Самарский государственный университет

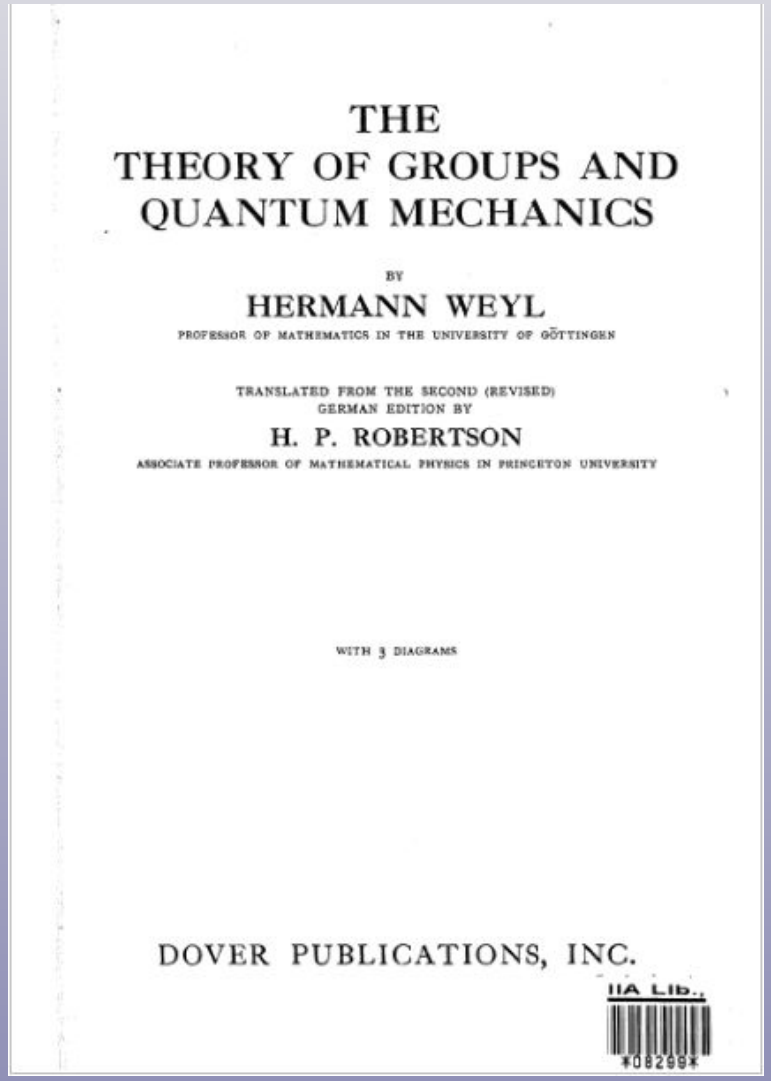
Теория групп и квантовая физика XX век

А.В. Горохов
СамГУ
gorokhov@ssu.samara.ru

Принципы симметрии и теория групп

“Доисторические времена” (1927-1962):
элементарные частицы, атомы, молекулы, кристаллы (классификация состояний, правила отбора, “скрытая” симметрия атома водорода, группы Лоренца, Пуанкаре и классификация частиц)

E. Wigner


THE
THEORY OF GROUPS AND
QUANTUM MECHANICS

BY

HERMANN WEYL

PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE UNIVERSITY OF GÖTTINGEN

TRANSLATED FROM THE SECOND (REVISED)
GERMAN EDITION BY

H. P. ROBERTSON

ASSOCIATE PROFESSOR OF MATHEMATICAL PHYSICS IN PRINCETON UNIVERSITY

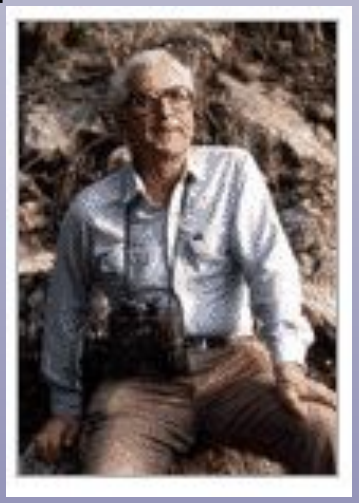
WITH 3 DIAGRAMS

DOVER PUBLICATIONS, INC.

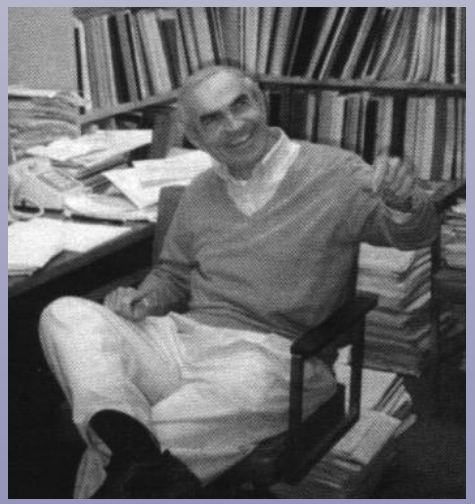
IIA LIB.
08299

“Новая эра” **(1962 -1973):**

- Классификация адронов SU(3), SU(6), симметрия ароматов, кварки
- Динамические симметрии квантовых систем
- Спектр генерирующие алгебры
- Когерентные состояния



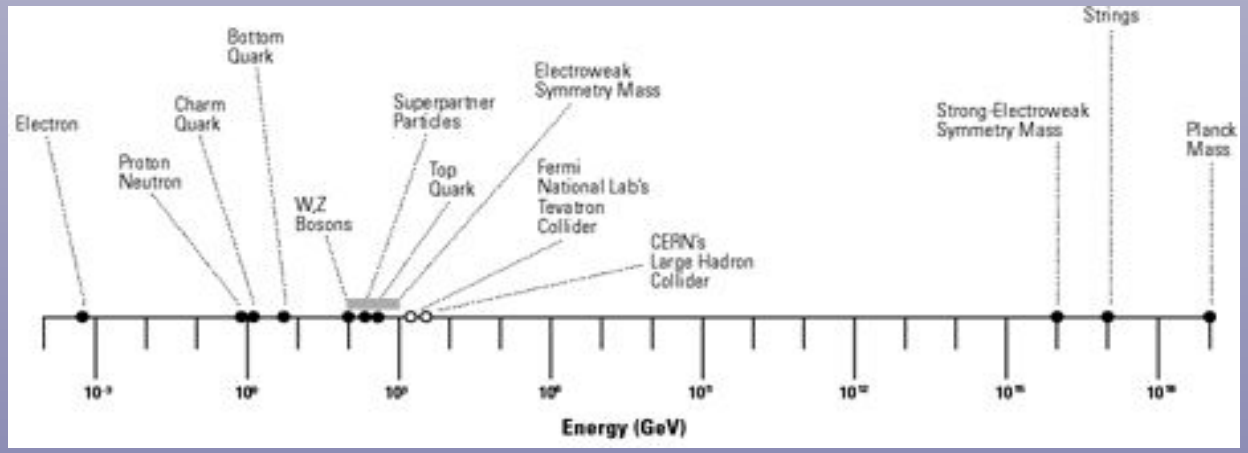
M. Gell-Mann

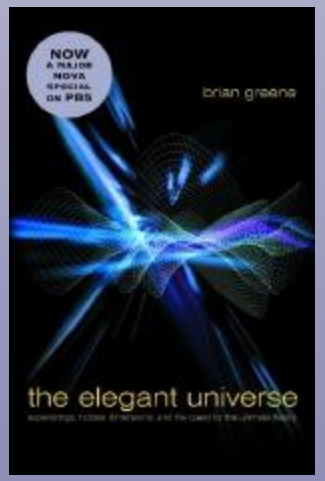


A.O. Barut

“Новейшая история” (1973- …):

- калибровочные поля
- спонтанное нарушение симметрии
- суперсимметричные модели
- суперструны, d – branes and “Theory of Everything”





Теория групп и квантовая оптика**?**

- Нелинейная оптика. Вырожденный параметрический генератор. (SU(1,1))
- Сжатый свет
- Квантовый хаос
- Двух- и много- уровневые атомы
- Cavity QED, micromaser
- Диссипативные квантовые системы
- Квантовые вычисления, декогеренция

Модельные гамильтонианы квантовой оптики и когерентные состояния

$$\hat{H} = \sum_{s_1,\ldots,s_r} \omega_{s_1\ldots s_r}\, \hat{A}_1^{s_1} \cdots \hat{A}_r^{s_r}$$

$$\widehat{H} = \sum_k \omega_k \widehat{A}_k, \qquad [\widehat{A}_k,\ \widehat{A}_l] = i\, C_{kl}^m\, \widehat{A}_m$$

$$\widehat{U}(t, t_0) = \widehat{T}(g(t, t_0)) = \exp\left[-i \sum_k \lambda_k(t, t_0)\, \widehat{A}_k\right]$$

$$\forall g_\xi \in \mathcal{X} = G/G_0 \longmapsto |\xi> = \hat{T}(g_\xi)|0>$$

$$\hat{T}(h)|\Psi_0\rangle = e^{i\alpha(h)}|\Psi_0\rangle$$

$$\xi \longmapsto z \equiv (z^1, \ldots, z^n), \quad 2n = dim(G/G_0).$$

Coherent States on Lie Group G

$$|\Psi> \longmapsto \Psi(z) =< z|\Psi > / < z|0 >, \quad |z> \equiv |\xi(z^1, \ldots, z^n)>,$$

$$\rho(z, \bar{z}) = 2\, ln\, | < z|0 > |,$$

$$\Psi(z) = \int_{\mathcal{X}} K(z, \bar{w})\, \Psi(w)\, \exp\left[-\rho(w, \bar{w})\right]\, d\mu(w, \bar{w}),$$

$$K(z, \bar{w}) =< z|w > / < z|0 >< 0|w >$$

$$\left(\hat{F}\, \Psi\right)(z) = \int_{\mathcal{X}} \mathcal{F}(z, \bar{w})\, \frac{K(z, \bar{w})}{K(w, \bar{w})}\, d\mu(w, \bar{w}),$$

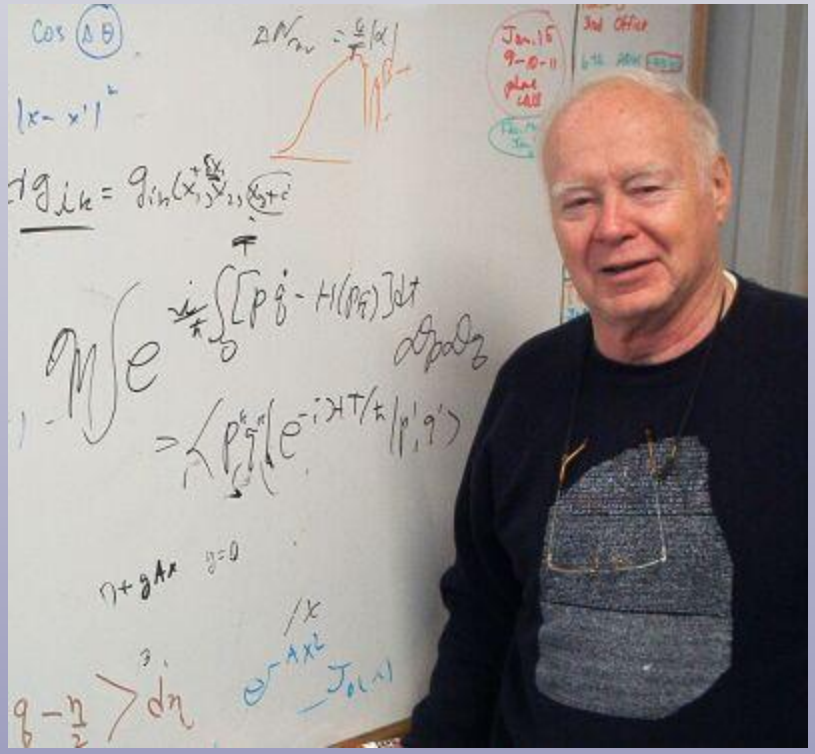
$$\mathcal{F}(z, \bar{w}) = \frac{< z|\hat{F}|w >}{< z|w >}.$$

$$\{\mathcal{F}_1,\, \mathcal{F}_2\}(z, \bar{z}) = \frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha, \bar{\beta}} g^{\alpha\bar{\beta}} \left[\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial z^\alpha} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{z}^\beta} - \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{z}^\beta} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial z^\alpha}\right]$$

John R. Klauder

Departments of Physics and Mathematics,

University of Florida, Gainesville



Интеграл по траекториям в представлении КС

$$\mathcal{U}(z,\bar{z}|t,t_0) = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}\right) \prod_{t_0<\tau<t} d\mu\left(z(\tau),\bar{z}(\tau)\right),$$

$$\mathcal{S} = \int_{t_0}^{t} \left\{ i\hbar \sum_{\alpha=1}^{n} \left[\bar{\mathcal{Z}}_\alpha(\tau+0)\,\dot{z}^\alpha(\tau) - \mathcal{Z}_\alpha(\tau)\,\dot{\bar{z}}^\alpha(\tau)\right] - \mathcal{H}\left(z(\tau),\bar{z}(\tau+0)|\tau\right) \right\} d\tau - \tag{1.72}$$

$$-\frac{i\hbar}{2}\, ln\left[\frac{K(z(t),\bar{z}(t))}{K(z(t_0),\bar{z}(t_0))}\right].$$

$$\mathcal{U}(z,\bar{z}|t,t_0) = \lim_{\epsilon\to 0} \int \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}_\epsilon\right) \prod_{t_0<\tau<t} d\mu\left(z(\tau),\bar{z}(\tau)\right),$$

$$\mathcal{S}_\epsilon = \mathcal{S} + \Delta\mathcal{S}(\epsilon)$$

“Классические” уравнения движения

$$\mathcal{U}_{cl}(z,\bar{z}|t,t_0) = \widetilde{\mathcal{U}}\,\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}_{cl}\right),$$

$$\dot{z}^\alpha = \{z^\alpha, \mathcal{H}\}, \quad \dot{\bar{z}}^\alpha = \{\bar{z}^\alpha, \mathcal{H}\}; \quad \alpha = 1,\ldots,n.$$

$$z(t_0) = z, \quad \bar{z}(t) = \bar{z}.$$

$$\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}(z,\bar{z}) = \frac{i}{\hbar}\sum_{\alpha,\bar{\beta}} g^{\alpha\bar{\beta}}\left[\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial z^\alpha}\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\bar{z}^\beta} - \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\bar{z}^\beta}\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial z^\alpha}\right]$$

N-level atoms in Classical Fields. G = SU(N)

$$|z\rangle = (1 + \sum_{\alpha=1}^{N-1} z^{\alpha}\bar{z}^{\alpha})^{-p} \prod_{\beta=1}^{N-1} \exp(z^{\beta}\hat{E}_{\beta})|0\rangle$$

$$z = (z^1, ...z^{n-1}) \in SU(n)/U(n-1) \approx CP^{n-1}$$

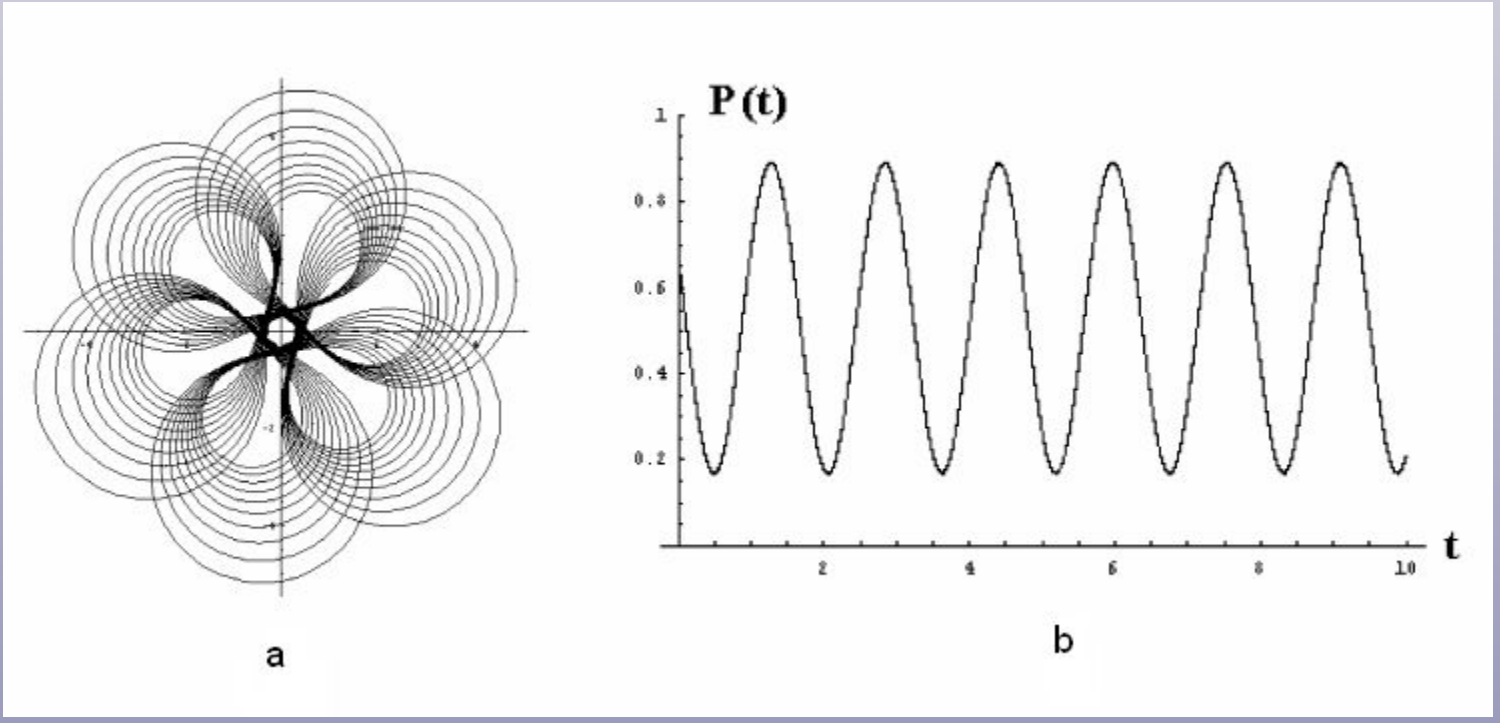
$$i\dot{z}^{\alpha} = H_{\alpha n}(t) + \sum_{\beta=0}^{n-1} \left[H_{\alpha\beta}(t) - H_{nn}(t)\delta_{\alpha\beta}\right] z^{\beta} - \sum_{\beta=0}^{n-1} H_{n\beta}(t) z^{\alpha} z^{\beta}$$

$$z^{\alpha}(t) = \frac{\sum_{\beta=1}^{n-1} \theta_{\alpha\beta}(t,t_0) z^{\beta}(t_0) + \theta_{n\alpha}(t,t_0)}{\sum_{\beta=1}^{n-1} \theta_{n\beta}(t,t_0) z^{\beta}(t_0) + \theta_{nn}(t,t_0)}.$$

Двухуровневый атом, G= SU(2) (1

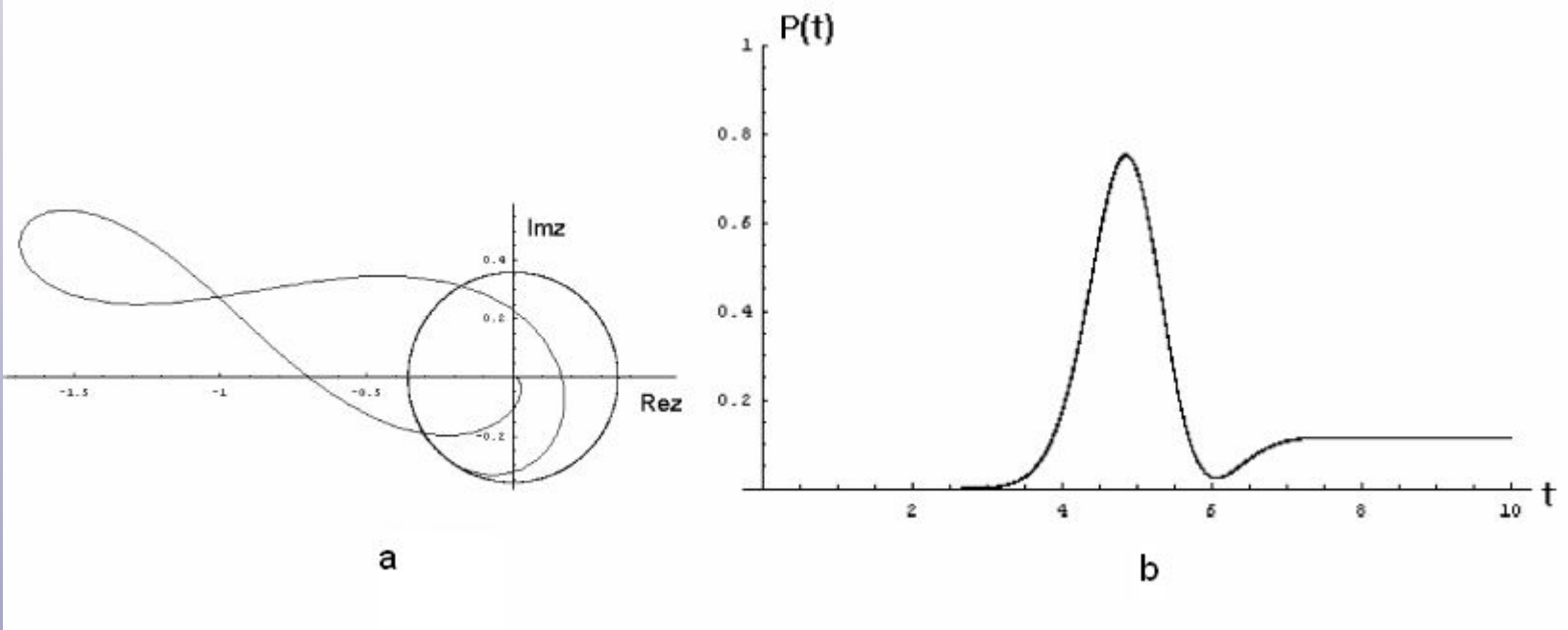
$$i\dot{z} = A(t) + \omega_0 z - \bar{A}(t) z^2,$$

$$P(t) = \frac{A^2 \sin^2 \Omega t}{(\omega - \omega_0)^2 + A^2}$$



Coherent state dynamics for two level atom. (a) – trajectory, (b) – Upper level probability P(t). (z(0) = 1+i, ω_0 = 1. ω = 2/3, A = 2)

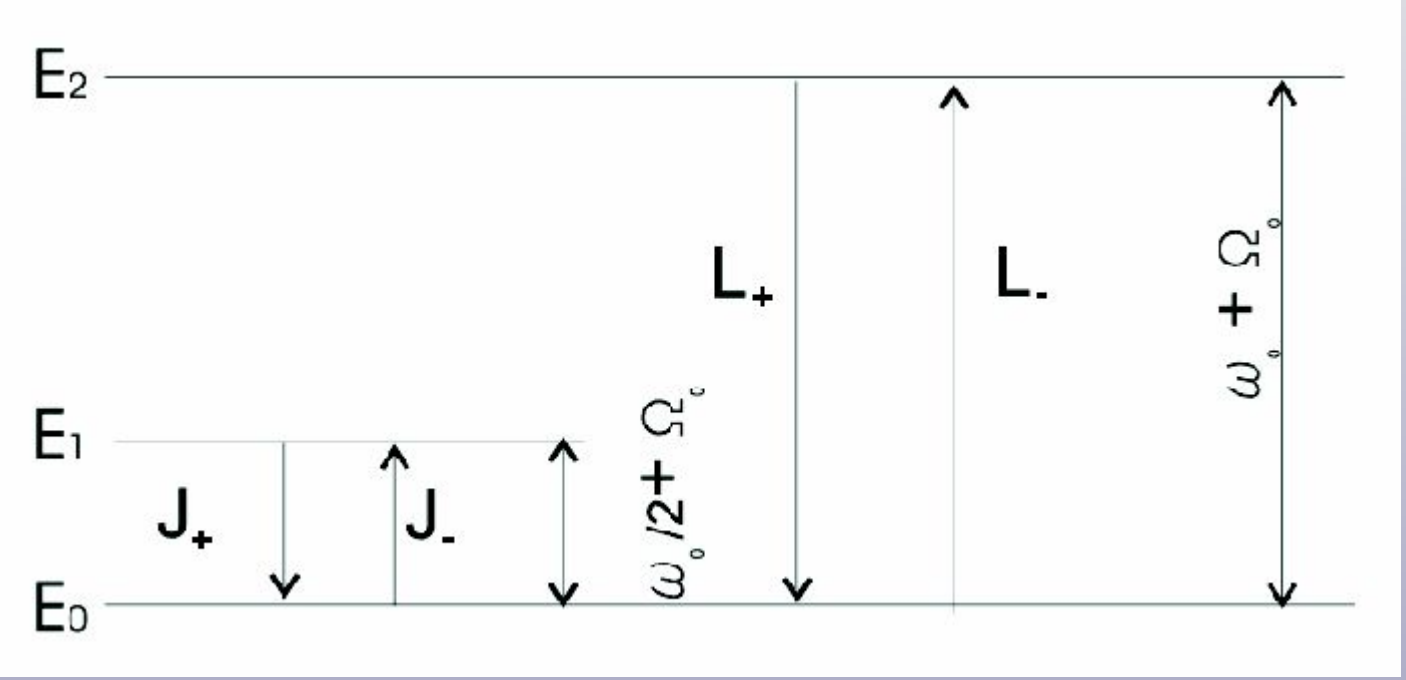
Генерация атомных КС



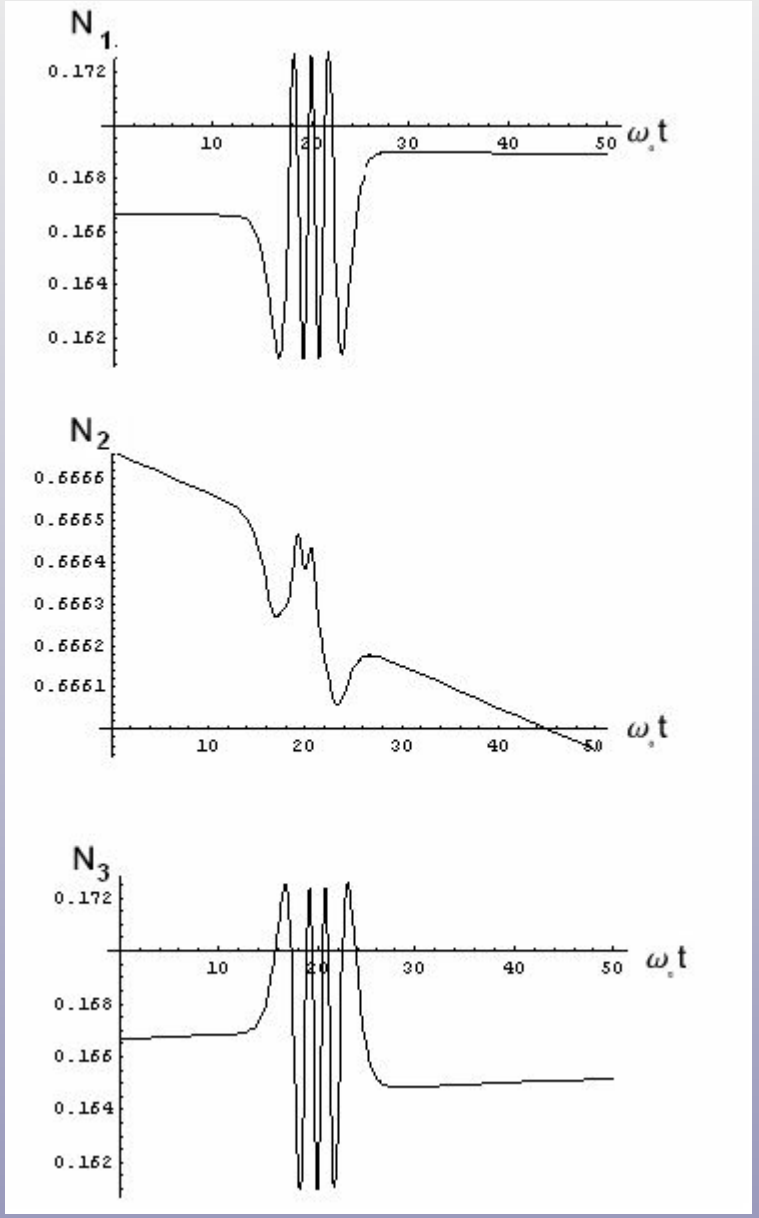
$$A(t) = A \exp\left[-i\omega t - (t - t_0)^2/\tau^2\right]$$

SU(2) CS generation for two – level atom: (a) – trajectory, (b) Upper level probability P(t). ($z(0) = 0$, $\omega_0 = 1$. $\omega = 2$, $A = 1.5$, $t_0 = 5$, $\tau = (3/5)^{1/2}$)

Трехуровневые атомы, G = SU(3)



$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} = \hbar\omega_0\hat{H}_1 + \hbar\Omega_0\hat{H}_2 + (A\hat{J}_+ + B\hat{K}_+ + D\hat{L}_+ + h.c.)$$



We have not here a pictures for CS generation!

$$A(t) = |\Omega_{12}| \exp\left[-i\omega_1 t - \frac{(t-t_{01})^2}{\sigma_1^2}\right]$$

$$D(t) = |\Omega_{13}| \exp\left[-i\omega_3 t - \frac{(t-t_{03})^2}{\sigma_3^2}\right]$$

Case of V – atom transitions and dynamics of the level populations.

$$\omega_0/2 + \Omega_0 = 0.8;\ \omega_0 + \Omega_0 = 1.3;\ \Omega_{12} = 0;\ \Omega_{13} = 2;\ \ \omega_1 = 0\ ;\ \omega_3 = 1.3;\ \tau = 20;\ \sigma_3^2 = 10$$

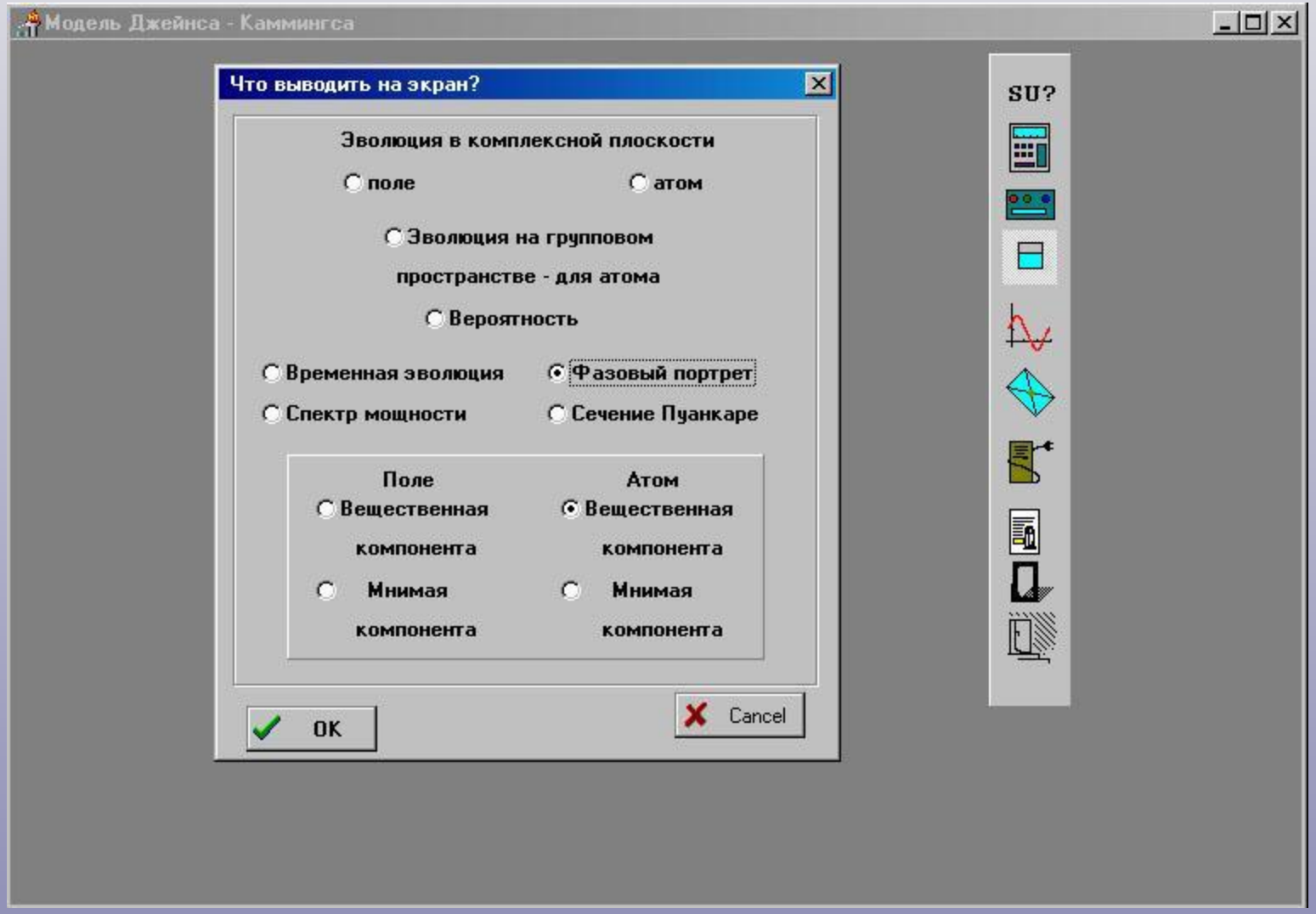
Динамический хаос в квантовых системах

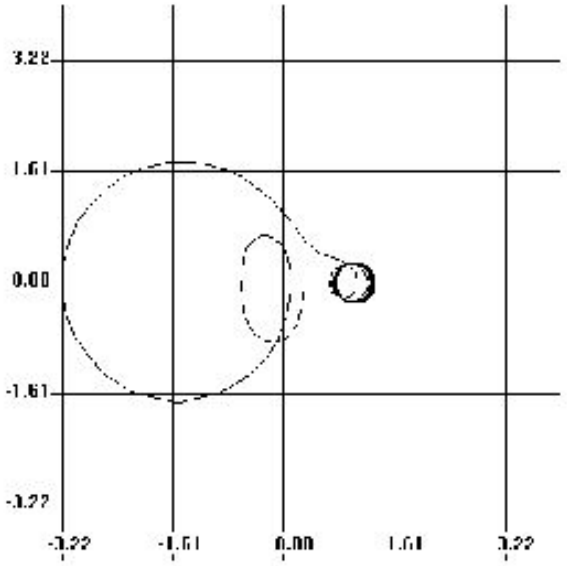
$$\hat{H} = \omega \hat{S}_Z + \nu \left(\hat{b}^+ \hat{b} + \frac{1}{2} \right) + \overline{g} \, (\hat{b}^+)^m \hat{S}_- + g \, (\hat{b})^m \hat{S}_+ +$$
$$+ g \, (\hat{b}^+)^m \hat{S}_+ + \overline{g} \, (\hat{b})^m \hat{S}_- + k \, (\hat{b}^+ + \hat{b})^2$$

$$SU(2) \otimes W(1)$$

$$\begin{cases} \dot{\alpha} + i\,\nu\alpha + i\,2jgm(\alpha^*)^{m-1}\frac{\zeta}{1+\zeta\zeta^*} + i\,2j\lambda m(\alpha^*)^{m-1}\frac{\zeta^*}{1+\zeta\zeta^*} = 0 \\ \dot{\alpha}^* - i\,\nu\alpha^* - i\,2j\bar{g}m(\alpha)^{m-1}\frac{\zeta^*}{1+\zeta\zeta^*} - i\,2j\bar{\lambda}m(\alpha)^{m-1}\frac{\zeta}{1+\zeta\zeta^*} = 0 \\ \dot{\zeta} + i\,\omega\zeta + i\,\bar{g}(\alpha)^m + i\,\lambda(\alpha^*)^m - i\,g(\alpha^*)^m\zeta^2 - i\,\bar{\lambda}(\alpha)^m\zeta^2 = 0 \\ \dot{\zeta}^* - i\,\omega\zeta^* - i\,g(\alpha^*)^m - i\,\bar{\lambda}(\alpha)^m + i\,\bar{g}(\alpha)^m\zeta^{*2} + i\,\lambda(\alpha^*)^m\zeta^{*2} = 0 \end{cases}$$

Компьютерный расчет (Delphi 3)





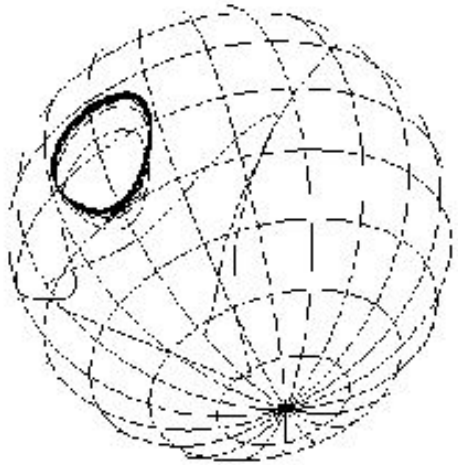


Рис. 3.10: Эволюция атомного когерентного состояния $g = \lambda, 2\nu = \omega = 1, j = 1/2, g = 0.4, \alpha(0) = 1, \zeta(0) = 0.3$, вверху - на комплексной плоскости, внизу - на сфере

Операторные средние и квантовый хаос

$$\mathcal{H}(\alpha,\alpha^*;\zeta,\zeta^*;\,t)=\omega_0\,J\,\frac{\zeta\,\zeta^*-1}{1+\zeta\,\zeta^*}+\omega(\alpha\,\alpha^*+1/2)+$$

$$+\kappa(t)(\alpha+\alpha^*)^2+2J\,\frac{\left(g\alpha^{*\,m}+\tilde{g}\alpha^m\right)\zeta+\left(g\alpha^m+\tilde{g}\alpha^{*\,m}\right)\zeta^*}{1+\zeta\,\zeta^*},$$

скобки Пуассона $\{\,,\}$ определены следующим образом:

$$\{\mathcal{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{z}^*)\,,\,\mathcal{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{z}^*)\}=\frac{1}{i}\sum_{s,s'}\eta^{ss'}(\mathbf{z},\mathbf{z}^*)\,\left(\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial z_s}\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial z^*_{s'}}-\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial z_s}\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial z^*_{s'}}\right).$$

Здесь

$$\eta_{ss'}=\frac{\partial^2\,ln\,K(\mathbf{z},\mathbf{z}^*)}{\partial z_s\partial z^*_{s'}},$$

матрица $(\eta^{ss'})$ является обратной матрице $(\eta_{ss'})$; функция

$$\mathcal{F}(\mathbf{z},\mathbf{z}^*)=<CS|\widehat{F}|CS>$$

известна как Q-символ оператора $\widehat{F}$ см. Главу 1, а

$$K(\mathbf{z},\mathbf{w}^*)=|<0|\mathbf{z}>|^{-2},\quad|0>\equiv|0>\otimes|J,-J>,\quad|\mathbf{z}>\equiv|CS>.$$

В нашем случае $K(\alpha,\alpha^*;\,\zeta,\zeta^*)=\exp(\alpha\,\alpha^*)\,(1+\zeta\zeta^*)^{2J}$.

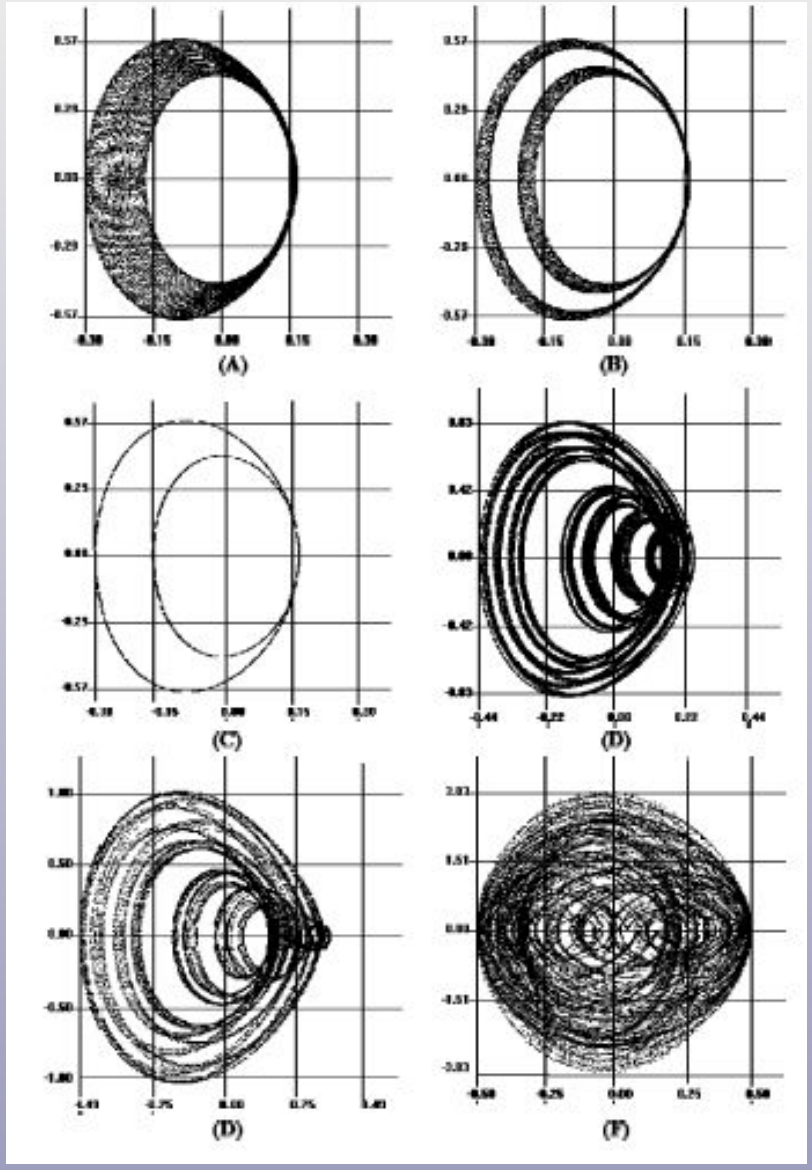


Рис. 5: Фазовые портреты для временно́й динамики полуразности населенностей двухуровневого атома с одноквантовыми переходами. Рождение циклов с ростом константы связи. $\alpha(0) = 1$, $\zeta(0) = 0.5$; $\omega_0 = 1$, $\omega = 1.05$, $\tilde{g} = g$; (A): $g = 0.448$; (B): $g = 0.4485$; (C): $g = 0.449$; (D): $g = 0.46$; (E): $g = 0.471$; (F): $g = 0.9$

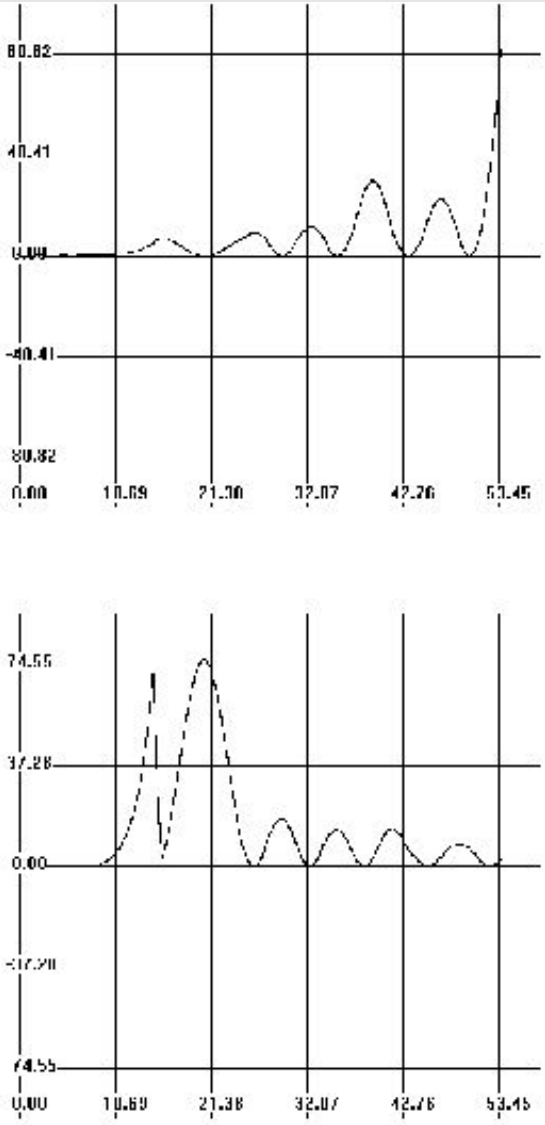


Рис. 3.28: Динамика квадратурных переменных ($m = 2$). Параметрическое воздействие включается через $\omega t_0 = 14.95$ на $\delta(\omega t) = 1$, $\gamma = 1, \Omega = 1$ $g = \lambda = 0.3, 2\nu = \omega = 1, j = 1/2, \alpha(0) = 1, \zeta(0) = 0.3$, вверху - $\Delta\hat{X}_1^2$, внизу - $\Delta\hat{X}_2^2$

Обобщенная модель Дикке с затуханием, максимальный показатель Ляпунова и сжатие

$$\widehat{H} = \hbar\omega_0 \widehat{R}_3 + \hbar\omega \widehat{a}^\dagger \widehat{a} + \hbar\,\kappa(\widehat{R}_+ + \widehat{R}_-)(\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger) + \hbar\, s(\widehat{a}\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger \widehat{a}^\dagger), \quad (1)$$

$$\widehat{H} = \hbar\omega_0 \widehat{R}_3 + \hbar\omega \widehat{a}^\dagger \widehat{a} + \hbar\,\kappa(\widehat{R}_+ + \widehat{R}_-)(\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger) + \hbar\, s(\widehat{a}\widehat{a} e^{2i\omega t} + \widehat{a}^\dagger \widehat{a}^\dagger e^{-2i\omega t}) \quad (2)$$

$$[\widehat{R}_3, \widehat{R}_\pm] = \pm \widehat{R}_\pm, \quad [\widehat{R}_+, \widehat{R}_-] = 2\widehat{R}_3, \quad \widehat{R}_\alpha = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \widehat{\tau}_\alpha^{(j)}$$

$$< \widehat{R}_3 >= N\, z, \quad < \widehat{R}_+ >= < \widehat{R}_- >^* = N\,(x + iy),$$

$$< \widehat{a} >=< \widehat{a}^\dagger >= \frac{E + iG}{\sqrt{N}}.$$

$$< \widehat{R}_\alpha(\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger) > \approx < \widehat{R}_\alpha >< \widehat{a} + \widehat{a}^\dagger >$$

$$\begin{aligned} x' &= -y, \\ y' &= x + 2\,e\,z, \\ z' &= -2\,e\,y, \\ e' &= (\mu - \sigma)\,g, \\ g' &= -(\mu + \sigma)\,e + \beta^2 x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= -y, \\ y' &= x + 2\,e\,z, \\ z' &= -2\,e\,y, \\ e' &= [\mu - \sigma\cos(2\mu\tau)]\; g - \sigma\sin(2\mu\tau)\,e, \\ g' &= -\,[\mu + \sigma\cos(2\mu\tau)]\; e + \sigma\sin(2\mu\tau)\,g + \beta^2 x \end{aligned}$$

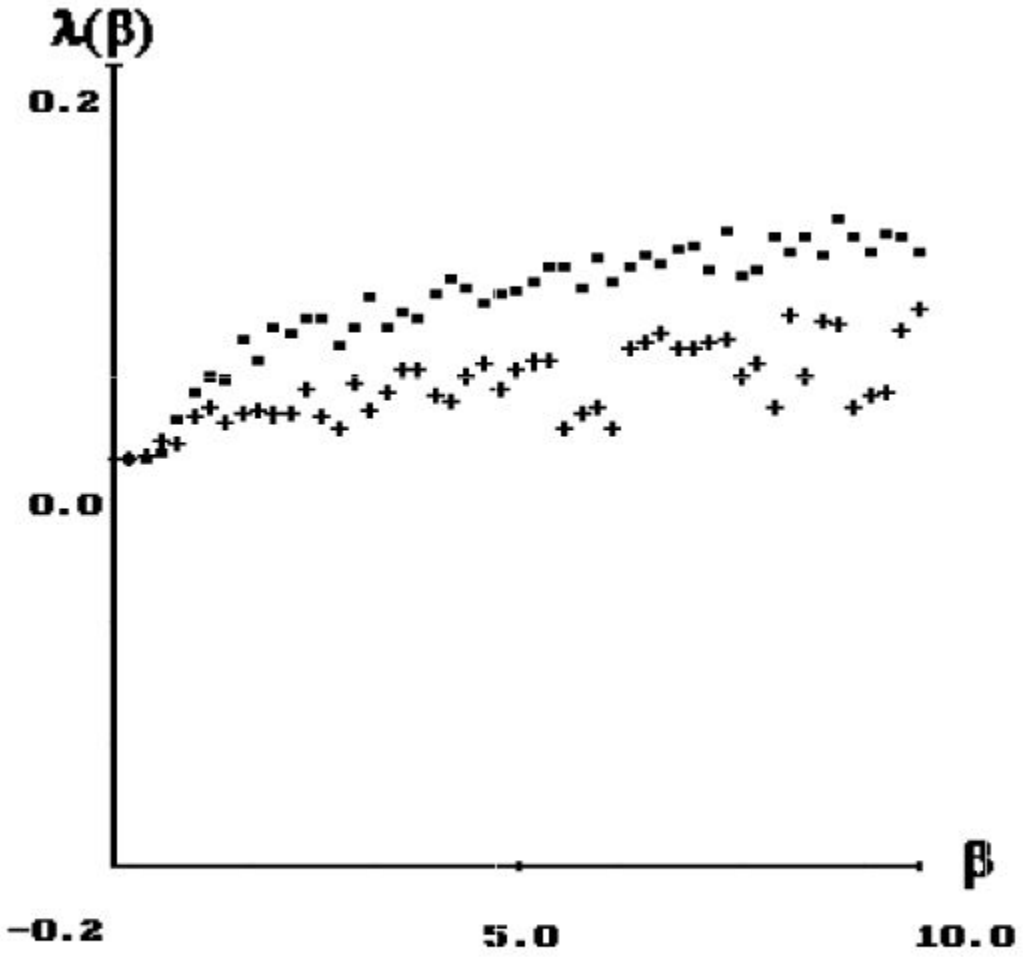
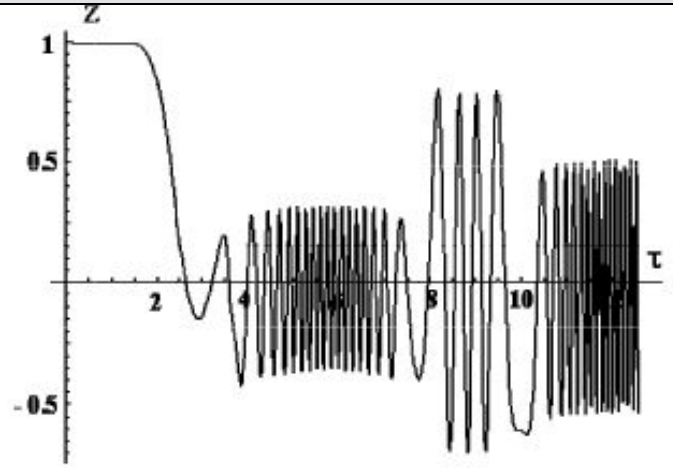
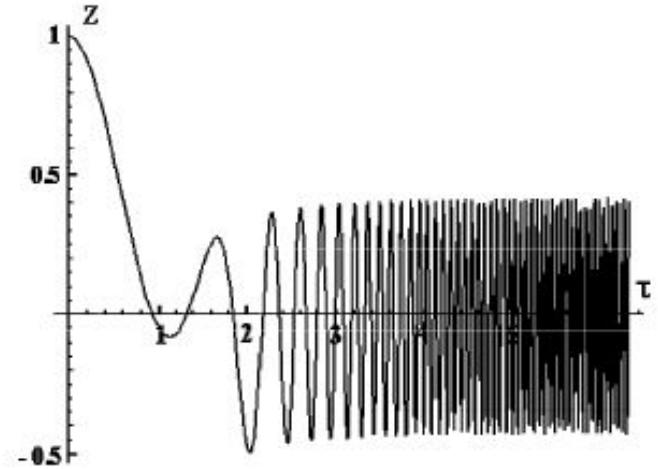


Рис. 3.31: Максимальный коэффициент Ляпунова $\lambda(\beta)$ $\mu = 1$, $x(0) = y(0) = 0, z(0) = 1$, $e(0) = h(0) = 1$. "черные квадратики": $\sigma = 0$; "кресты": $\sigma = 0.9$

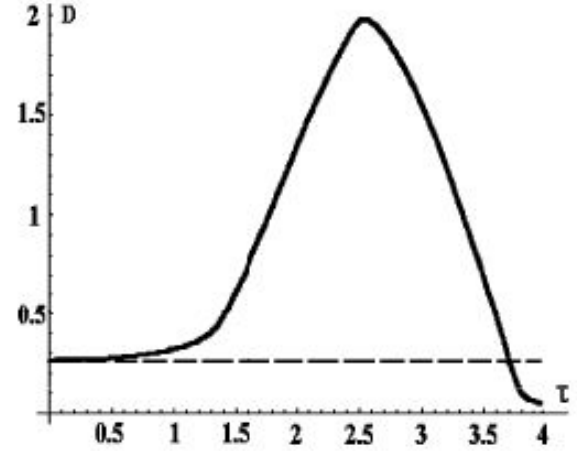


(A)

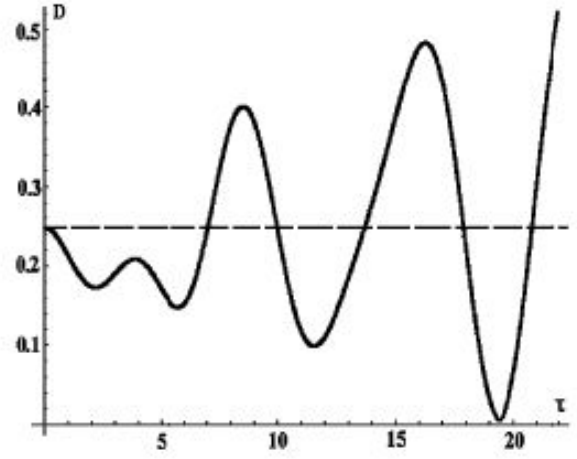


(B)

Рис. 3.32: Временные зависимости нормированной разности населенностей двухуровневых атомов для "одетой" модели Дикке. $z(0) = 1, x(0) = y(0) = 0, e(0) = h(0) = 0$: $\omega_0 = \omega, \beta = 1.0$. (A): $\sigma = 0.9$; (B): $\sigma = 0.1$



(A)



(B)

Рис. 3.33: Временные зависимости степени сжатия фотонной моды $D(\tau)$ для "одетой" модели Дикке. $z(0) = 1, x(0) = y(0) = 0, e(0) = h(0) = 0; \quad \omega_0 = \omega, \beta = 1.0$. (A): $\sigma = 0.9$; (B): $\sigma = 0.1$ (Сжатым состояниям соответствуют точки, расположенные ниже горизонтальной штриховой линии $D = 1/4$.)

Когерентная релаксация квантовых систем с конечным числом уровней

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{H}_{int}$$

$$\hat{\mathcal{R}}(t) = \hat{\rho}_A(t) \otimes \hat{\rho}_B(0)$$

Кинетическое уравнение для редуцированной матрицы плотности $\hat{\rho}(t) = tr_B[\hat{\mathcal{R}}(t)]$ $n-$ уровневого атома записывается в виде $(\hbar = 1)$:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \sum_{a=1}^{M} \frac{1}{2}\gamma_a \left[(\mathcal{N}_a + 1)\left(2\,\hat{E}_a^- \hat{\rho}\,\hat{E}_a^+ - \hat{E}_a^+ \hat{E}_a^- \hat{\rho} - \hat{\rho}\,\hat{E}_a^+ \hat{E}_a^-\right) + \right.$$

$$+ \mathcal{N}_a \left(2\,\hat{E}_a^+ \hat{\rho}\,\hat{E}_a^- - \hat{E}_a^- \hat{E}_a^+ \hat{\rho} - \hat{\rho}\,\hat{E}_a^- \hat{E}_a^+\right) -$$

$$- \mathcal{S}_a \left(2\,\hat{E}_a^+ \hat{\rho}\,\hat{E}_a^+ - \hat{E}_a^+ \hat{E}_a^+ \hat{\rho} - \hat{\rho}\,\hat{E}_a^+ \hat{E}_a^+\right) - \qquad (4.3)$$

$$\left. - \bar{\mathcal{S}}_a \left(2\,\hat{E}_a^- \hat{\rho}\,\hat{E}_a^- - \hat{E}_a^- \hat{E}_a^- \hat{\rho} - \hat{\rho}\,\hat{E}_a^- \hat{E}_a^-\right) \right].$$

В этом уравнении $\hat{E}_a^{\pm}$ обозначают операторы переходов между энергетическими уровнями атома и, вместе с тем, лестничные генераторы $n-$ мерного фундаментального представления группы $SU(n)$, индекс "a" находится в соответствии с нумерацией базисных элементов алгебры $SU(n)$, $M \leq n(n-1)/2$ число разрешенных переходов в атоме, γ_a- константа затухания для перехода типа "a", $\mathcal{N}_a$ среднее число фотонов в термостате и $\mathcal{S}_a-$ комплексный параметр сжатия в фотонной моде с частотой перехода типа "a".

Используем далее для редуцированной матрицы плотности диагональное представление по КС группы $SU(n)$

$$\hat{\rho}(t) = \int_{\mathcal{X}} d\mu(z, \bar{z})\, \mathcal{P}(z, \bar{z}, t) |z><z|, \tag{4.4}$$

где $\mathcal{X} = SU(n)/G_0$ фактор-пространство группы $SU(n)$ с инвариантной мерой $d\mu$, $G_0 \subset SU(n)$. Подгруппа G_0 определяется выбором стандартного вектора $|\psi_0>$ в определении КС на группе Ли (простейший выбор $|\psi_0>$, как состояния с наименьшей энергией изолированного $n-$ уровневого атома, приводит к $G_0 = U(n-1) \subset SU(n)$).

Используя явное действие операторов $E_a^{\pm}$ на проекторы $|z><z|$, приведем (5.3) к уравнению вида Фоккера - Планка для функции $\mathcal{P}(z, \bar{z}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}(z, \bar{z}, t) = \hat{\mathbf{L}}\, \mathcal{P}(z, \bar{z}, t), \tag{4.5}$$

где оператор $\hat{\mathbf{L}}$ является линейным дифференциальным оператором в частных производных второго порядка, зависящим от представления группы $SU(n)$. (Ниже будут рассмотрены частные случаи уравнения (4.5), имеющие место для $(2J+1)-$ мерных представлений группы $(SU(2)$ и атомных систем с динамической симметрией полносимметричных представлений $D(N, 0)$ группы $SU(3), N = 1, 2, \ldots)$.

$$\mathcal{P}(z,\,\bar{z};\,t) = \int_{\mathcal{X}} d\mu(z^{'},\bar{z}^{'})\,\mathcal{K}(z,\bar{z};\,t|z^{'},\bar{z}^{'};\,t_0)\,\mathcal{P}_0(z^{'},\,\bar{z}^{'};\,t_0), \qquad (4.6)$$

где $\mathcal{P}_0$ представляет собой $P-$ символ начальной матрицы плотности $\rho_A(t_0)$; $\mathcal{K}-$ является функцией Грина (пропагатором) уравнения Фоккера - Планка; $z = (z_1, \ldots, z_r)$, $r-$ (комплексная) размерность пространства $\mathcal{X}$.

$$\lim_{t\to 0} \mathcal{K}(z,\,\bar{z};\,t\,|\,z^{'},\,\bar{z}^{'};\,0) = \delta(z,\,\bar{z};\,z^{'},\,\bar{z}^{'}), \qquad (4.7)$$

здесь $\delta-$функция определена в пространстве функций на однородном многообразии $SU(n)/G_0$.

$$< \hat{A}(t) >= \int < z|\,\hat{A}^0(t)\,|z > \mathcal{P}(z,\,\bar{z};\,t)\,d\mu(z,\,\bar{z}).$$

$$\langle \hat{A}(t)\,\hat{B}(0)\rangle =$$

$$= \int\int < z|\hat{A}^0\,|z > \mathcal{K}(z,\bar{z};t|z^{'},\bar{z}^{'};0)\,\mathcal{P}_{\hat{B}\,\cdot\,\hat{\rho}(0)}(z^{'},\bar{z}^{'};0)\,d\mu(z,\bar{z})\,d\mu(z^{'},\bar{z}^{'}), \qquad (4.9)$$

здесь $\hat{A}^0(t) = \hat{U}_0^{-1}(t)\,\hat{A}\,\hat{U}_0(t)$, $\hat{U}_0(t)-$ оператор эволюции свободной атомной подсистемы, $\mathcal{P}_{\hat{B}\,\cdot\,\hat{\rho}(t)}$ обозначает $P-$ символ произведения операторов $\hat{B}\,\cdot\,\hat{\rho}(0)$ в начальный момент времени $t = 0$.

$$g_a(\omega) \sim Re \int_0^\infty e^{-i\omega t} \langle \hat{E}_a^+(t)\hat{E}_a^-(0)\rangle \, dt.$$

Контур линии при релаксации в термостате со сжатыми флуктуациями:

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\frac{\Gamma}{2}+\gamma|\mathcal{S}|}{(\omega-\omega_0)^2+\left(\frac{\Gamma}{2}+\gamma|\mathcal{S}|\right)^2} + \frac{\frac{\Gamma}{2}-\gamma|\mathcal{S}|}{(\omega-\omega_0)^2+\left(\frac{\Gamma}{2}-\gamma|\mathcal{S}|\right)^2}\right].$$

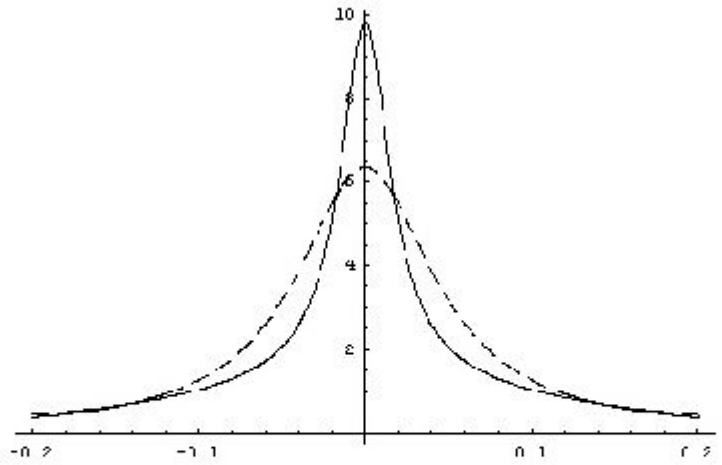


Рис. 4.1: Контур линии излучения двухуровневой системы в сжатом термостате. $\gamma/\omega_0 = 0.01, < \nu >= 5, r = 0.3$ (для верхнего рисунка); $\gamma/\omega_0 = 0.01, < \nu >= 5, r = 0.5$ (для нижнего рисунка). Пунктирная линия соответствует контуру излучения двухуровневой системы в обычном термостате при тех же условиях. По оси абсцисс отложена безразмерная частота $(\omega/\omega_0 - 1)$.

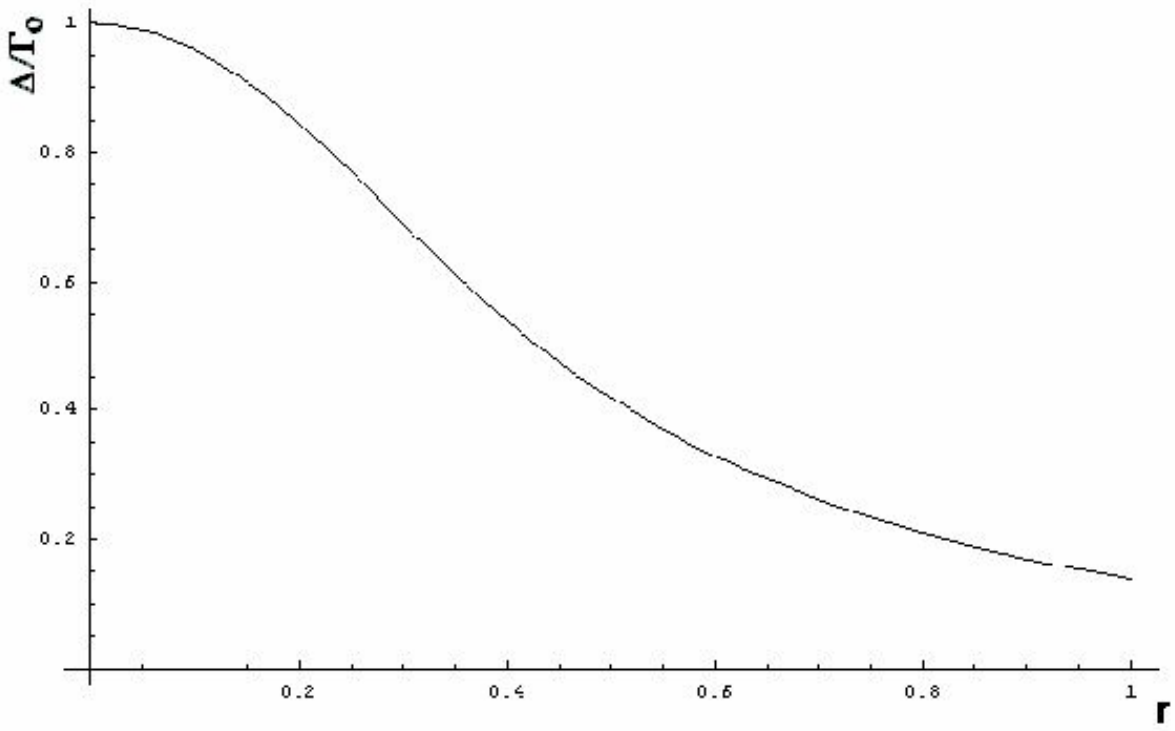


Рис. 4.2: Отношение ширины линии Δ двухуровневого атома при релаксации в "сжатом" термостате к ширине линии в обычном термостате Γ_0 в зависимости от параметра сжатия r.

Трехуровневые атомы

$$f(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2|t)\equiv\frac{\mathcal{P}(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2|t)}{(1+z_1\bar z_1+z_2\bar z_2)^3}$$

получим

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\hat L f\equiv \tag{4.57}$$

$$\equiv\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}\left[\frac{\gamma_1}{2}\left(\mu\frac{z_1z_2\bar z_2}{1+z_1\bar z_1+z_2\bar z_2}+(\mathcal{N}_1+1)z_1z_2\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_2}\bar z_2^2+\frac{\partial}{\partial\bar z_1}\bar z_1\bar z_2\right)\right.\right.\right.$$

$$\left.+\mathcal{N}_1z_1z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)+\frac{\gamma_2}{2}\left(\mu\frac{z_1z_2\bar z_2}{1+z_1\bar z_1+z_2\bar z_2}-(\mathcal{N}_2+1)z_1z_2\frac{\partial}{\partial z_2}+\mathcal{N}_2z_2\bar z_2\frac{\partial}{\partial\bar z_1}\right)+$$

$$+\frac{\gamma_3}{2}\left(\mu\frac{z_1(1+z_1\bar z_1)}{1+z_1\bar z_1+z_2\bar z_2}+(\mathcal{N}_3+1)\,z_1^2\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_1}\bar z_1^2+\frac{\partial}{\partial\bar z_2}\bar z_1\bar z_2\right)+\right.$$

$$\left.\left.+(\mathcal{N}_3+1)\left(\frac{\partial}{\partial z_1}z_1^2+\frac{\partial}{\partial z_2}z_1z_2\right)+N_3\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_1}+z_1^2\frac{\partial}{\partial z_1}\right)\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z_2}\left[\frac{\gamma_1}{2}\left(\mu\frac{z_2(1+z_2\bar z_2)}{1+z_1\bar z_1+z_2\bar z_2}+(\mathcal{N}_1+1)z_2^2\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_2}\bar z_2^2+\frac{\partial}{\partial\bar z_1}\bar z_1\bar z_2\right)+\right.\right.$$

$$\left.+(\mathcal{N}_1+1)\left(\frac{\partial}{\partial z_2}z_2^2+\frac{\partial}{\partial z_1}z_1z_2\right)+\mathcal{N}_1\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_2}+z_2^2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\right)+$$

$$+\frac{\gamma_2}{2}\left((\mathcal{N}_2+1)z_1\bar z_1\frac{\partial}{\partial\bar z_2}-\mathcal{N}_2z_1z_2\frac{\partial}{\partial z_1}-\mu\frac{z_1\bar z_1z_2}{1+z_1\bar z_1+z_2\bar z_2}\right)+$$

$$\left.+\frac{\gamma_3}{2}\left(\mu\frac{z_1\bar z_1z_2}{1+z_1\bar z_1+z_2\bar z_2}+(\mathcal{N}_3+1)z_1z_2\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_1}\bar z_1^2+\frac{\partial}{\partial\bar z_2}\bar z_1\bar z_2\right)+\mathcal{N}_3z_1z_2\frac{\partial}{\partial z_1}\right)\right]+$$

$$\left.+\text{к.с.}\right\}f.$$

$$f(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2|t)=\sum_{n=0}^{\mu}\sum_{|m_1+m_2|\le n}F_{nm_1m_2}(t)\frac{Y_{nm_1m_2}(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)}{(1+z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)^3}. \qquad (4.58)$$

Сферические функции $Y_{nm_1m_2}(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)$ на однородном пространстве $SU(3)/U(2)\approx CP_2$ должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} -\nabla^2 Y_{nm_1m_2}=n(n+2)Y_{nm_1m_2}, \\ \hat{M}_1 Y_{nm_1m_2}=m_1 Y_{nm_1m_2}, \\ \hat{M}_2 Y_{nm_1m_2}=m_2 Y_{nm_1m_2}, \end{cases} , \qquad (4.59)$$

где $n=0,1,2,...$

$$\nabla^2=(1+z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)\times$$

$$\times\left[(1+z_1\bar{z}_1)\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial\bar{z}_1}+z_1\bar{z}_2\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial\bar{z}_2}+\bar{z}_1z_2\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}_1\partial z_2}+(1+z_2\bar{z}_2)\frac{\partial^2}{\partial z_2\partial\bar{z}_2}\right]$$

— инвариантный оператор Лапласа-Бельтрами,

$$\hat{M}_1=\frac{1}{2}\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}-\bar{z}_1\frac{\partial}{\partial\bar{z}_1}\right)\hat{M}_2=\frac{1}{2}\left(z_2\frac{\partial}{\partial z_2}-\bar{z}_2\frac{\partial}{\partial\bar{z}_2}\right).$$

Условие нормировки для сферических функций имеет вид

$$\int Y_{nm_1m_2}\bar{Y}_{n'm_1'm_2'}\frac{dRez_1dImz_1dRez_2dImz_2}{(1+z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)^3}=\delta_{nn'}\delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'}.$$

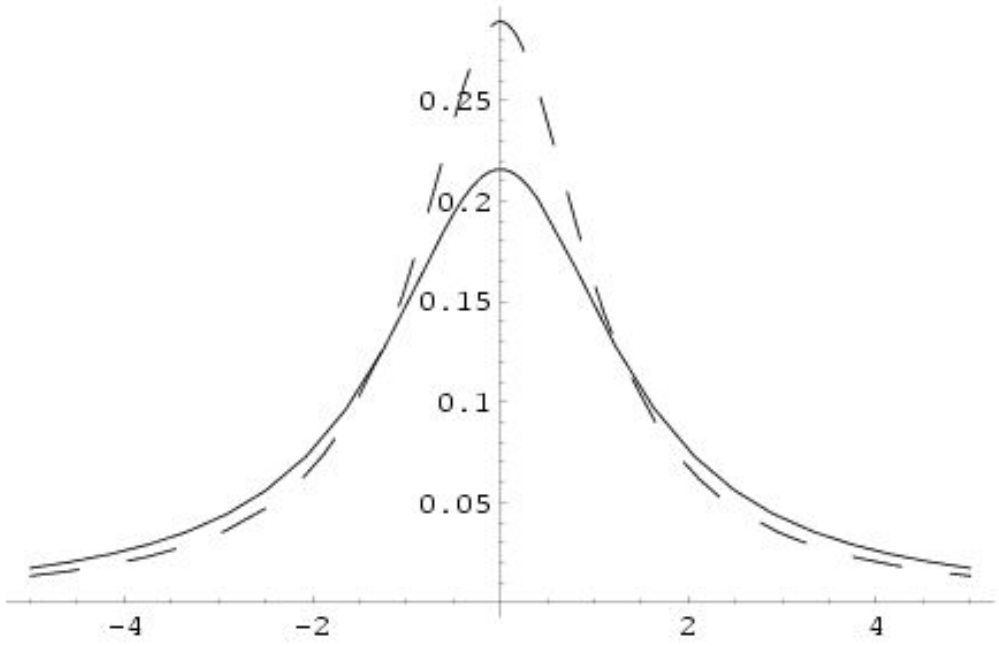


Рис. 4.3: Контур линии излучения спонтанной релаксации трехуровневого V- атома на переходе $1 \leftrightarrow 2$. $\gamma_1/(\frac{\omega_0}{2}+\Omega_0) = 0.1, \gamma_3/(\frac{\omega_0}{2}+\Omega_0) = 0.5, \mathcal{N}_1 = 1, \mathcal{N}_3 = 1.5$. Пунктирной линии соответствует контур линии двухуровневого атома при тех же условиях.

Two level system in external stochastic fields and Fokker – Planck Equation (FPE) Approach

$$\widehat{H} = \widehat{H}_A + \widehat{H}_B + \widehat{H}_{AB} + \widehat{H}_{st} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_{int} + \widehat{H}_{st}$$

$$\widehat{H}_{st} = \hbar\,\Omega(t)\,\widehat{J}_3 + \hbar\left(\xi(t)\,\widehat{J}_+ + \bar{\xi}(t)\,\widehat{J}_-\right)$$

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\left[\widehat{V}_{st}(t), \widehat{\rho}\right] +$$

$$+\frac{\gamma}{2}\Big[(<\nu>+1)\,(2\,\hat{J}_-\,\hat{\rho}\,\hat{J}_+ - \hat{J}_+\,\hat{J}_-\,\hat{\rho} - \hat{\rho}\,\hat{J}_+\,\hat{J}_-) +$$

$$+ <\nu>\,(2\,\hat{J}_+\,\hat{\rho}\,\hat{J}_- - \hat{J}_-\,\hat{J}_+\,\hat{\rho} - \hat{\rho}\,\hat{J}_-\,\hat{J}_+)\Big]$$

$$\widehat{V}_{st}(t) == \left\{\Omega(t)\,\widehat{J}_0 + \xi(t)\,e^{i\omega_0 t}\widehat{J}_+ + \bar{\xi}(t)\,e^{-i\omega_0 t}\widehat{J}_-\right\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = i\left[\Omega(t)(\frac{\partial}{\partial z}z - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{z}) + \xi(t)e^{i\omega_0 t}(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{z}^2) - \bar{\xi}(t)\, e^{-i\omega_0 t}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial z}z^2)\right] f +$$

$$+\eta\left[\frac{\partial}{\partial z}(2\,j\,z + \frac{\partial}{\partial z}z^2 + z^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{z}^2) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(2\,j\,\bar{z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{z}^2 + \bar{z}^2\frac{\partial}{\partial z}z^2)\right] f + \quad (5.4)$$

$$+\delta\left[\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + z^2\frac{\partial}{\partial z} - 2\,j\,z) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\frac{\partial}{\partial\, z} + \bar{z}^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - 2\,j\,\bar{z})\right] f.$$

$$f(z,\bar{z};t) = \frac{\mathcal{P}(z,\bar{z};t)}{(1+z\bar{z})^2}$$

FPE - Propagator for Atom in Stochastic Field

- Weak Field. Perturbation theory
- White noise
- Kubo - Andersen processes
- Markov's dichotomic processes
- "Exact Soluble" Model

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{\gamma}{2}\Big[(<\nu>+1)\,(2\,\hat{J}_-\,\hat{\rho}\,\hat{J}_+ - \hat{J}_+\,\hat{J}_-\,\hat{\rho} - \hat{\rho}\,\hat{J}_+\,\hat{J}_-)+$$

$$+<\nu>\,(2\,\hat{J}_+\,\hat{\rho}\,\hat{J}_- - \hat{J}_-\,\hat{J}_+\,\hat{\rho} - \hat{\rho}\,\hat{J}_-\,\hat{J}_+)\Big]$$

$$+K_\Omega(t)(2\hat{J}_3\hat{\rho}\hat{J}_3 - \hat{J}_3^2\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{J}_3^2)$$

$$+K_\xi(t)(\hat{J}_+\hat{\rho}\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{\rho}\hat{J}_+ - \hat{\rho}\hat{J}_-\hat{J}_+ - \hat{J}_+\hat{J}_-\hat{\rho})$$

$$+\bar{K}_\xi(t)(\hat{J}_+\hat{\rho}\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{\rho}\hat{J}_+ - \hat{\rho}\hat{J}_+\hat{J}_- - \hat{J}_-\hat{J}_+\hat{\rho}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \eta\left[\frac{\partial}{\partial z}(2\,j\,z + \frac{\partial}{\partial z}z^2 + z^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{z}^2) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(2\,j\,\bar{z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{z}^2 + \bar{z}^2\frac{\partial}{\partial z}z^2)\right] f +$$

$$+\delta\left[\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + z^2\frac{\partial}{\partial z} - 2\,j\,z) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\frac{\partial}{\partial\, z} + \bar{z}^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - 2\,j\,\bar{z})\right] f+$$

$$+K_\Omega(t)\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}z\bar{z} - z\frac{\partial}{\partial z}z\right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial}{\partial z}z\bar{z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{z}\right)\right] f+$$

$$+\left\{K_\xi(t)\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}z^2 z + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}z^2\bar{z}^2\right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\bar{z}^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}z^2\bar{z}^2\right)\right] + c.c.\right\} f$$

$$K_\Omega(t) = \int_0^t \Omega(t)\Omega(t_1)dt_1,\; K_\xi(t) = \int_0^t \xi(t)\bar{\xi}(t_1)e^{-\omega_0(t_1-t)}dt_1$$

$$f(z,\bar{z};t)=\sum_{l=0}^{2j}\sum_{m=-l}^{l}F_{lm}(t)Y_{lm}(z,\bar{z})$$

$$\begin{cases}\dot{F}_{00}(t)=0,\\ \dot{F}_{1-1}(t)=-\left(\eta+\delta+K_{\Omega}(t)+2\bar{K}_{\xi}(t)\right)F_{1-1}(t),\\ \dot{F}_{11}(t)=-\left(\eta+\delta+K_{\Omega}(t)+2K_{\xi}(t)\right)F_{11}(t),\\ \dot{F}_{10}(t)=2\sqrt{3}\left(\eta-\delta\right)F_{00}(t)-2\left(\eta+\delta+\bar{K}_{\xi}(t)+K_{\xi}(t)\right)F_{10}(t)\end{cases}$$

$$\mathcal{K}(z,\bar{z};t|z_0,\bar{z}_0;0)=$$

$$=\frac{1}{\pi}+\frac{3}{\pi}\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\frac{\eta-\delta}{\eta+\delta}\left(1-e^{-2(\eta+\delta)t}\right)+\frac{3}{\pi}\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\frac{1-z_0\bar{z}_0}{1+z_0\bar{z}_0}\times$$

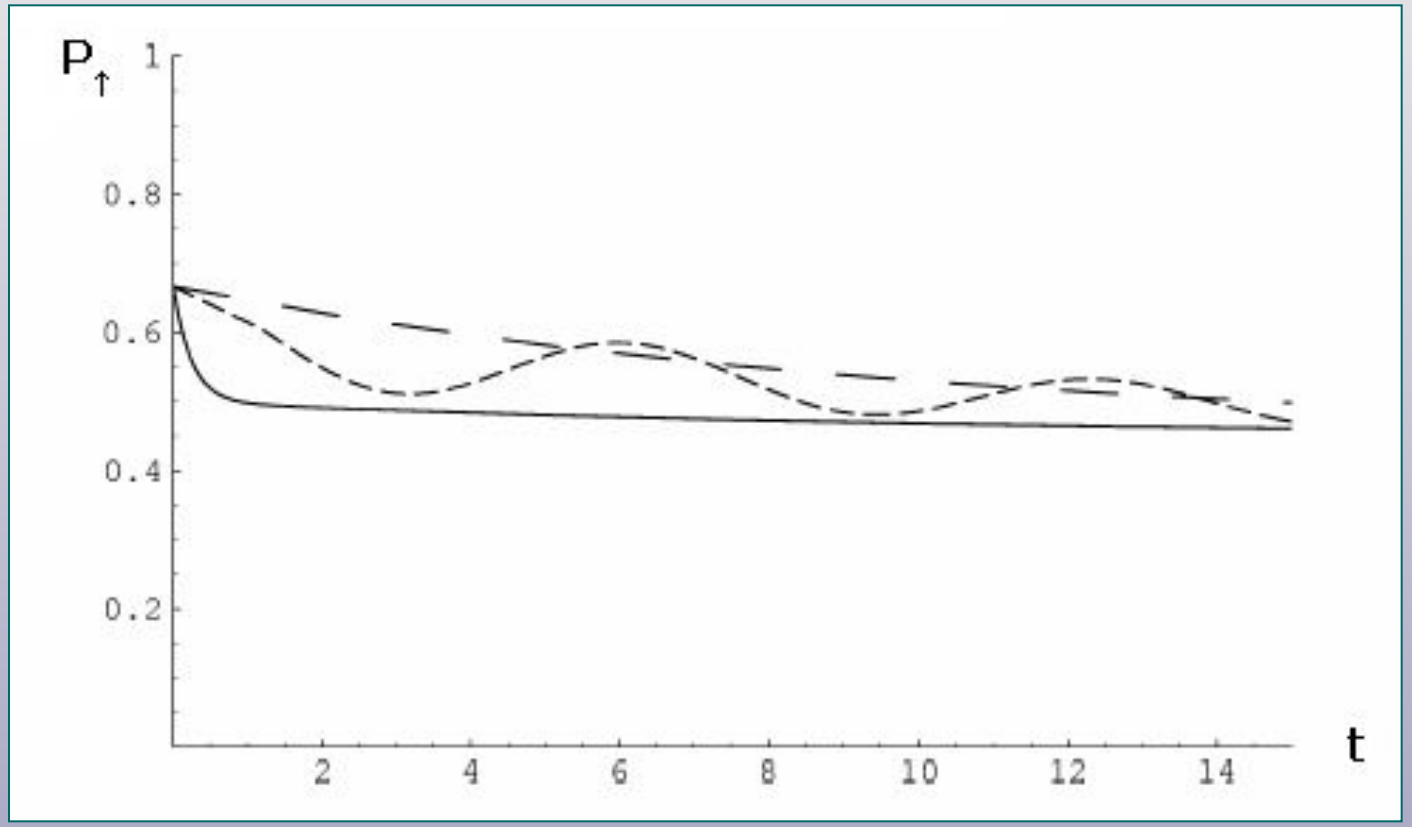
$$\times\exp\left[-2(\eta+\delta)t-2\int_0^t\int_0^{t_1}\left(\xi(t_1)\bar{\xi}(t_2)e^{i\omega_0(t_1-t_2)}+\bar{\xi}(t_1)\xi(t_2)e^{-i\omega_0(t_1-t_2)}\right)dt_1dt_2\right]+$$

$$+\frac{6}{\pi}\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}\frac{z_0}{1+z_0\bar{z}_0}\times$$

$$\times\exp\left[-(\eta+\delta)t-\int_0^t\int_0^{t_1}\left(\Omega(t_1)\Omega(t_2)+2\xi(t_1)\bar{\xi}(t_2)e^{i\omega_0(t_1-t_2)}\right)dt_1dt_2\right]+$$

$$+\frac{6}{\pi}\frac{z}{1+z\bar{z}}\frac{\bar{z}_0}{1+z_0\bar{z}_0}\times$$

$$\times\exp\left[-(\eta+\delta)t-\int_0^t\int_0^{t_1}\left(\Omega(t_1)\Omega(t_2)+2\bar{\xi}(t_1)\xi(t_2)e^{-i\omega_0(t_1-t_2)}\right)dt_1dt_2\right]$$



Probability to find atom in the upper level $\mathbf{P}_{\uparrow}$ for Kubo – Andersen processes

$$|z_0|^2 = 2,\ \sigma_\Omega = 0.01,\ \nu_1/\omega_0 = 0.012,\ \gamma/\omega_0 = 0.01,< \nu >= 5,\ \sigma_\xi = 0.1,\ \nu_2/\omega_0 = 0.005$$

——— Exact soluble model

——— Perturbation theory

——— Relaxation without stochastic field

Longitudinal T_1 and transverse T_2 relaxation times

$$T_1 = \frac{1}{2\left(\eta + \delta + 2\frac{\sigma_\xi^2}{\nu_2 + \frac{\omega_0^2}{\nu_2}}\right)}.$$

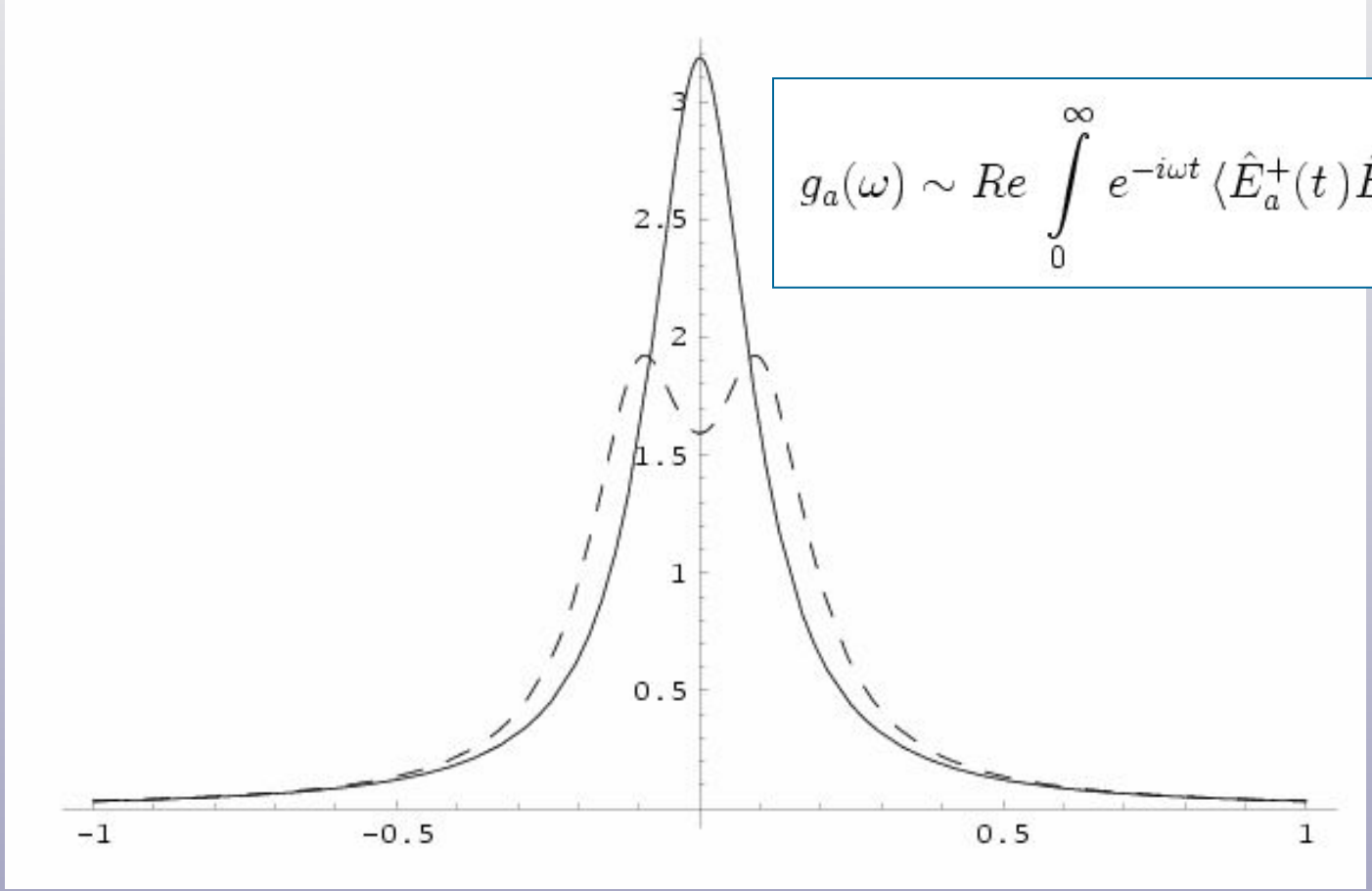
$$T_2 = \frac{1}{\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_1} + 2\frac{\sigma_\xi^2}{\nu_2 + \frac{\omega_0^2}{\nu_2}}}.$$

White noise →

$$T_1 = \frac{1}{2\left(\eta + \delta\right)}$$

$$T_2 = \frac{1}{\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_1}}$$

$$\frac{1}{2T_1} + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_1} = \frac{1}{T_2}$$



$$g_a(\omega) \sim Re \int_0^\infty e^{-i\omega t} \langle \hat{E}_a^+(t)\hat{E}_a^-(0)\rangle \, dt$$

Radiation Line Contour for Dichotomic Process

$$\sigma_\Omega = 0.01, \nu_1/\omega_0 = 0.01, \gamma/\omega_0 = 0.01, < \nu >= 10, \sigma_\xi = 0.5, \nu_2/\omega_0 = 0.005$$

——— (strong field)

——— Line contour without stochastic field

Dipole – dipole interacting atoms

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[V_I(t), \rho] -$$

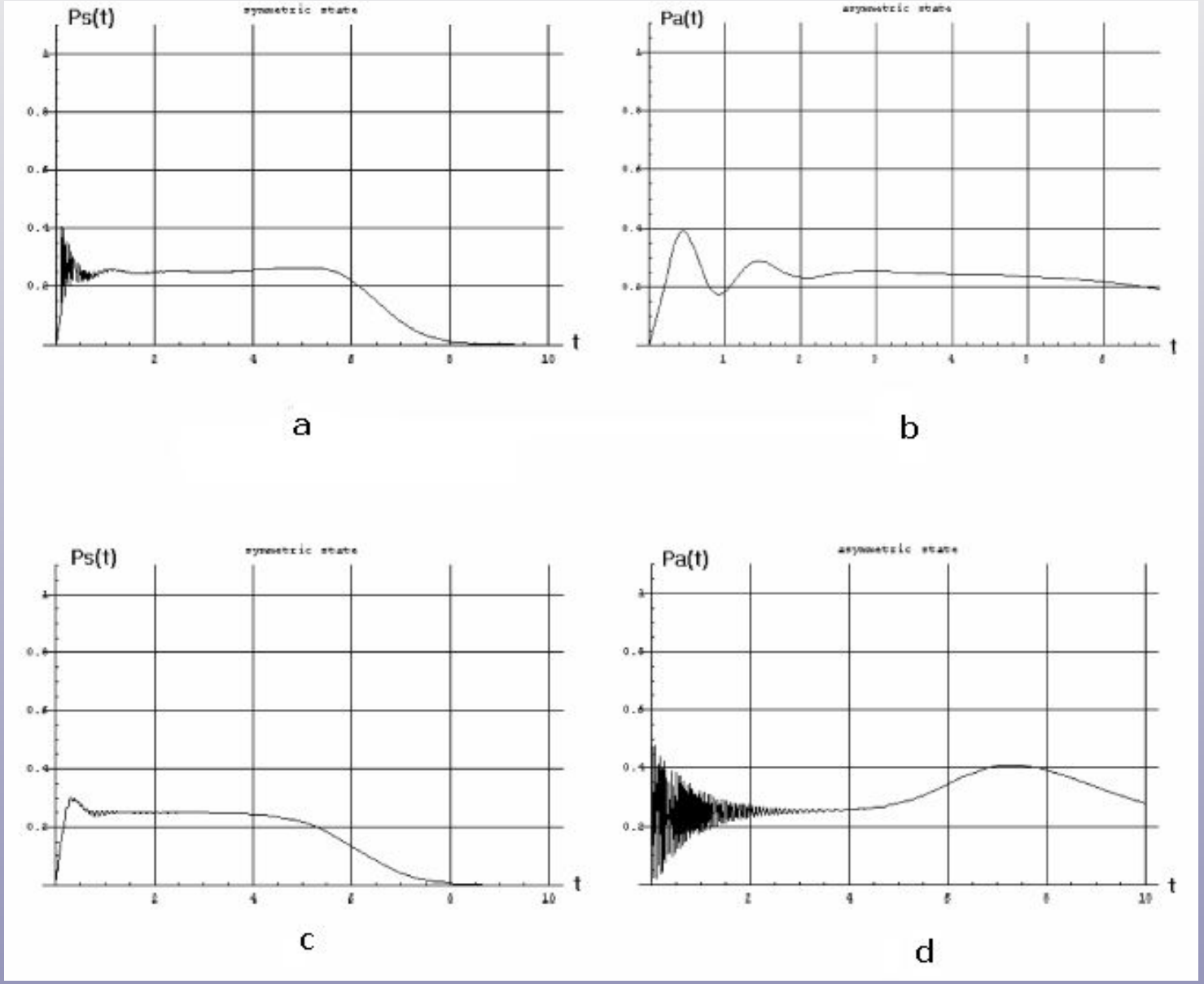
$$-\sum_{i,k=1}^{2} \gamma_{ik}(1+ < n >) \left(J_+^{(i)} J_-^{(k)} \rho + \rho J_+^{(i)} J_-^{(k)} - 2 J_-^{(k)} \rho J_+^{(i)} \right) -$$

$$-\sum_{ß,k=1}^{2} \gamma_{ik} < n > (J_-^{(i)} J_+^{(k)} \rho + \rho J_-^{(i)} J_+^{(k)} - 2 J_+^{(k)} \rho J_-^{(i)})$$

$$V_I(t) = -\frac{\hbar g^{(12)}}{2} \left(J_+^{(1)} J_-^{(2)} + J_-^{(1)} J_+^{(2)} \right) -$$
$$-\frac{\hbar}{2} \left\{ \left(\Omega_1 J_+^{(1)} + \Omega_2 J_+^{(2)} \right) \exp(i \Delta\omega t) + h.c. \right\}$$

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_1 |2\rangle_2 + |2\rangle_2 |1\rangle_1),$$

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_1 |2\rangle_2 - |2\rangle_2 |1\rangle_1)$$



Time Dependence of symmetric and antisymmetric states Probabilities generation

a, b - $\cos(KL) = 1$, c, d - $\cos(KL) = -1$

Перспективы метода теории групп и когерентных состояний

- Бесконечномерные обертывающие алгебры
- Супералгебры и супергруппы
- Атомные конденсаты
- Квантовая теория информации
- Квантовая инженерия
- Квантовая томография
- Квантовые игры
- ??? !!! …

Спасибо за внимание!