Теорема. Последовательность $\{x^m\} \subset \mathbb{R}^n$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Пример. Исследовать сходимость и найти предел последова-

Определение. Последовательность $\{x^m\} \subset \mathbb{R}^n$ называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое натуральное число M, что для любого $m \geq M$ и для любого натурального числа p выполняется неравенство $\rho(x^m, x^{m+p}) < \varepsilon$.

Пример. Исследовать сходимость и найти предел последовательности $\{x^m\} \subset \mathbb{R}^2$ (при условии, что он существует), если

$$x^m = \left(\frac{1}{m}, \frac{m-1}{m}\right)$$

Решение. Для того, чтобы исследовать сходимость последовательности точек в пространстве $\mathbb{R}^2$ необходимо и достаточно исследовать сходимость последовательностей соответствующих координат. Рассмотрим две последовательности $\{x_1^m\}$ и $\{x_2^m\}$, где

$$x_1^m = \frac{1}{m}, \quad x_2^m = \frac{m-1}{m}.$$

Имеем, что

$$\lim_{m\to\infty} x_1^m = 0, \quad \lim_{m\to\infty} x_2^m = 1,$$

и поэтому последовательность $\{x^m\}$ сходится и

$$\lim_{m\to\infty} x^m = x, \quad \text{где} \quad x = (0, 1)$$

Задания на сро

16. Исследовать сходимость и найти предел последовательности $\{x^m\}$ (при условии, что он существует), если

а) $x^m = \left(\frac{1}{m+1}, 1\right)$;

б) $x^m = \left(\frac{1}{m+1}, \frac{m+1}{m-1000}\right)$;

в) $x^m = \left(\sqrt{m+1} - \sqrt{m}, \frac{m-1}{m}, \frac{5m^2-100}{m^2-1000}\right)$;

г) $x^m = \left(\frac{(-1)^m}{m}, (1+\frac{1}{m})^m, \frac{m}{m^2+1}\right)$;

д) $x^m = \left((-1)^m, \frac{(-1)^m}{m}\right)$;

е) $x^m = (\sin m, m, 1)$;

ж) $x^m = \left(m \sin\frac{1}{m}, \frac{\sin m}{m}, \frac{1}{m}\right)$;

з) $x^m = \left(m, \frac{1}{\sqrt{m}}\right)$.

1.4 Функции нескольких переменных.

Пусть дано множество $M \subset \mathbb{R}^n$, и пусть каждой точке $x \in M$ ставится в соответствие число $u \in \mathbb{R}$. В этом случае говорят, что на множестве M определена числовая функция:

$$u = f(x), \ x \in M \quad \text{или} \quad u = f(x_1, \ldots, x_n), \ (x_1, \ldots, x_n) \in M.$$

Определение. Множество M называют множеством определения функции, точку x – аргументом или независимой переменной, ее координаты $x_1, \ldots, x_n$ – независимыми переменными, функцию $u = f(x)$ – функцией n переменных.

Определение. Графиком функции двух переменных называют множество

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in M, \ z = f(x, y)\}.$$

Аналогично определяется график функции трех и более переменных.

Пример. Дана функция

$$f(x, y) = xy - \frac{y}{x}.$$

Найти область определения функции, вычислить значение функции в точке $(1, 1)$. Вычислить $f(y, -x)$.

Решение. Функция определена в тех и только в тех точках (x, y), первая координата которых не обращается в нуль. Таким образом, $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ – ее область определения.

Для вычисления частного значения функции нужно подставить $x = 1$, $y = 1$. В результате получим $f(1, 1) = 0$.

Для вычисления $f(y, -x)$ нужно вместо x подставить y, а вместо y подставить $(-x)$. В результате получим $f(y, -x) = -xy + \frac{x}{y}$.

Определение. Уровнем (c-уровнем, $c \in \mathbb{R}$) функции $u = f(x)$, $x \in M \subset \mathbb{R}^n$ называют множество точек $x \in M$ таких, что

$$f(x) = c.$$

В случае $n = 2$ уровни функции называют линиями уровня; при $n = 3$ – поверхностями уровня.

Пример. Найти область определения и линии уровня функции

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y}}.$$

Задачи.

18. Найти $f(1,2)$, $f(2,-1)$, если

$$f(x,y)=\sqrt{xy^2+x+1}.$$

19. Найти $f(1,2,\pi)$, $f(\pi,-1,0)$, если

$$f(x,y,z)=\sin(xyz)+\cos(x+yz)$$

20. Найти $f(x,-y)$, $f(-x,y)$, $f(\frac{1}{x},\frac{1}{y})$, если

$$f(x,y)=\frac{x^2-y}{y^2-x}.$$

21. Найти $f(x,-y,z)$, $f(-x,y,z)$, $f(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z})$, если

$$f(x,y)=\frac{x+y+z}{x+y^2z^2}.$$

22. Найти область определения функций двух переменных, заданных формулами:

$$\text{а) } f(x,y)=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y},$$

$$\text{б) } f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2},$$

$$\text{в) } f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1),$$

$$\text{г) } f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}},$$

Предел функции нескольких переменных

Определение. Пусть x^0 – предельная точка области определения M функции $u = f(x)$, $x \in M \subset \mathbb{R}^n$. Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке x^0, если для любой последовательности точек $\{x^m\} \subset M$, сходящейся к x^0 и $x^m \neq x^0$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ числовая последовательность $f(x^m)$ сходится к a (определение предела функции по Гейне)

Определение. Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in M$, удовлетворяющих условию $0 < \rho(x, x^0) < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$ (определение предела функции по Коши)

В следующей теореме перечислены арифметические свойства предела функции

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x^0 пределы a и b соответственно. Тогда в точке x^0 существуют пределы функций

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

(в случае $b \neq 0$), равные соответственно

$$a \pm b, \quad ab, \quad \frac{a}{b}.$$

Теорема о двух милиционеров

Теорема. Пусть справедливо неравенство

$$f(x) \le g(x) \le h(x), \text{ для всех } x \in U(x^0)\backslash\{x^0\},$$

где $U(x^0)$ – некоторая окрестность точки x^0; пусть

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = \lim_{x \to x^0} h(x) = a.$$

Тогда существует предел функции $g(x)$ в точке x^0, и этот предел равен a (теорема о промежуточной переменной).

Следствие. Если

$$\lim_{x \to x^0} |f(x)| = 0,$$

то в точке x^0 существует предел функции $f(x)$ и

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = 0.$$

Теорема. Для того, чтобы функция $f(x)$ имела предел в точке x^0, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось число $\delta > 0$ такое, что для любых точек x' и x'' из области определения функции, удовлетворяющих условиям $0 < \rho(x', x^0) < \delta$

и $0 < \rho(x'', x^0) < \delta$, выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ (критерий Коши существования предела функции).

Определение. Пусть функция $f(x, y)$ определена на параметрически заданной кривой L:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Пусть точка (x_0, y_0), принадлежащая кривой L такая, что

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0), \quad t_0 \in [\alpha, \beta].$$

Пределом функции $f(x, y)$ по кривой L в точке (x_0, y_0) называется предел

$$\lim_{t \to t_0} f(x(t), y(t)).$$

Примеры на вычисления предела функции двух переменных.

Пример. Найти предел

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1}-1}{x^2+(y-2)^2}.$$

Решение. Рассмотрим $\rho = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$. Стремление (x,y) к точке $(0,2)$ означает, что $\rho \to 0$, поэтому

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1}-1}{x^2+(y-2)^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\sqrt{\rho^2+1}-1}{\rho^2} = \frac{1}{2}.$$

Пример. Найти предел

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$

Решение. Справедливы следующая цепочка равенств и неравенств:

$$0 \le \left| \frac{x^2y}{x^2+y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \le |y|.$$

Далее, имеем

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = \lim_{y\to 0} |y| = 0$$

и

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \equiv 0.$$

Поэтому из теоремы о промежуточном значении следует, что

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

Пример. Выяснить, существует ли предел

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Решение. Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Построим две последовательности точек, сходящихся к точке $(0,0)$, но пределы значений функции на этих последовательностях не будут равны. Отсюда будет следовать, что функция не имеет передела в точке $(0,0)$.

Возьмем первую последовательность $(x_m, y_m) = (\frac{1}{m}, \frac{1}{m})$, сходящуюся к $(0,0)$ при $m \to \infty$. В этом случае $f(x_m, y_m) = 0$, и поэтому $f(x_m, y_m) \to 0$ при $m \to \infty$.

Возьмем вторую последовательность $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, 0)$, также сходящуюся к $(0,0)$ при $k \to \infty$; тогда $f(x_k, y_k) = 1$, и поэтому $f(x_k, y_k) \to 1$ при $k \to \infty$. Таким образом, предел функции $f(x,y)$ в точке $(0,0)$ не существует.

Пример. Найти предел функции

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{y^2 + x^4}$$

в точке $(0, 0)$ по прямой $x = t$, $y = 2t$.

Решение. Найдем значение функции $f(x, y)$ на заданной прямой:

$$f(t, 2t) = \frac{2t}{4 + t^2}.$$

Видно, что $f(t, 2t) \to 0$ при $t \to 0$.

Задания на сро

Вычислить предел функции $f(x,y)$ в точке $(0,0)$:

$$36.\ f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}-2};$$

$$37.\ f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2+6}+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+1}-\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$38.\ f(x,y)=(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}};$$

$$39.\ f(x,y)=\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2};$$

$$40.\ f(x,y)=\frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2};$$

$$41^*.\ f(x,y)=\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)^{x^2+y^2}.$$

50. Найти предел функции $f(x,y)$ в точке $(0,0)$ по прямой $x=\alpha t$, $y=\beta t$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, если

$$\text{а) } f(x,y)=\frac{y-2x^2}{y-x^2};$$

$$\text{б) } f(x,y)=\frac{x^2\sin y+y^2\sin x}{x^4+y^2};$$

$$\text{в) } f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4};$$

$$\text{г) } f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2};$$

Показать, что при $(x,y)\to(0,0)$ функция $f(x,y)$ не имеет предела:

$$46.\ f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2};$$

$$47.\ f(x,y)=\frac{x}{y};$$

$$48.\ f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3};$$

$$49.\ f(x,y)=\frac{\sin x}{\sin y}.$$

Повторные пределы

Будем иметь дело с функциями двух переменных $f(x, y)$. Пусть (x_0, y_0) – некоторая точка, а U – ее некоторая окрестность. Зафиксируем y и рассмотрим предел

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y - \text{фикс.}}} f(x, y)$$

Если для любого y такого, что $(x_0, y) \in U$, существует этот предел, то мы получим некоторую функцию $\phi(y)$ одной переменной y. Далее, если существует

$$\lim_{y \to y_0} \phi(y),$$

то в этом случае говорят, что существует повторный предел функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0), который обозначается следующим образом:

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)$$

Аналогично определяется повторный предел

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y)$$

Примеры на повторные пределы

Пример. Вычислить повторные пределы функции

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

в точке $(0, 0)$.

Решение. По определению имеем

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1;$$

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Этот пример показывает, что повторные пределы функции могут существовать, не смотря на то, что функция не имеет предела.

С другой стороны, функция может иметь предел, но повторные пределы могут не существовать.

Пример. Показать, что функция

$$f(x,y) = x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}$$

имеет предел в точке $(0,0)$, но оба повторных предела не существуют.

Решение. Так как $|\sin t| \le 1$ для любых $t \in \mathbb{R}$, то

$$0 \le |f(x,y)| \le |x| + |y|;$$

следовательно, $f(x,y) \to 0$ при $(x,y) \to (0,0)$. Теперь покажем, что повторные пределы не существуют. Рассмотрим функцию $f(x,y)$ при фиксированном y. В силу того, что не существует предел

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y - \text{фикс.}}} \left(x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}\right),$$

следует, что не существует и повторный предел

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}\right)$$

Аналогичные рассуждения проводятся и для второго повторного предела.

Задания на сро

53. Исследовать существование и найти

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y), \quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y), \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),$$

если

а) $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y}{x^3 + y}$;

б) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$;

в) $f(x,y) = \dfrac{x^2y + xy^2}{x^2 - xy + y^2}$;

г) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$;

Непрерывные функции нескольких переменных

Определение. Функцию $f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$, называют непрерывной в точке x^0, если

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0)$$

Определение. Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке множества $M \subset \mathbb{R}^n$, то говорят, что она непрерывна на множестве M.

Определение. Приращением функции $u = f(x)$ в точке x^0 называют выражение

$$\Delta u = f(x) - f(x^0),$$

где x – произвольная точка из области определения функции $f(x)$.

Введем обозначения $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_n^0$. Тогда приращение функции можно записать в виде

$$\Delta u = f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

Теорема. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x^0 тогда и только тогда, когда

$$\lim_{(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\to(0,\dots,0)} \Delta u = 0.$$

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x^0; тогда

$$f(x)g(x), \quad f(x) \pm g(x) \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{при } g(x^0) \neq 0)$$

непрерывны в точке x^0.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x^0, кроме, быть может, самой точки x^0. Точку x^0 называют точкой разрыва функции $f(x)$ в следующих случаях:

1) функция $f(x)$ неопределена в точке x^0;

2) функция $f(x)$ определена в точке x^0, но

а) не существует предел в точке x^0,

б) предел функции в точке x^0 существует, но не равен $f(x^0)$.

В случае б) точку x^0 называют точкой устранимого разрыва.

Сформулируем основные свойства непрерывных функций нескольких переменных.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$; пусть $f(x^0) \neq 0$. Тогда существует такая ε-окрестность точки x^0, что для любой точки x, принадлежащей этой окрестности и области определения функции, $f(x) \neq 0$ и знак $f(x)$ совпадает со знаком $f(x^0)$ (теорема об устойчивости знака непрерывной функции)

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна во всех точках связного множества $X \in \mathbb{R}^n$. Пусть $f(x_1)$ и $f(x_2)$ – значения функции в точках x_1 и x_2 из X соответственно; пусть c любое число, лежащее между $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Тогда для любой непрерывной кривой L, соединяющей точки x_1 и x_2 и целиком лежащей в X, найдется такая точка $y \in L$, что $f(y) = c$ (теорема о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение)

Теорема. Если функция непрерывна на замкнутом ограниченном множестве, то она ограничена на этом множестве (первая теорема Вейерштрасса)

Теорема. Если функция непрерывна на замкнутом ограниченном множестве, то она достигает на этом множестве своих точных верхней и нижней граней (вторая теорема Вейерштрасса)

Пример. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x, y) = \frac{x + y + 1}{x^2 + y^2}.$$

Решение. В числителе и знаменателе стоят многочлены, которые являются непрерывными функциями (как сумма степенных функций) в любой точке плоскости. Поэтому функция $f(x, y)$ будет непрерывна везде, где знаменатель не обращается в нуль (как частное непрерывных функций) Знаменатель обращается в нуль в единственной точке $(0, 0)$. В этой точке функция не определена и, следовательно, терпит разрыв.

Пример. Найти и исследовать точки разрыва функции

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}.$$

Решение. Функция $f(x, y)$ является непрерывной во всех точка плоскости, кроме точки $(0, 0)$ как частное двух многочленов. Найдем предел функции в точке $(0, 0)$:

$$0 \leq \left|\frac{x^3}{x^2 + y^2}\right| = |x|\frac{x^2}{x^2 + y^2}| \leq |x| \to 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \to (0, 0),$$

и поэтому по теореме о промежуточной переменной

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0.$$

Следовательно, точка $(0, 0)$ является точкой устранимого разрыва, то есть, доопределяя функцию $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$ нулем, получим непрерывную на всей плоскости функцию.

сро

56. Исследовать на непрерывность функции

$$\text{а) } f(x,y) = \frac{x^2+2y+4}{y^2-2x};$$

$$\text{б) } f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2};$$

$$\text{в) } f(x,y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}};$$

$$\text{г) } f(x,y) = \frac{1}{(x-y)^2}$$

57. Найти все точки разрыва функции $f(x,y)$; указать точки устранимого разрыва:

$$\text{а) } f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2};$$

$$\text{б) } f(x,y) = x\sin\frac{y^2}{x^2+y^2};$$

$$\text{в) } f(x,y) = \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5};$$