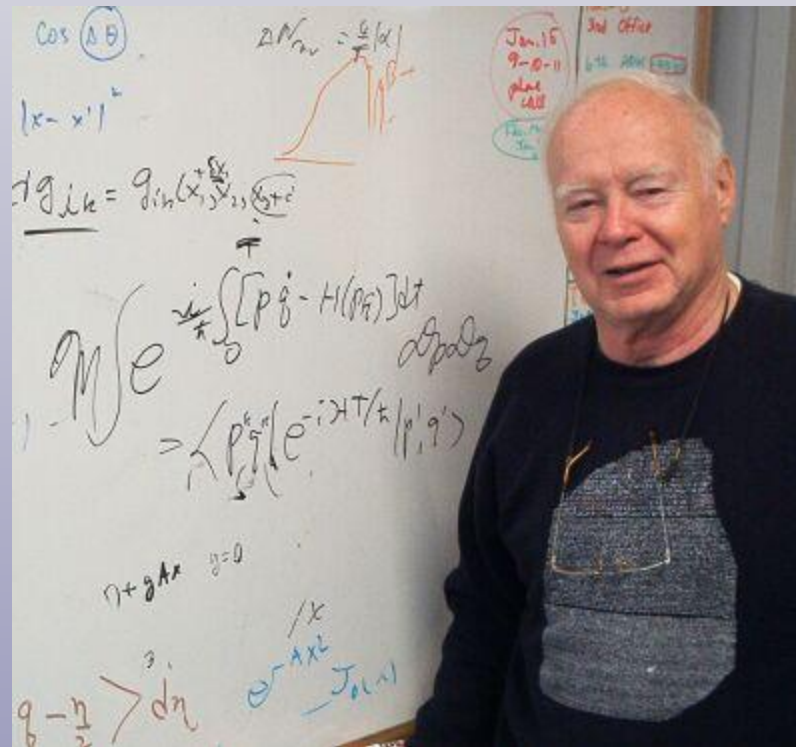
$$(\hat{F}\Psi)(z) = \int_{\mathcal{X}} \mathcal{F}(z, \bar{w}) \frac{K(z, \bar{w})}{K(w, \bar{w})} d\mu(w, \bar{w}),$$

$$\mathcal{F}(z, \bar{w}) = \frac{\langle z|\hat{F}|w\rangle}{\langle z|w\rangle}.$$

$$\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}(z, \bar{z}) = \frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha, \bar{\beta}} g^{\alpha\bar{\beta}} \left[ \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial z^\alpha} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{z}^\beta} - \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{z}^\beta} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial z^\alpha} \right]$$

# John R. Klauder

Departments of Physics and Mathematics,  
University of Florida, Gainesville





## Интеграл по траекториям в представлении КС

$$\mathcal{U}(z, \bar{z}|t, t_0) = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}\right) \prod_{t_0 < \tau < t} d\mu(z(\tau), \bar{z}(\tau)),$$

$$\mathcal{S} = \int_{t_0}^t \left\{ i\hbar \sum_{\alpha=1}^n [\bar{\mathcal{Z}}_{\alpha}(\tau+0) \dot{z}^{\alpha}(\tau) - \mathcal{Z}_{\alpha}(\tau) \dot{\bar{z}}^{\alpha}(\tau)] - \mathcal{H}(z(\tau), \bar{z}(\tau+0)|\tau) \right\} d\tau -$$

(1.72)

$$-\frac{i\hbar}{2} \ln \left[ \frac{K(z(t), \bar{z}(t))}{K(z(t_0), \bar{z}(t_0))} \right].$$

$$\mathcal{U}(z, \bar{z}|t, t_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{\epsilon}\right) \prod_{t_0 < \tau < t} d\mu(z(\tau), \bar{z}(\tau)),$$

$$\mathcal{S}_{\epsilon} = \mathcal{S} + \Delta\mathcal{S}(\epsilon)$$

## “Классические” уравнения движения

$$\mathcal{U}_{cl}(z, \bar{z}|t, t_0) = \tilde{\mathcal{U}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{cl}\right),$$

$$\dot{z}^\alpha = \{z^\alpha, \mathcal{H}\}, \quad \dot{\bar{z}}^\alpha = \{\bar{z}^\alpha, \mathcal{H}\}; \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

$$z(t_0) = z, \quad \bar{z}(t) = \bar{z}.$$

$$\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}(z, \bar{z}) = \frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha, \bar{\beta}} g^{\alpha\bar{\beta}} \left[ \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial z^\alpha} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{z}^\beta} - \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{z}^\beta} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial z^\alpha} \right]$$

# N-level atoms in Classical Fields. $G = \text{SU}(N)$

$$|z\rangle = \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{N-1} z^\alpha \bar{z}^\alpha\right)^{-p} \prod_{\beta=1}^{N-1} \exp(z^\beta \hat{E}_\beta) |0\rangle$$

$$z = (z^1, \dots, z^{n-1}) \in \text{SU}(n)/\text{U}(n-1) \approx \text{CP}^{n-1}$$

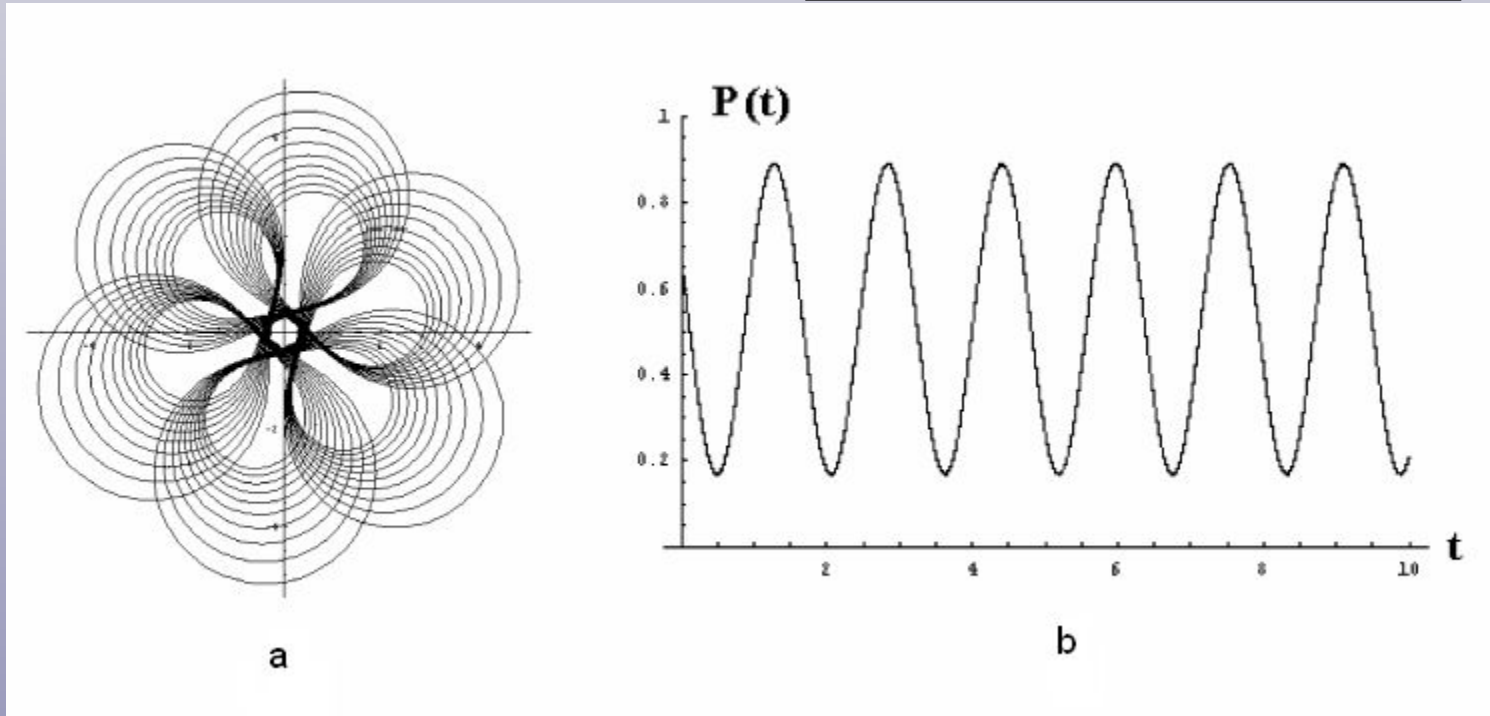
$$i\dot{z}^\alpha = H_{\alpha n}(t) + \sum_{\beta=0}^{n-1} [H_{\alpha\beta}(t) - H_{nn}(t)\delta_{\alpha\beta}] z^\beta - \sum_{\beta=0}^{n-1} H_{n\beta}(t) z^\alpha z^\beta$$

$$z^\alpha(t) = \frac{\sum_{\beta=1}^{n-1} \theta_{\alpha\beta}(t, t_0) z^\beta(t_0) + \theta_{n\alpha}(t, t_0)}{\sum_{\beta=1}^{n-1} \theta_{n\beta}(t, t_0) z^\beta(t_0) + \theta_{nn}(t, t_0)}.$$

# Двухуровневый атом, $G = \text{SU}(2)$

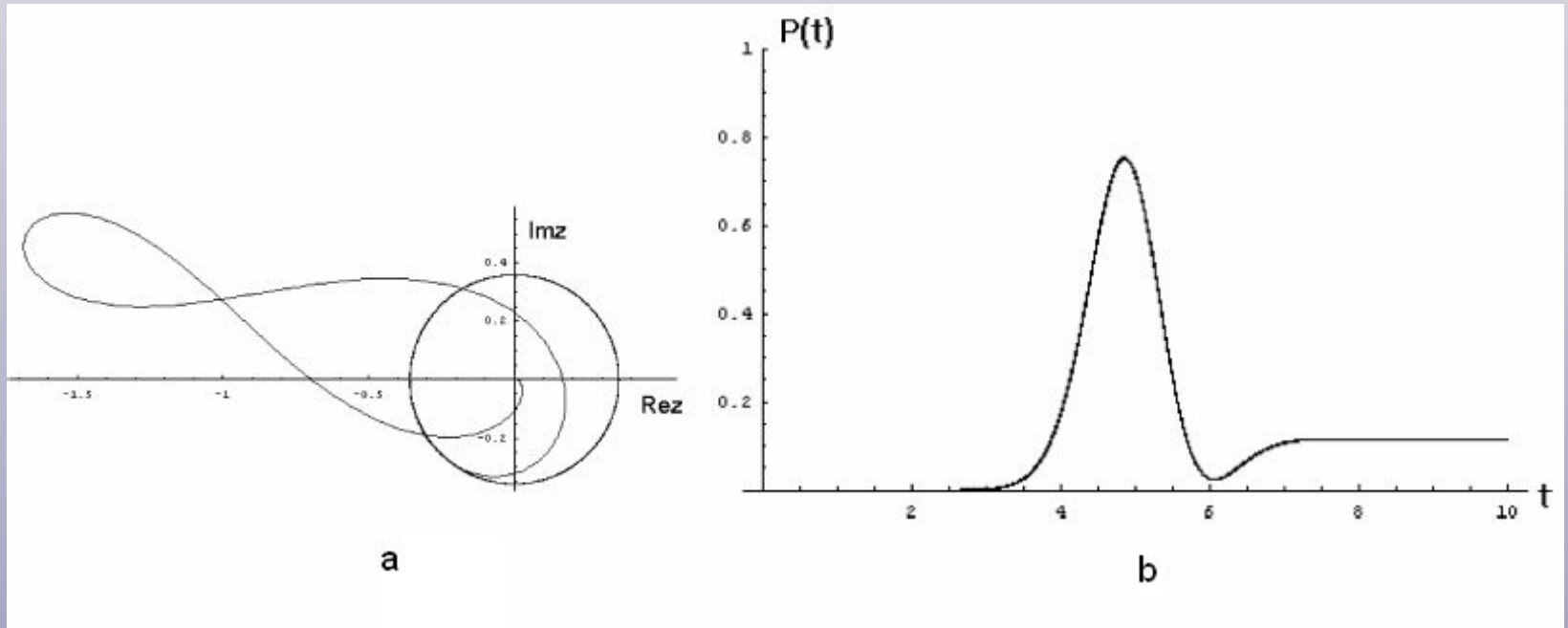
$$i\dot{z} = A(t) + \omega_0 z - \bar{A}(t) z^2,$$

$$P(t) = \frac{A^2 \sin^2 \Omega t}{(\omega - \omega_0)^2 + A^2}$$



Coherent state dynamics for two level atom. (a) – trajectory, (b) – Upper level probability  $P(t)$ . ( $z(0) = 1+i$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega = 2/3$ ,  $A = 2$ )

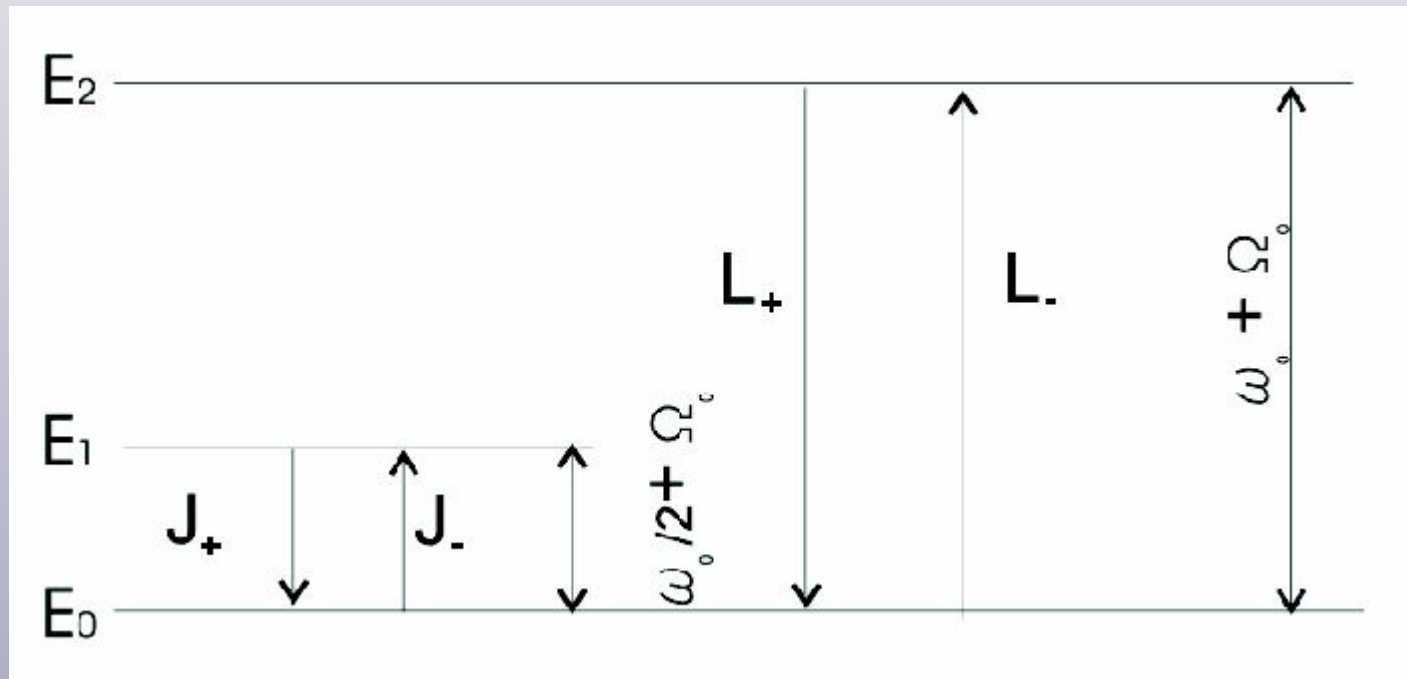
# Генерация атомных КС



$$A(t) = A \exp \left[ -i\omega t - (t - t_0)^2 / \tau^2 \right]$$

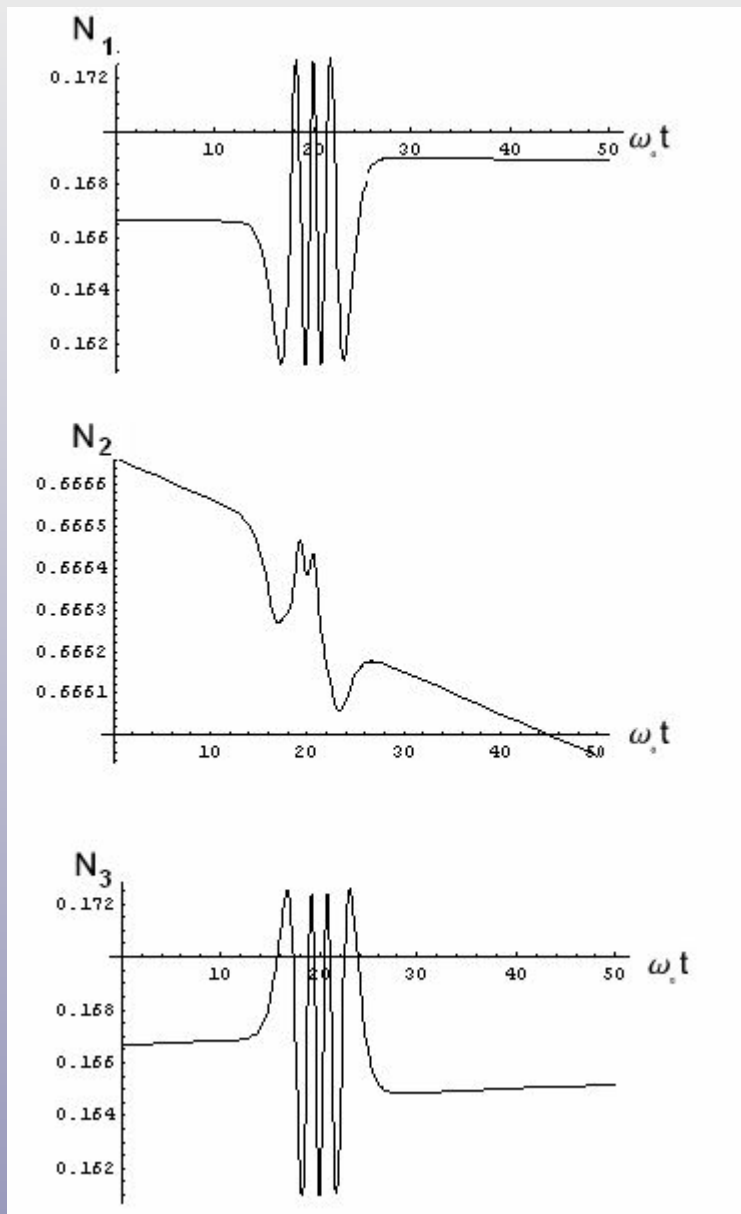
SU(2) CS generation for two – level atom: (a) – trajectory, (b) Upper level probability  $P(t)$ . ( $z(0) = 0$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega = 2$ ,  $A = 1.5$ ,  $t_0 = 5$ ,  $\tau = (3/5)^{1/2}$ )

# Трехуровневые атомы, $G = SU(3)$



$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} = \hbar\omega_0\hat{H}_1 + \hbar\Omega_0\hat{H}_2 + (A\hat{J}_+ + B\hat{K}_+ + D\hat{L}_+ + h.c.)$$

We have not here a pictures for CS generation!



$$A(t) = |\Omega_{12}| \exp \left[ -i\omega_1 t - \frac{(t - t_{01})^2}{\sigma_1^2} \right]$$

$$D(t) = |\Omega_{13}| \exp \left[ -i\omega_3 t - \frac{(t - t_{03})^2}{\sigma_3^2} \right]$$

**Case of V – atom transitions and dynamics of the level populations.**

$$\omega_0/2 + \Omega_0 = 0.8; \omega_0 + \Omega_0 = 1.3; \Omega_{12} = 0; \Omega_{13} = 2; \omega_1 = 0; \omega_3 = 1.3; \tau = 20; \sigma_3^2 = 10$$

# Динамический хаос в квантовых системах

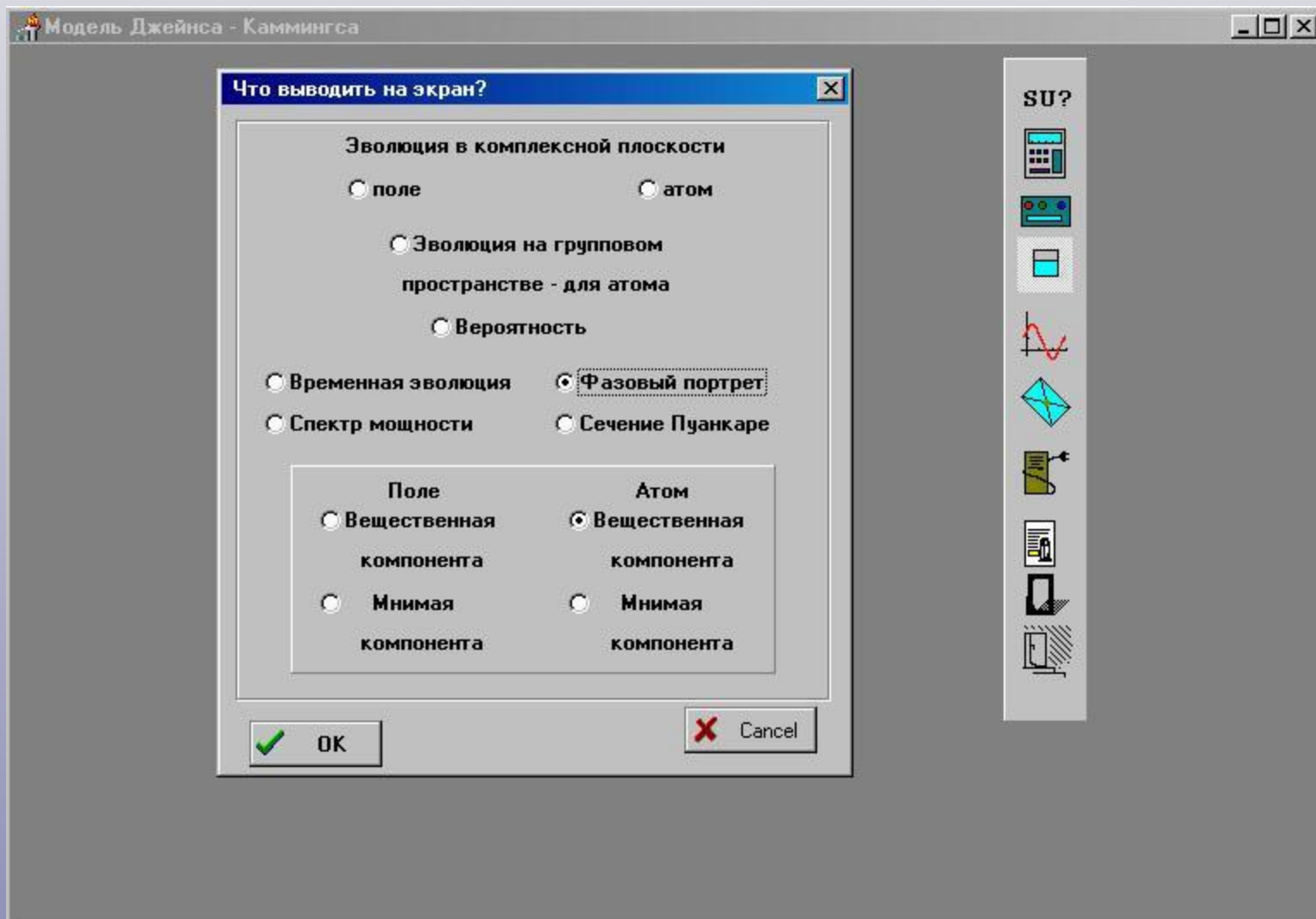
$$\hat{H} = \omega \hat{S}_Z + \nu \left( \hat{b}^+ \hat{b} + \frac{1}{2} \right) + \bar{g} (\hat{b}^+)^m \hat{S}_- + g (\hat{b})^m \hat{S}_+ + \\ + g (\hat{b}^+)^m \hat{S}_+ + \bar{g} (\hat{b})^m \hat{S}_- + k (\hat{b}^+ + \hat{b})^2$$

$$SU(2) \otimes W(1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} + i\nu\alpha + i2jgm(\alpha^*)^{m-1} \frac{\zeta}{1+\zeta\zeta^*} + i2j\lambda m(\alpha^*)^{m-1} \frac{\zeta^*}{1+\zeta\zeta^*} = 0 \\ \dot{\alpha}^* - i\nu\alpha^* - i2j\bar{g}m(\alpha)^{m-1} \frac{\zeta^*}{1+\zeta\zeta^*} - i2j\bar{\lambda}m(\alpha)^{m-1} \frac{\zeta}{1+\zeta\zeta^*} = 0 \\ \dot{\zeta} + i\omega\zeta + i\bar{g}(\alpha)^m + i\lambda(\alpha^*)^m - ig(\alpha^*)^m\zeta^2 - i\bar{\lambda}(\alpha)^m\zeta^2 = 0 \\ \dot{\zeta}^* - i\omega\zeta^* - ig(\alpha^*)^m - i\bar{\lambda}(\alpha)^m + i\bar{g}(\alpha)^m\zeta^{*2} + i\lambda(\alpha^*)^m\zeta^{*2} = 0 \end{array} \right.$$



# Компьютерный расчет (Delphi 3)



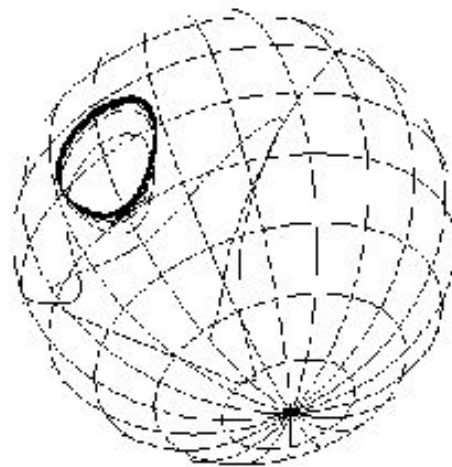
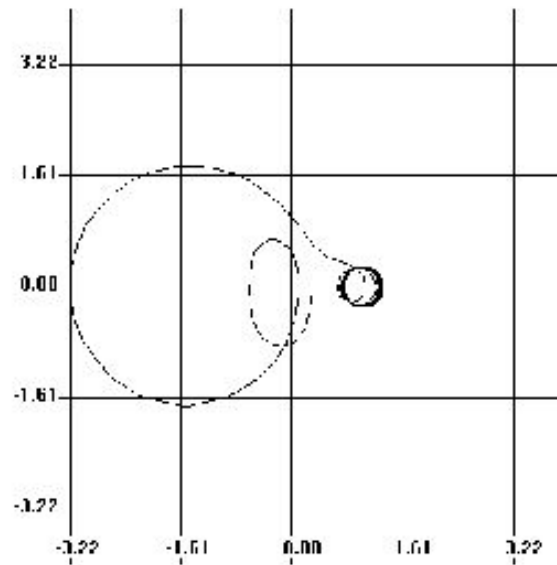


Рис. 3.10: Эволюция атомного когерентного состояния  $g = \lambda, 2\nu = \omega = 1, j = 1/2, g = 0.4, \alpha(0) = 1, \zeta(0) = 0.3$ , сверху - на комплексной плоскости, внизу - на сфере

## Операторные средние и квантовый хаос

$$\mathcal{H}(\alpha, \alpha^*; \zeta, \zeta^*; t) = \omega_0 J \frac{\zeta \zeta^* - 1}{1 + \zeta \zeta^*} + \omega(\alpha \alpha^* + 1/2) + \\ + \kappa(t)(\alpha + \alpha^*)^2 + 2J \frac{(g\alpha^{*m} + \tilde{g}\alpha^m) \zeta + (g\alpha^m + \tilde{g}\alpha^{*m}) \zeta^*}{1 + \zeta \zeta^*},$$

скобки Пуассона  $\{ , \}$  определены следующим образом:

$$\{ \mathcal{F}_1(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*), \mathcal{F}_2(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) \} = \frac{1}{i} \sum_{s,s'} \eta^{ss'}(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) \left( \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial z_s} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial z_{s'}^*} - \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial z_s} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial z_{s'}^*} \right).$$

Здесь

$$\eta_{ss'} = \frac{\partial^2 \ln K(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)}{\partial z_s \partial z_{s'}^*},$$

матрица  $(\eta^{ss'})$  является обратной матрице  $(\eta_{ss'})$ ; функция

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) = \langle CS | \hat{F} | CS \rangle$$

известна как  $Q$ -символ оператора  $\hat{F}$  см. Главу 1, а

$$K(\mathbf{z}, \mathbf{w}^*) = | \langle \mathbf{0} | \mathbf{z} \rangle |^{-2}, \quad | \mathbf{0} \rangle \equiv | \mathbf{0} \rangle \otimes | J, -J \rangle, \quad | \mathbf{z} \rangle \equiv | CS \rangle.$$

В нашем случае  $K(\alpha, \alpha^*; \zeta, \zeta^*) = \exp(\alpha \alpha^*) (1 + \zeta \zeta^*)^{2J}$ .

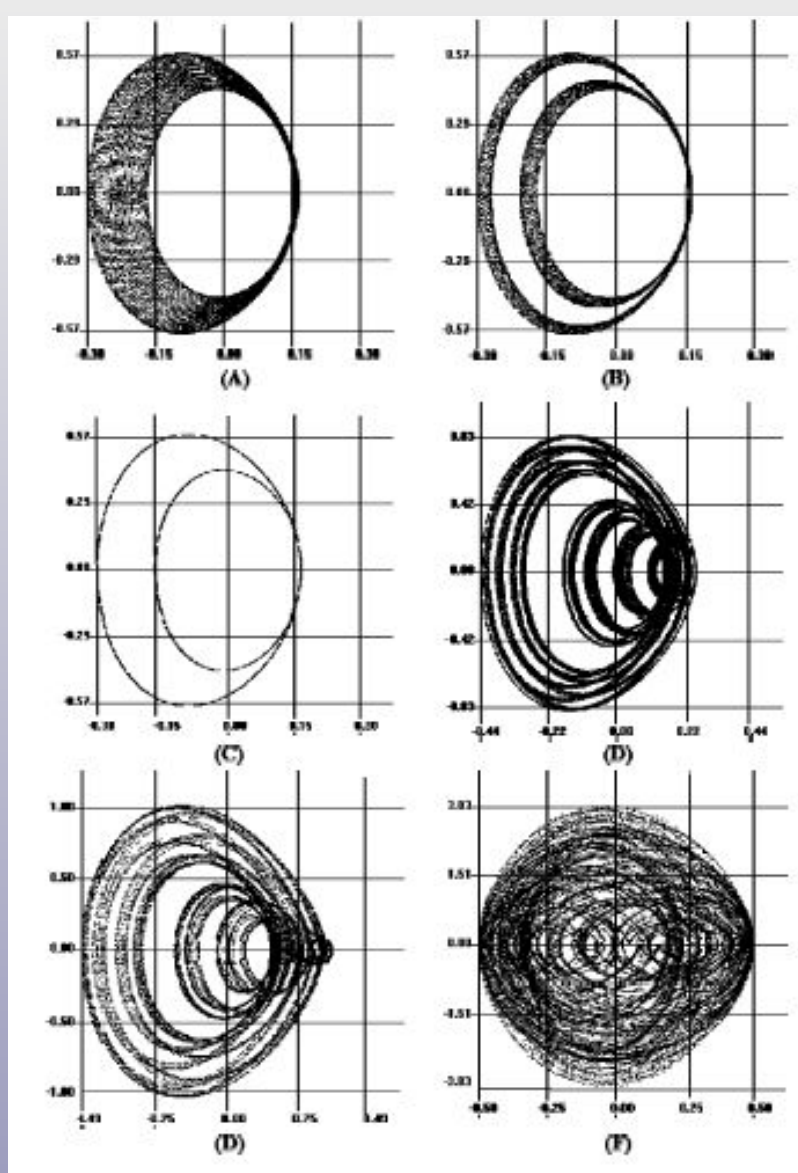


Рис. 5: Фазовые портреты для временной динамики полуразности населенностей двухуровневого атома с одноквантовыми переходами. Рождение циклов с ростом константы связи.  $\alpha(0) = 1$ ,  $\zeta(0) = 0.5$ ;  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega = 1.05$ ,  $\tilde{g} = g$ ; (A):  $g = 0.448$ ; (B):  $g = 0.4485$ ; (C):  $g = 0.449$ ; (D):  $g = 0.46$ ; (E):  $g = 0.471$ ; (F):  $g = 0.9$

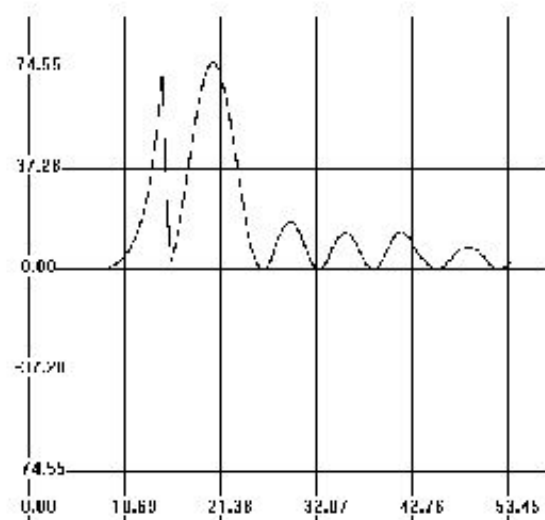
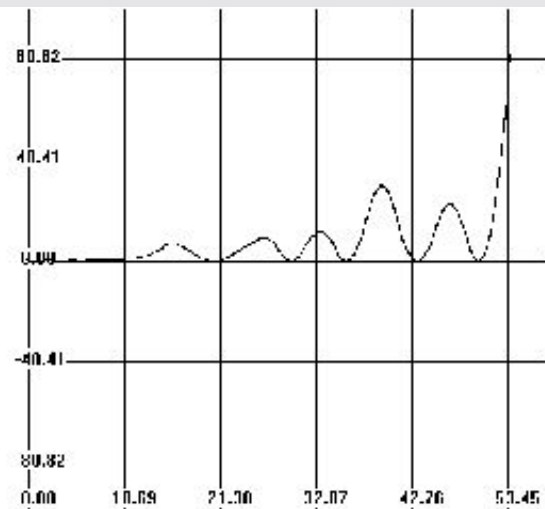


Рис. 3.28: Динамика квадратурных переменных ( $m = 2$ ). Параметрическое воздействие включается через  $\omega t_0 = 14.95$  на  $\delta(\omega t) = 1$ ,  $\gamma = 1, \Omega = 1, g = \lambda = 0.3, 2\nu = \omega = 1, j = 1/2, \alpha(0) = 1, \zeta(0) = 0.3$ , сверху -  $\Delta X_1^2$ , внизу -  $\Delta X_2^2$

# Обобщенная модель Дикке с затуханием, максимальный показатель Ляпунова и сжатие

$$\hat{H} = \hbar\omega_0\hat{R}_3 + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\kappa(\hat{R}_+ + \hat{R}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + \hbar s(\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger), \quad (1)$$

$$\hat{H} = \hbar\omega_0\hat{R}_3 + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\kappa(\hat{R}_+ + \hat{R}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + \hbar s(\hat{a}\hat{a}e^{2i\omega t} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger e^{-2i\omega t}) \quad (2)$$

$$[\hat{R}_3, \hat{R}_\pm] = \pm\hat{R}_\pm, \quad [\hat{R}_+, \hat{R}_-] = 2\hat{R}_3, \quad \hat{R}_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \hat{\tau}_\alpha^{(j)}$$

$$\langle \hat{R}_3 \rangle = Nz, \quad \langle \hat{R}_+ \rangle = \langle \hat{R}_- \rangle^* = N(x + iy),$$

$$\langle \hat{a} \rangle = \langle \hat{a}^\dagger \rangle = \frac{E + iG}{\sqrt{N}}.$$

$$\langle \hat{R}_\alpha(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \rangle \approx \langle \hat{R}_\alpha \rangle \langle \hat{a} + \hat{a}^\dagger \rangle$$

$$\begin{aligned} x' &= -y, \\ y' &= x + 2ez, \\ z' &= -2ey, \\ e' &= (\mu - \sigma)g, \\ g' &= -(\mu + \sigma)e + \beta^2x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= -y, \\ y' &= x + 2ez, \\ z' &= -2ey, \\ e' &= [\mu - \sigma \cos(2\mu\tau)]g - \sigma \sin(2\mu\tau)e, \\ g' &= -[\mu + \sigma \cos(2\mu\tau)]e + \sigma \sin(2\mu\tau)g + \beta^2x \end{aligned}$$

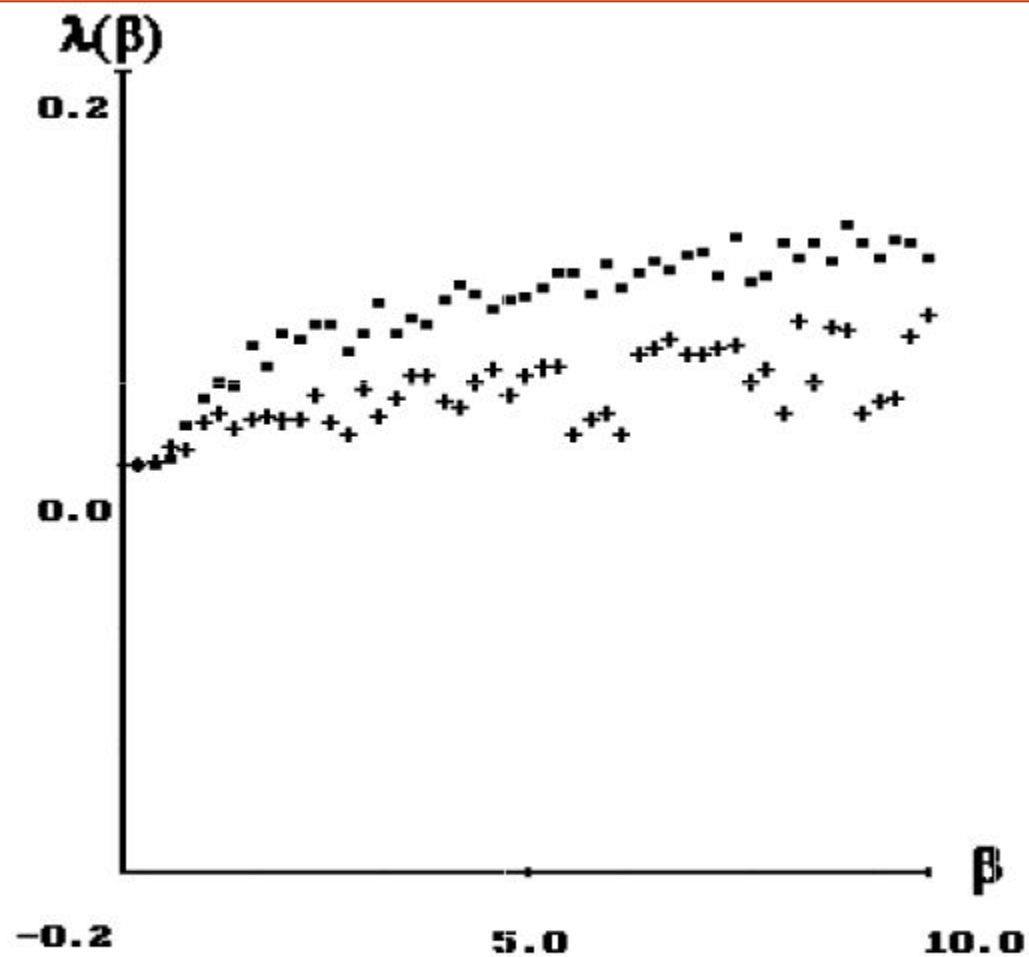
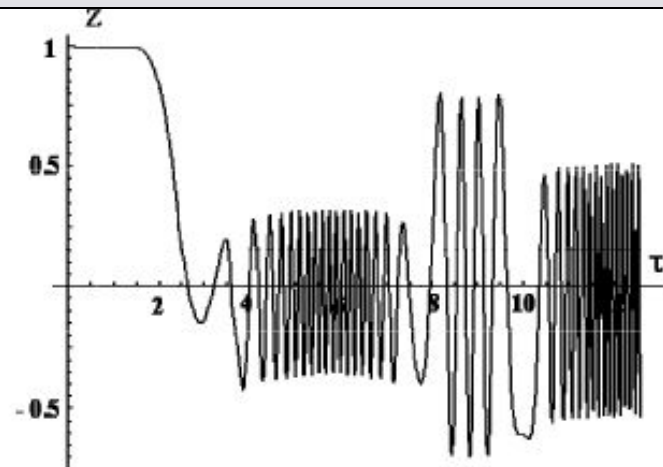
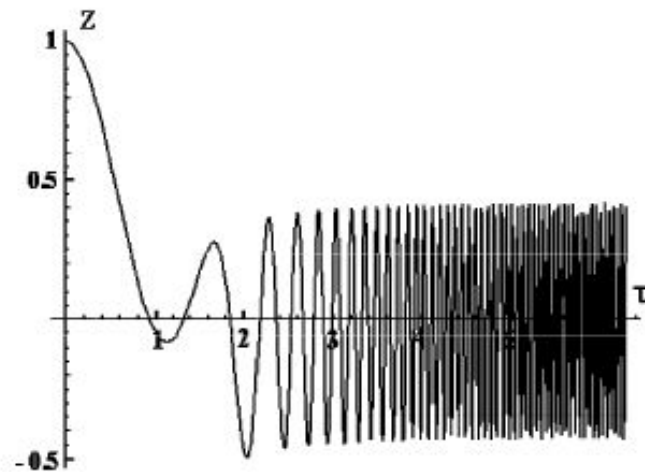


Рис. 3.31: Максимальный коэффициент Ляпунова  $\lambda(\beta)$   $\mu = 1$ ,  $x(0) = y(0) = 0$ ,  $z(0) = 1$ ,  $e(0) = h(0) = 1$ . "черные квадратики":  $\sigma = 0$ ; "кресты":  $\sigma = 0.9$



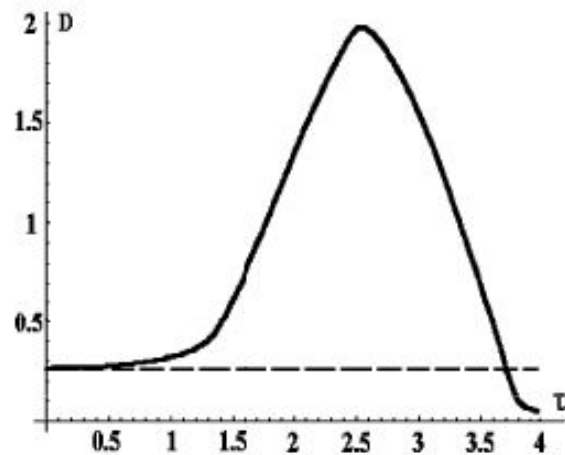
(A)



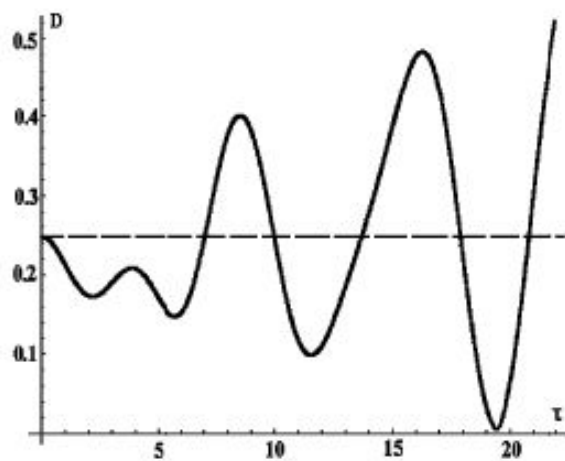
(B)

Рис. 3.32: Временные зависимости нормированной разности населенностей двухуровневых атомов для "одетой" модели Дикке.  $z(0) = 1, x(0) = y(0) = 0, e(0) = h(0) = 0$ ;  $\omega_0 = \omega, \beta = 1.0$ . (A):  $\sigma = 0.9$ ; (B):  $\sigma = 0.1$





(A)



(B)

Рис. 3.33: Временные зависимости степени сжатия фотонной моды  $D(\tau)$  для "одетой" модели Динже.  $z(0) = 1, x(0) = y(0) = 0, e(0) = h(0) = 0; \omega_b = \omega, \beta = 1.0$ . (A):  $\sigma = 0.9$ ; (B):  $\sigma = 0.1$  (Сжатые состояния соответствуют точки, расположенные ниже горизонтальной штриховой линии  $D = 1/4$ .)

# Когерентная релаксация квантовых систем с конечным числом уровней

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{H}_{int}$$

$$\hat{\mathcal{R}}(t) = \hat{\rho}_A(t) \otimes \hat{\rho}_B(0)$$

Кинетическое уравнение для редуцированной матрицы плотности  $\hat{\rho}(t) = \text{tr}_B[\hat{\mathcal{R}}(t)]$   $n$ -уровневого атома записывается в виде ( $\hbar = 1$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & \sum_{a=1}^M \frac{1}{2} \gamma_a [ (\mathcal{N}_a + 1) (2 \hat{E}_a^- \hat{\rho} \hat{E}_a^+ - \hat{E}_a^+ \hat{E}_a^- \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{E}_a^+ \hat{E}_a^-) + \\ & + \mathcal{N}_a (2 \hat{E}_a^+ \hat{\rho} \hat{E}_a^- - \hat{E}_a^- \hat{E}_a^+ \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{E}_a^- \hat{E}_a^+) - \\ & - \mathcal{S}_a (2 \hat{E}_a^+ \hat{\rho} \hat{E}_a^+ - \hat{E}_a^+ \hat{E}_a^+ \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{E}_a^+ \hat{E}_a^+) - \\ & - \bar{\mathcal{S}}_a (2 \hat{E}_a^- \hat{\rho} \hat{E}_a^- - \hat{E}_a^- \hat{E}_a^- \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{E}_a^- \hat{E}_a^-) ]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

В этом уравнении  $\hat{E}_a^\pm$  обозначают операторы переходов между энергетическими уровнями атома и, вместе с тем, лестничные генераторы  $n$ -мерного фундаментального представления группы  $SU(n)$ , индекс "а" находится в соответствии с нумерацией базисных элементов алгебры  $SU(n)$ ,  $M \leq n(n-1)/2$  число разрешенных переходов в атоме,  $\gamma_a$  — константа затухания для перехода типа "а",  $\mathcal{N}_a$  среднее число фотонов в термостате и  $\mathcal{S}_a$  — комплексный параметр сжатия в фотонной моде с частотой перехода типа "а".

Используем далее для редуцированной матрицы плотности диагональное представление по КС группы  $SU(n)$

$$\hat{\rho}(t) = \int_{\mathcal{X}} d\mu(z, \bar{z}) \mathcal{P}(z, \bar{z}, t) |z\rangle\langle z|, \quad (4.4)$$

где  $\mathcal{X} = SU(n)/G_0$  фактор-пространство группы  $SU(n)$  с инвариантной мерой  $d\mu$ ,  $G_0 \subset SU(n)$ . Подгруппа  $G_0$  определяется выбором стандартного вектора  $|\psi_0\rangle$  в определении КС на группе Ли (простейший выбор  $|\psi_0\rangle$ , как состояния с наименьшей энергией изолированного  $n$ -уровневого атома, приводит к  $G_0 = U(n-1) \subset SU(n)$ ).

Используя явное действие операторов  $E_a^\pm$  на проекторы  $|z\rangle\langle z|$ , приведем (5.3) к уравнению вида Фоккера - Планка для функции  $\mathcal{P}(z, \bar{z}, t)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}(z, \bar{z}, t) = \hat{\mathbf{L}} \mathcal{P}(z, \bar{z}, t), \quad (4.5)$$

где оператор  $\hat{\mathbf{L}}$  является линейным дифференциальным оператором в частных производных второго порядка, зависящим от представления группы  $SU(n)$ . (Ниже будут рассмотрены частные случаи уравнения (4.5), имеющие место для  $(2J+1)$ -мерных представлений группы ( $SU(2)$  и атомных систем с динамической симметрией полносимметричных представлений  $D(N, 0)$  группы  $SU(3)$ ,  $N = 1, 2, \dots$ ).

$$\mathcal{P}(z, \bar{z}; t) = \int_{\mathcal{X}} d\mu(z', \bar{z}') \mathcal{K}(z, \bar{z}; t | z', \bar{z}'; t_0) \mathcal{P}_0(z', \bar{z}'; t_0), \quad (4.6)$$

где  $\mathcal{P}_0$  представляет собой  $P$ - символ начальной матрицы плотности  $\rho_A(t_0)$ ;  $\mathcal{K}$  — является функцией Грина (пропагатором) уравнения Фоккера - Планка;  $z = (z_1, \dots, z_r)$ ,  $r$  — (комплексная) размерность пространства  $\mathcal{X}$ .

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{K}(z, \bar{z}; t | z', \bar{z}'; 0) = \delta(z, \bar{z}; z', \bar{z}'), \quad (4.7)$$

здесь  $\delta$ -функция определена в пространстве функций на однородном многообразии  $SU(n)/G_0$ .

$$\langle \hat{A}(t) \rangle = \int \langle z | \hat{A}^0(t) | z \rangle \mathcal{P}(z, \bar{z}; t) d\mu(z, \bar{z}).$$

$$\begin{aligned} & \langle \hat{A}(t) \hat{B}(0) \rangle = \\ & = \int \int \langle z | \hat{A}^0 | z \rangle \mathcal{K}(z, \bar{z}; t | z', \bar{z}'; 0) \mathcal{P}_{\hat{B} \cdot \hat{\rho}(0)}(z', \bar{z}'; 0) d\mu(z, \bar{z}) d\mu(z', \bar{z}'), \end{aligned} \quad (4.9)$$

здесь  $\hat{A}^0(t) = \hat{U}_0^{-1}(t) \hat{A} \hat{U}_0(t)$ ,  $\hat{U}_0(t)$  — оператор эволюции свободной атомной подсистемы,  $\mathcal{P}_{\hat{B} \cdot \hat{\rho}(t)}$  обозначает  $P$ - символ произведения операторов  $\hat{B} \cdot \hat{\rho}(0)$  в начальный момент времени  $t = 0$ .

$$g_a(\omega) \sim \text{Re} \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} \langle \hat{E}_a^+(t) \hat{E}_a^-(0) \rangle dt.$$

Контур линии при релаксации в термостате со сжатыми флуктуациями:

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\frac{\Gamma}{2} + \gamma|\mathcal{S}|}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} + \gamma|\mathcal{S}|\right)^2} + \frac{\frac{\Gamma}{2} - \gamma|\mathcal{S}|}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} - \gamma|\mathcal{S}|\right)^2} \right].$$

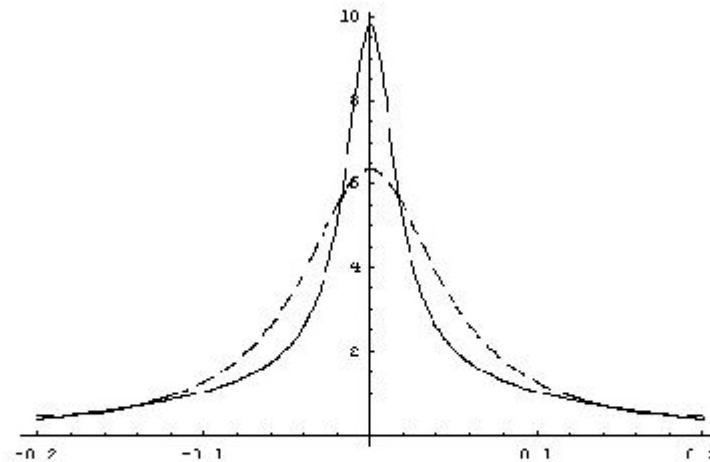


Рис. 4.1: Контур линии излучения двухуровневой системы в сжатом термостате.  $\gamma/\omega_0 = 0.01, \langle \nu \rangle = 5, r = 0.3$  (для верхнего рисунка);  $\gamma/\omega_0 = 0.01, \langle \nu \rangle = 5, r = 0.5$  (для нижнего рисунка). Пунктирная линия соответствует контуру излучения двухуровневой системы в обычном термостате при тех же условиях. По оси абсцисс отложена безразмерная частота  $(\omega/\omega_0 - 1)$ .

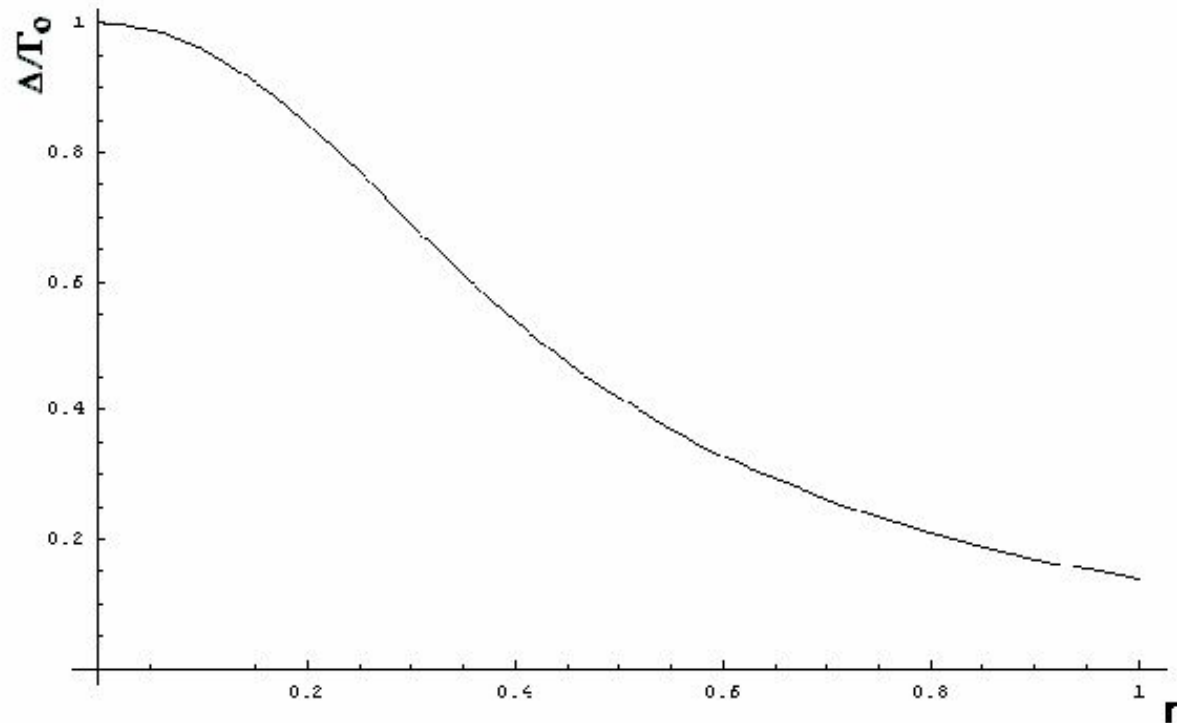


Рис. 4.2: Отношение ширины линии  $\Delta$  двухуровневого атома при релаксации в "сжатом" термостате к ширине линии в обычном термостате  $\Gamma_0$  в зависимости от параметра сжатия  $r$ .



# Трехуровневые атомы

$$f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2|t) \equiv \frac{\mathcal{P}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2|t)}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^3}$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = \hat{L}f \equiv & \quad (4.57) \\ \equiv & \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1} \left[ \frac{\gamma_1}{2} \left( \mu \frac{z_1 z_2 \bar{z}_2}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} + (\mathcal{N}_1 + 1) z_1 z_2 \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \bar{z}_2^2 + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \bar{z}_1 \bar{z}_2 \right) \right. \right. \right. \\ & + \mathcal{N}_1 z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \left. \left. \left. + \frac{\gamma_2}{2} \left( \mu \frac{z_1 z_2 \bar{z}_2}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} - (\mathcal{N}_2 + 1) z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \mathcal{N}_2 z_2 \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right) \right) \right. \right. \\ & + \frac{\gamma_3}{2} \left( \mu \frac{z_1 (1 + z_1 \bar{z}_1)}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} + (\mathcal{N}_3 + 1) z_1^2 \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \bar{z}_1^2 + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \bar{z}_1 \bar{z}_2 \right) + \right. \\ & \left. \left. + (\mathcal{N}_3 + 1) \left( \frac{\partial}{\partial z_1} z_1^2 + \frac{\partial}{\partial z_2} z_1 z_2 \right) + \mathcal{N}_3 \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z_2} \left[ \frac{\gamma_1}{2} \left( \mu \frac{z_2 (1 + z_2 \bar{z}_2)}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} + (\mathcal{N}_1 + 1) z_2^2 \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \bar{z}_2^2 + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \bar{z}_1 \bar{z}_2 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\mathcal{N}_1 + 1) \left( \frac{\partial}{\partial z_2} z_2^2 + \frac{\partial}{\partial z_1} z_1 z_2 \right) + \mathcal{N}_1 \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} + z_2^2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \right) \right] + \\ & + \frac{\gamma_2}{2} \left( (\mathcal{N}_2 + 1) z_1 \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} - \mathcal{N}_2 z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} - \mu \frac{z_1 \bar{z}_1 z_2}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} \right) + \\ & \left. + \frac{\gamma_3}{2} \left( \mu \frac{z_1 \bar{z}_1 z_2}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} + (\mathcal{N}_3 + 1) z_1 z_2 \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \bar{z}_1^2 + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \bar{z}_1 \bar{z}_2 \right) + \mathcal{N}_3 z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \right] + \\ & \quad \left. + \text{к.с.} \right\} f. \end{aligned}$$

$$f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2 | t) = \sum_{n=0}^{\mu} \sum_{|m_1+m_2| \leq n} F_{nm_1m_2}(t) \frac{Y_{nm_1m_2}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{(1 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)^3}. \quad (4.58)$$

Сферические функции  $Y_{nm_1m_2}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$  на однородном пространстве  $SU(3)/U(2) \approx CP_2$  должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} -\nabla^2 Y_{nm_1m_2} = n(n+2)Y_{nm_1m_2}, \\ \hat{M}_1 Y_{nm_1m_2} = m_1 Y_{nm_1m_2}, \\ \hat{M}_2 Y_{nm_1m_2} = m_2 Y_{nm_1m_2}, \end{cases}, \quad (4.59)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= (1 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2) \times \\ &\times \left[ (1 + z_1\bar{z}_1) \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + z_1\bar{z}_2 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_2} + \bar{z}_1 z_2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_1 \partial z_2} + (1 + z_2\bar{z}_2) \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} \right] \end{aligned}$$

— инвариантный оператор Лапласа-Бельтрами,

$$\hat{M}_1 = \frac{1}{2} \left( z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right) \quad \hat{M}_2 = \frac{1}{2} \left( z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \right).$$

Условие нормировки для сферических функций имеет вид

$$\int Y_{nm_1m_2} \bar{Y}_{n'm'_1m'_2} \frac{dRe z_1 dIm z_1 dRe z_2 dIm z_2}{(1 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)^3} = \delta_{nn'} \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}.$$



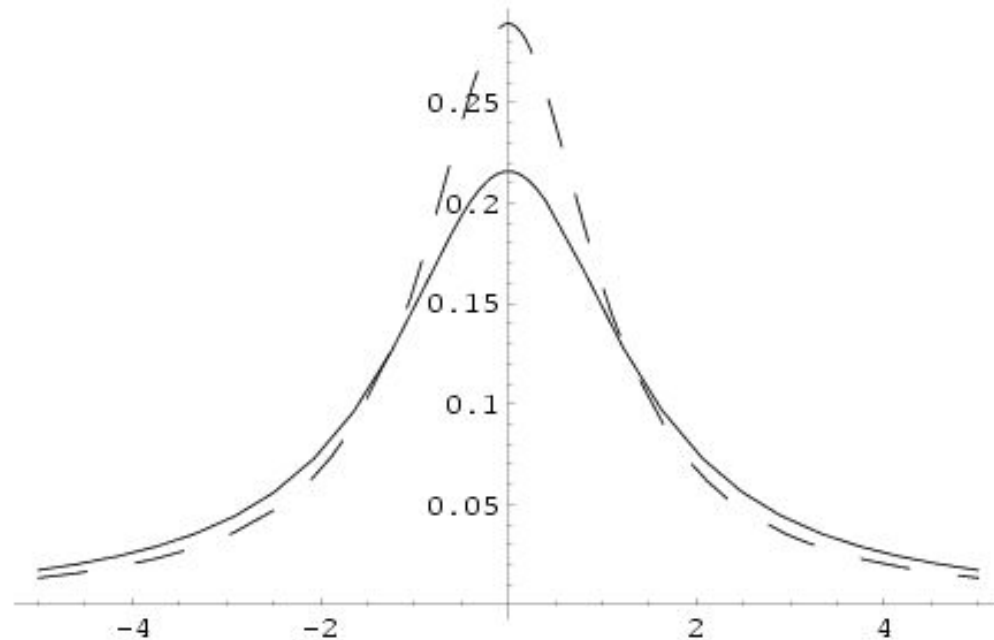


Рис. 4.3: Контур линии излучения спонтанной релаксации трехуровневого V- атома на переходе  $1 \leftrightarrow 2$ .  $\gamma_1/(\frac{\omega_0}{2} + \Omega_0) = 0.1$ ,  $\gamma_3/(\frac{\omega_0}{2} + \Omega_0) = 0.5$ ,  $\mathcal{N}_1 = 1$ ,  $\mathcal{N}_3 = 1.5$ . Пунктирной линии соответствует контур линии двухуровневого атома при тех же условиях.

# Two level system in external stochastic fields and Fokker – Planck Equation (FPE) Approach

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{H}_{AB} + \hat{H}_{st} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} + \hat{H}_{st}$$

$$\hat{H}_{st} = \hbar \Omega(t) \hat{J}_3 + \hbar \left( \xi(t) \hat{J}_+ + \bar{\xi}(t) \hat{J}_- \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{V}_{st}(t), \hat{\rho} \right] + \\ & + \frac{\gamma}{2} \left[ (\langle \nu \rangle + 1) (2 \hat{J}_- \hat{\rho} \hat{J}_+ - \hat{J}_+ \hat{J}_- \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{J}_+ \hat{J}_-) + \right. \\ & \left. + \langle \nu \rangle (2 \hat{J}_+ \hat{\rho} \hat{J}_- - \hat{J}_- \hat{J}_+ \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{J}_- \hat{J}_+) \right] \end{aligned}$$

$$\hat{V}_{st}(t) == \left\{ \Omega(t) \hat{J}_0 + \xi(t) e^{i\omega_0 t} \hat{J}_+ + \bar{\xi}(t) e^{-i\omega_0 t} \hat{J}_- \right\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} = & i \left[ \Omega(t) \left( \frac{\partial}{\partial z} z - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} \right) + \xi(t) e^{i\omega_0 t} \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z}^2 \right) - \bar{\xi}(t) e^{-i\omega_0 t} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial z} z^2 \right) \right] f + \\
& + \eta \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( 2jz + \frac{\partial}{\partial z} z^2 + z^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( 2j\bar{z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z}^2 + \bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial z} z^2 \right) \right] f + \quad (5.4) \\
& + \delta \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + z^2 \frac{\partial}{\partial z} - 2jz \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - 2j\bar{z} \right) \right] f.
\end{aligned}$$

$$f(z, \bar{z}; t) = \frac{\mathcal{P}(z, \bar{z}; t)}{(1 + z\bar{z})^2}$$

# **FPE - Propagator for Atom in Stochastic Field**

- ★ Weak Field. Perturbation theory
- ★ White noise
- ★ Kubo - Andersen processes
- ★ Markov's dichotomic processes
- ★ "Exact Soluble" Model

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & \frac{\gamma}{2} \left[ (\langle \nu \rangle + 1) (2 \hat{J}_- \hat{\rho} \hat{J}_+ - \hat{J}_+ \hat{J}_- \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{J}_+ \hat{J}_-) + \right. \\
& \left. + \langle \nu \rangle (2 \hat{J}_+ \hat{\rho} \hat{J}_- - \hat{J}_- \hat{J}_+ \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{J}_- \hat{J}_+) \right] \\
& + K_{\Omega}(t) (2 \hat{J}_3 \hat{\rho} \hat{J}_3 - \hat{J}_3^2 \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{J}_3^2) \\
& + K_{\xi}(t) (\hat{J}_+ \hat{\rho} \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{\rho} \hat{J}_+ - \hat{\rho} \hat{J}_- \hat{J}_+ - \hat{J}_+ \hat{J}_- \hat{\rho}) \\
& + \bar{K}_{\xi}(t) (\hat{J}_+ \hat{\rho} \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{\rho} \hat{J}_+ - \hat{\rho} \hat{J}_+ \hat{J}_- - \hat{J}_- \hat{J}_+ \hat{\rho}),
\end{aligned}$$

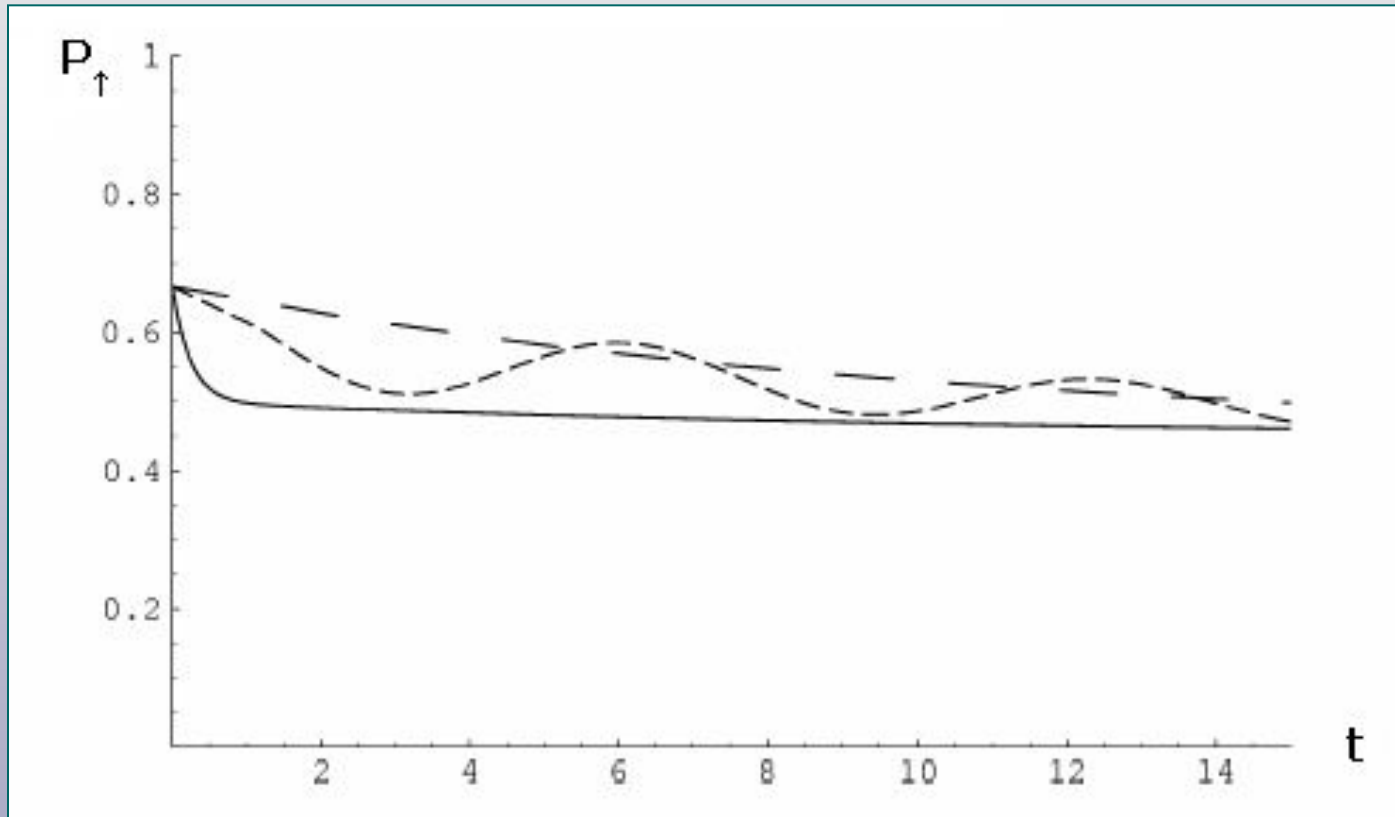
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} = & \eta \left[ \frac{\partial}{\partial z} (2 j z + \frac{\partial}{\partial z} z^2 + z^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z}^2) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (2 j \bar{z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z}^2 + \bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial z} z^2) \right] f + \\
& + \delta \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + z^2 \frac{\partial}{\partial z} - 2 j z) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - 2 j \bar{z}) \right] f + \\
& + K_{\Omega}(t) \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z \bar{z} - z \frac{\partial}{\partial z} z \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial}{\partial z} z \bar{z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} \right) \right] f + \\
& + \left\{ K_{\xi}(t) \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} z^2 z + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z^2 \bar{z}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z^2 \bar{z}^2 \right) \right] + c.c. \right\} f
\end{aligned}$$

$$K_{\Omega}(t) = \int_0^t \Omega(t) \Omega(t_1) dt_1, \quad K_{\xi}(t) = \int_0^t \xi(t) \bar{\xi}(t_1) e^{-\omega_0(t_1-t)} dt_1$$

$$f(z, \bar{z}; t) = \sum_{l=0}^{2j} \sum_{m=-l}^l F_{lm}(t) Y_{lm}(z, \bar{z})$$

$$\begin{cases} \dot{F}_{00}(t) = 0, \\ \dot{F}_{1-1}(t) = -(\eta + \delta + K_{\Omega}(t) + 2\bar{K}_{\xi}(t)) F_{1-1}(t), \\ \dot{F}_{11}(t) = -(\eta + \delta + K_{\Omega}(t) + 2K_{\xi}(t)) F_{11}(t), \\ \dot{F}_{10}(t) = 2\sqrt{3}(\eta - \delta) F_{00}(t) - 2(\eta + \delta + \bar{K}_{\xi}(t) + K_{\xi}(t)) F_{10}(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(z, \bar{z}; t | z_0, \bar{z}_0; 0) = & \\ & = \frac{1}{\pi} + \frac{3}{\pi} \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{\eta - \delta}{\eta + \delta} \left(1 - e^{-2(\eta + \delta)t}\right) + \frac{3}{\pi} \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{1 - z_0\bar{z}_0}{1 + z_0\bar{z}_0} \times \\ & \times \exp \left[ -2(\eta + \delta)t - 2 \int_0^t \int_0^{t_1} \left( \xi(t_1)\bar{\xi}(t_2)e^{i\omega_0(t_1-t_2)} + \bar{\xi}(t_1)\xi(t_2)e^{-i\omega_0(t_1-t_2)} \right) dt_1 dt_2 \right] + \\ & \quad + \frac{6}{\pi} \frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{z_0}{1 + z_0\bar{z}_0} \times \\ & \times \exp \left[ -(\eta + \delta)t - \int_0^t \int_0^{t_1} \left( \Omega(t_1)\Omega(t_2) + 2\xi(t_1)\bar{\xi}(t_2)e^{i\omega_0(t_1-t_2)} \right) dt_1 dt_2 \right] + \\ & \quad + \frac{6}{\pi} \frac{z}{1 + z\bar{z}} \frac{\bar{z}_0}{1 + z_0\bar{z}_0} \times \\ & \times \exp \left[ -(\eta + \delta)t - \int_0^t \int_0^{t_1} \left( \Omega(t_1)\Omega(t_2) + 2\bar{\xi}(t_1)\xi(t_2)e^{-i\omega_0(t_1-t_2)} \right) dt_1 dt_2 \right] \end{aligned}$$



Probability to find atom in the upper level  $P_{\uparrow}$  for Kubo – Andersen processes

$$|z_0|^2 = 2, \sigma_{\Omega} = 0.01, \nu_1/\omega_0 = 0.012, \gamma/\omega_0 = 0.01, \langle \nu \rangle = 5, \sigma_{\xi} = 0.1, \nu_2/\omega_0 = 0.005.$$

- Exact soluble model
- Perturbation theory
- · - · - Relaxation without stochastic field

# Longitudinal $T_1$ and transverse $T_2$ relaxation times

$$T_1 = \frac{1}{2 \left( \eta + \delta + 2 \frac{\sigma_\xi^2}{\nu_2 + \frac{\omega_D^2}{\nu_2}} \right)}$$

$$T_2 = \frac{1}{\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_1} + 2 \frac{\sigma_\xi^2}{\nu_2 + \frac{\omega_D^2}{\nu_2}}}$$

White  
noise

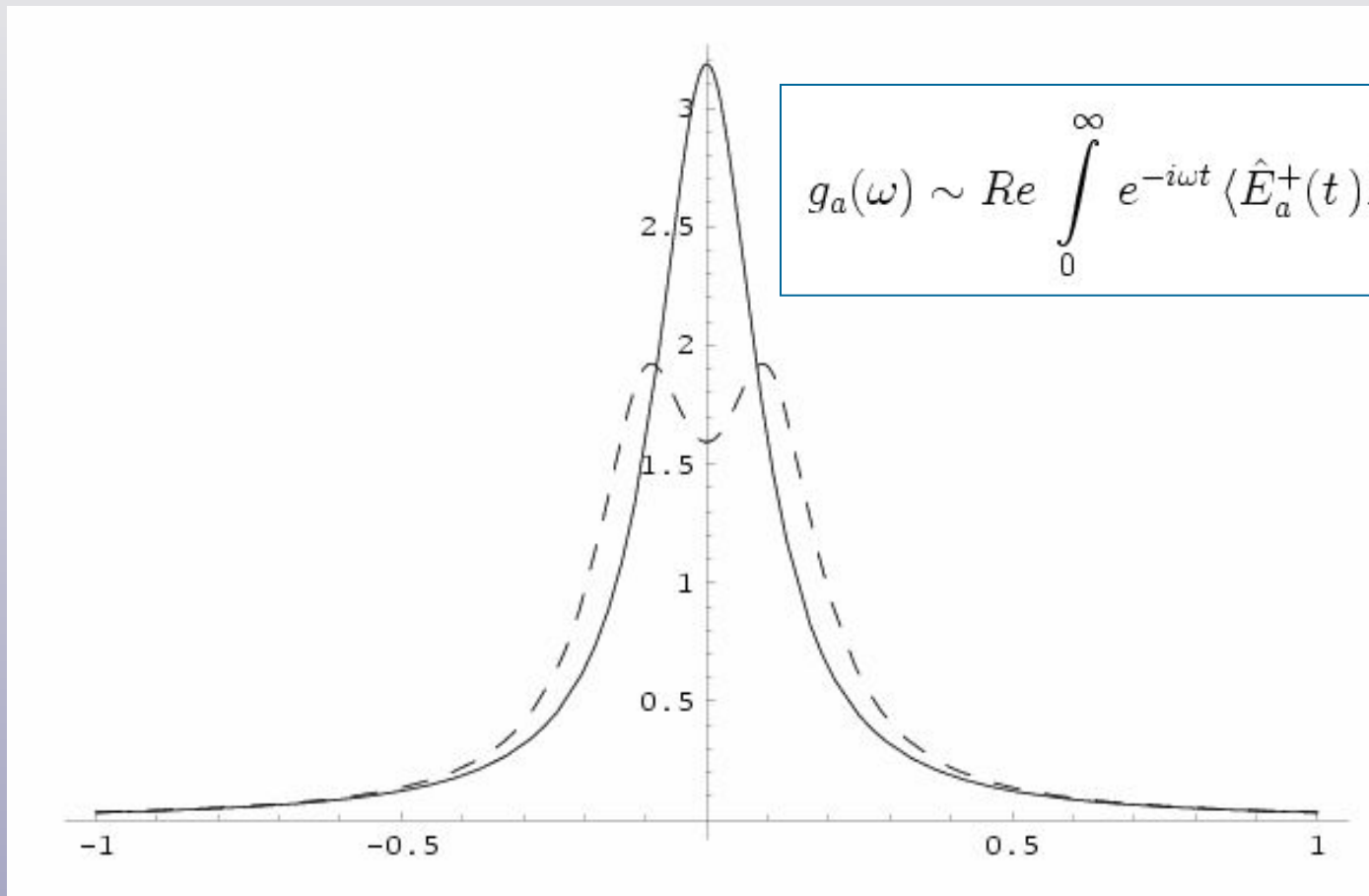


$$T_1 = \frac{1}{2 \left( \eta + \delta \right)}$$

$$T_2 = \frac{1}{\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_1}}$$

$$\frac{1}{2T_1} + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_1} = \frac{1}{T_2}$$





### Radiation Line Contour for Dichotomic Process

$$\sigma_{\Omega} = 0.01, \nu_1/\omega_0 = 0.01, \gamma/\omega_0 = 0.01, \langle \nu \rangle = 10, \sigma_{\xi} = 0.5, \nu_2/\omega_0 = 0.005$$

———— (strong field)

———— Line contour without stochastic field

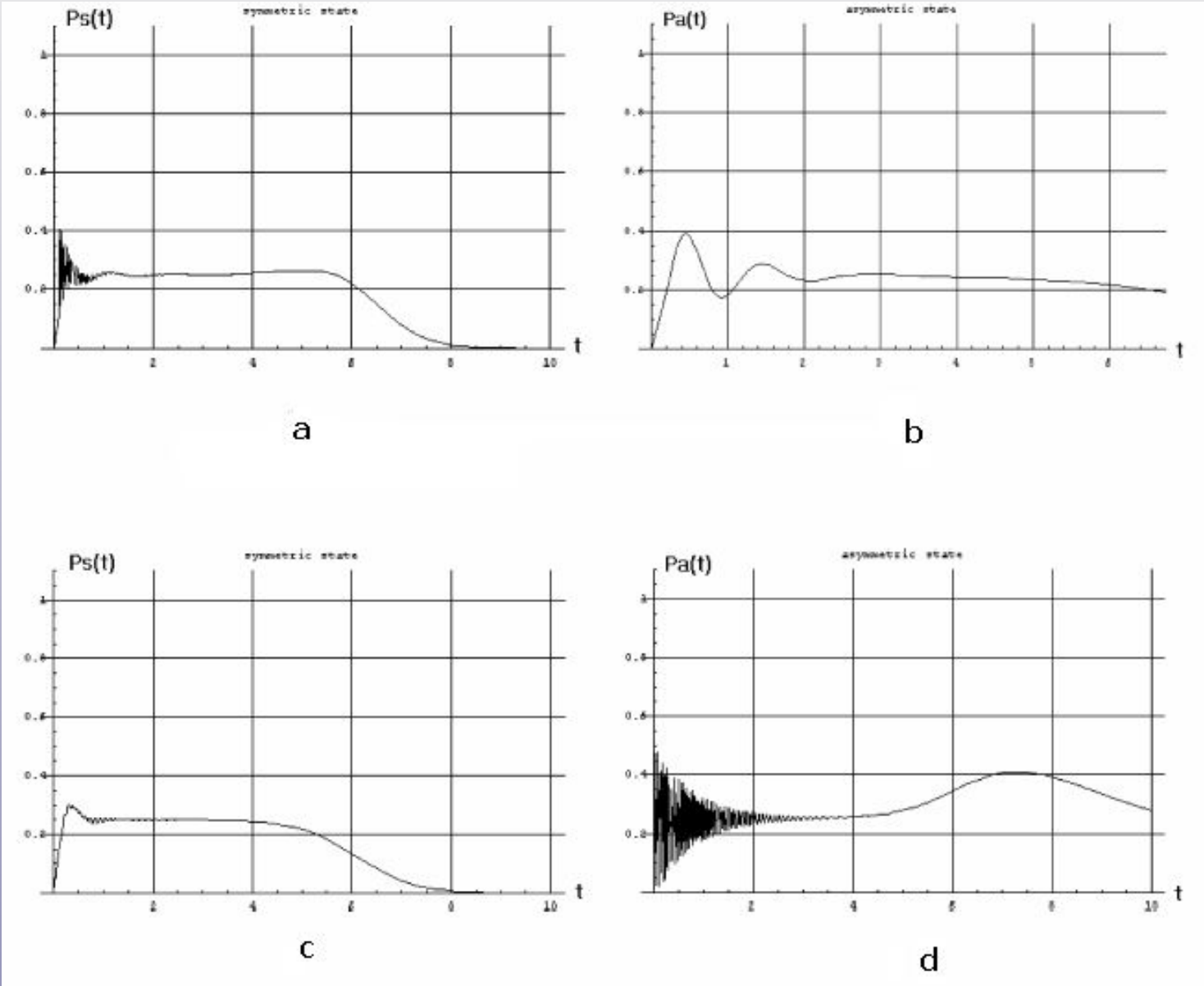
# Dipole – dipole interacting atoms

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -\frac{i}{\hbar} [V_I(t), \rho] - \\ & - \sum_{i,k=1}^2 \gamma_{ik} (1 + \langle n \rangle) \left( J_+^{(i)} J_-^{(k)} \rho + \rho J_+^{(i)} J_-^{(k)} - 2 J_-^{(k)} \rho J_+^{(i)} \right) - \\ & - \sum_{i,k=1}^2 \gamma_{ik} \langle n \rangle \left( J_-^{(i)} J_+^{(k)} \rho + \rho J_-^{(i)} J_+^{(k)} - 2 J_+^{(k)} \rho J_-^{(i)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_I(t) = & -\frac{\hbar g^{(12)}}{2} \left( J_+^{(1)} J_-^{(2)} + J_-^{(1)} J_+^{(2)} \right) - \\ & - \frac{\hbar}{2} \left\{ \left( \Omega_1 J_+^{(1)} + \Omega_2 J_+^{(2)} \right) \exp(i\Delta\omega t) + h.c. \right\} \end{aligned}$$

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_1 |2\rangle_2 + |2\rangle_1 |1\rangle_2)$$

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_1 |2\rangle_2 - |2\rangle_1 |1\rangle_2)$$



**Time Dependence of symmetric and antisymmetric states Probabilities generation**  
 a, b -  $\cos(KL) = 1$ , c, d -  $\cos(KL) = -1$

# Перспективы метода теории групп и когерентных состояний

- Бесконечномерные обертывающие алгебры
- Супералгебры и супергруппы
- Атомные конденсаты
- Квантовая теория информации
- Квантовая инженерия
- Квантовая томография
- Квантовые игры
- ??? !!! ...

**Спасибо за  
внимание!**

