Аналоги теореми порівняння Колмогорова та їх застосування

Керівник: доцент Коваленко О. В.

Студентка: Конограй К. Ю.

Група: ММ-13-1

Мета: отримання аналогів теореми порівняння Колмогорова

Методи дослідження: класичні методи математичного та функціонального аналізу

Функція порівняння. Ідеальні сплайни Ейлера

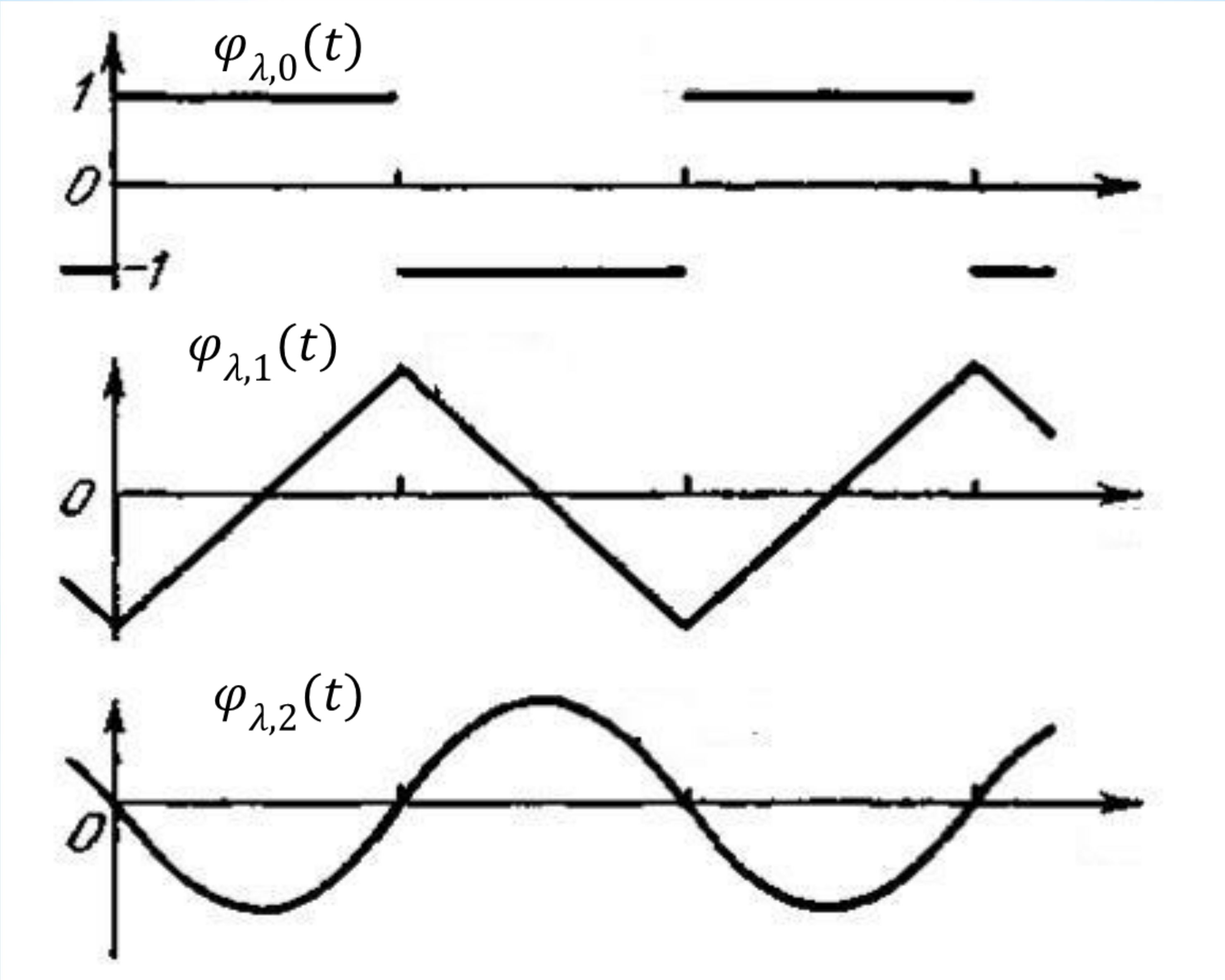
$\varphi \in C(R)$ є функцією порівняння для функції $f \in C(R)$, якщо $\forall c, \alpha \in R$ різниця $\varphi(t)$-[$f(t+\alpha)+c$] на кожному проміжку монотонності $\varphi(t)$ або не змінює знак, або змінює один раз.

У якості функцій порівняння будуть виступати ідеальні сплайни Ейлера

$$\varphi_{\lambda,0} = \operatorname{sgn} \sin \lambda t = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(2\nu + 1)\lambda t}{2\nu + 1},$$

$$\varphi_{\lambda,2i-1} = \int_{\pi/(2\lambda)}^{t} \varphi_{\lambda,2i-2}(u)du = \frac{(-1)^{i} 4}{\pi \lambda^{2i-1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos(2\nu + 1)\lambda t}{(2\nu + 1)^{2i}},$$

$$\varphi_{\lambda,2i} = \int_{0}^{t} \varphi_{\lambda,2i-1}(u)du = \frac{(-1)^{i} 4}{\pi \lambda^{2i}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(2\nu + 1)\lambda t}{(2\nu + 1)^{2i+1}}, \qquad i = 1,2, \ldots$$



$\varphi_{\lambda,0}(t)$
1
0
-1
$\varphi_{\lambda,1}(t)$
0
$\varphi_{\lambda,2}(t)$
0

Симетричний випадок

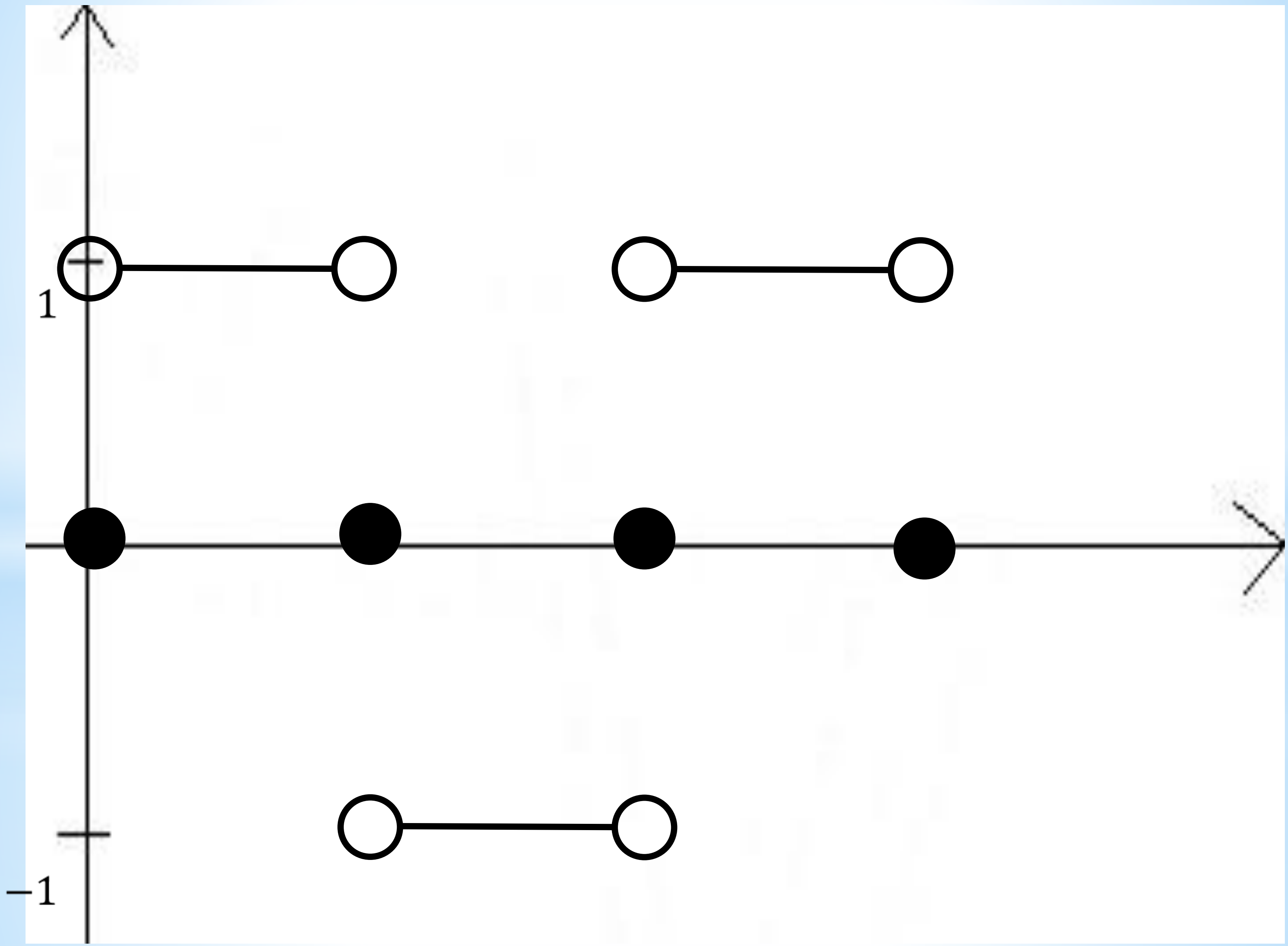
Розглянемо функцію

$$\varphi_{\lambda,r}^{(r)} = \varphi_{\lambda,0}(t) = \begin{cases} 1, t \in (0;\gamma), \\ -1, t \in \left(\gamma; \dfrac{2\pi}{\lambda}\right), \\ 0, t = 0, \gamma. \end{cases}$$

де число γ обрали так, аби виконувалась рівність

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} \varphi_{\lambda,0}(t)dt = 0,$$

звідси $\gamma = \frac{\pi}{\lambda}$.


1
−1

Теорема А. Нехай $r \in N$. Якщо функція $f \in W^r_\infty(R)$ і число λ вибрано так, що $||f|| \leq ||\varphi_{\lambda,r}||$. То функція $\varphi_{\lambda,r}$ є функцією порівняння для функції f.

Несиметричний випадок

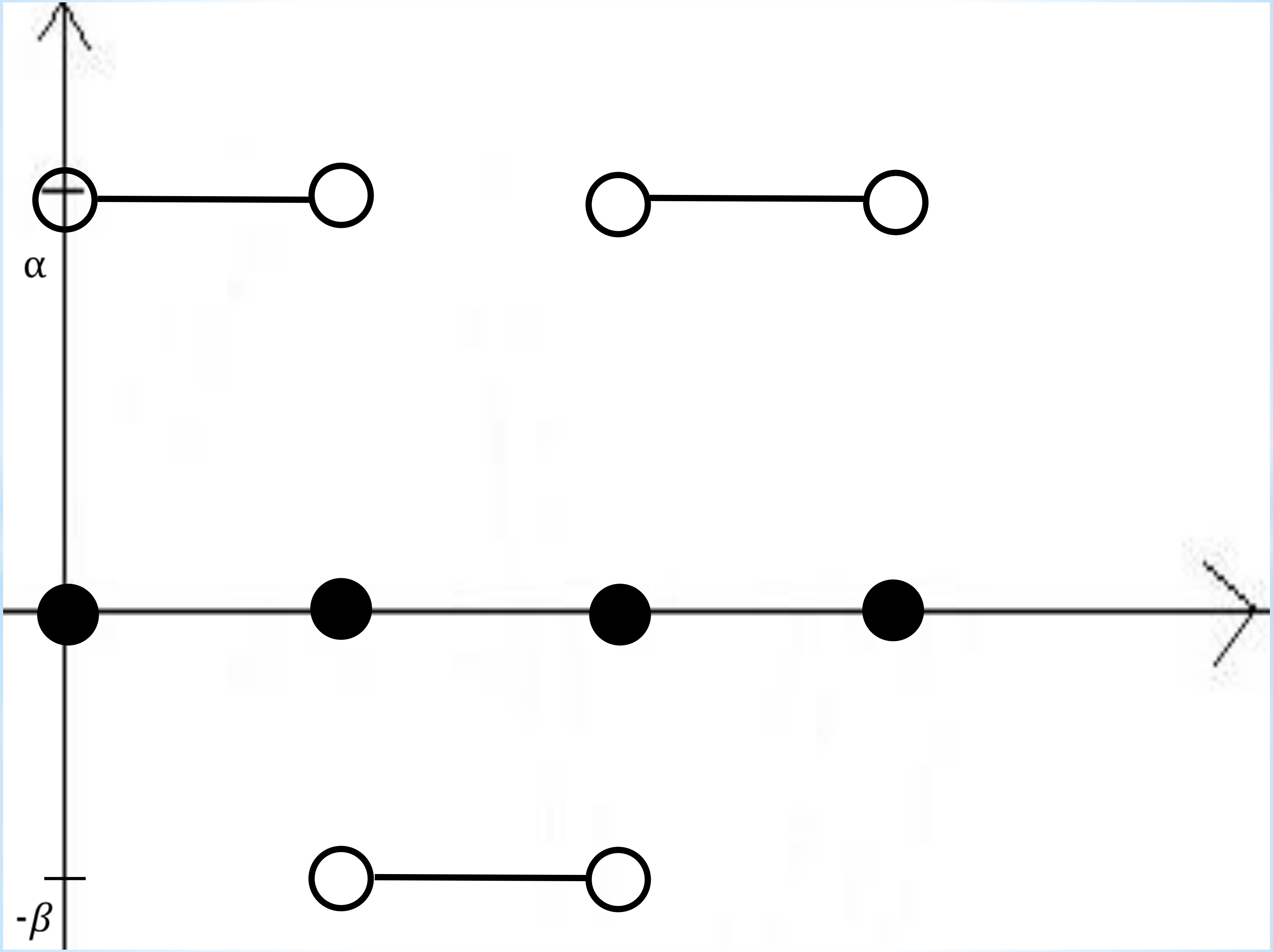
Розглянемо функцію

$$\varphi_{\lambda,r}^{(r)} = \varphi_{\lambda,0}(t) = \begin{cases} \alpha, t \in (0;\gamma), \\ -\beta, t \in \left(\gamma; \dfrac{2\pi}{\lambda}\right), \\ 0, t = 0, \gamma. \end{cases}$$

де число *γ=γ(α,β)* обрали так, щоб виконувалось рівняння

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} \varphi_{\lambda,0}(t;\alpha,\beta)dt = 0,$$

звідси $\gamma = \frac{2\pi\beta}{\alpha\lambda+\beta\lambda}$.


α
-β

Теорема B. Нехай $r \in N$; $\alpha, \beta > 0$; $f \in W^r_{\infty,\infty}(R)$ і число λ обрали так, що для всіх $t \in R$

$$\min_t \varphi_{\lambda,r}(t; \alpha, \beta) \leq f(t) \leq \max_t \varphi_{\lambda,r}(t; \alpha, \beta).$$

Тоді функція $\varphi_{\lambda,r}$ є функцією порівняння для функції $f(t)$.

Екстремальна функція

Нехай $\gamma < \delta$, побудуємо функцію $\varphi_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(a;t)$.

Нехай $a \geq 0$, a- довільне, $b = \frac{\gamma}{\delta}a$,

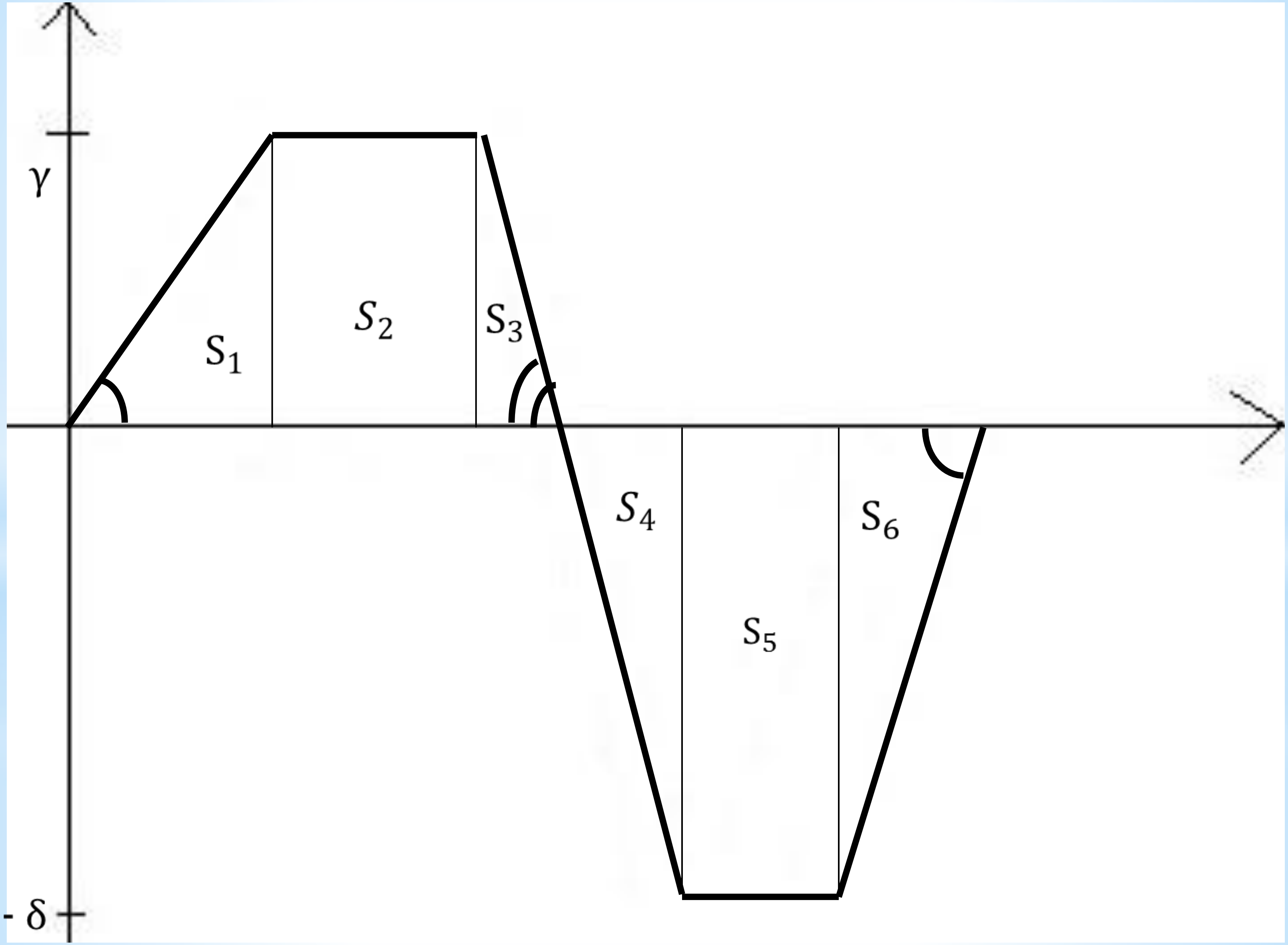
$a_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\frac{\delta^2-\gamma^2}{\gamma}$.

Покажемо, що $\int\limits_0^T \varphi_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(a;t)dt = 0$. Дійсно:

$$\int\limits_0^T \varphi_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(a;t)dt = S_1 + S_2 + S_3 - S_4 - S_5 - S_6 =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma\frac{\gamma}{\alpha} + (a + a_0)\gamma + \frac{1}{2}\gamma\frac{\gamma}{\beta} - \left(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\beta}\delta + b\delta + \frac{1}{2}\frac{\delta}{\alpha}\delta\right) = 0$$

$$
\varphi_1(\alpha,\beta,\gamma,\delta,a;t)=
\begin{cases}
\alpha t,\ t\in\left[0;\dfrac{\gamma}{\alpha}\right], \\
\gamma,\ t\in\left[\dfrac{\gamma}{\alpha};\dfrac{\gamma}{\alpha}+a+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)\dfrac{\delta^2-\gamma^2}{\gamma}\right], \\
-\beta\left(t-\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}+a+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)\dfrac{\delta^2-\gamma^2}{\gamma}\right)\right)+\gamma,\ t\in\left[\dfrac{\gamma}{\alpha}+a+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)\dfrac{\delta^2-\gamma^2}{\gamma}\right] \\
\qquad \dfrac{\delta+\gamma}{\beta}+\dfrac{\gamma}{\alpha}+a+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)\dfrac{\delta^2-\gamma^2}{\gamma}\Bigg], \\
-\delta,\ t\in\left[\dfrac{\delta+\gamma}{\beta}+\dfrac{\gamma}{\alpha}+a+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)\dfrac{\delta^2-\gamma^2}{\gamma};\right. \\
\qquad \left.\dfrac{\delta+\gamma}{\beta}+\dfrac{\gamma}{\alpha}+a+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)\dfrac{\delta^2-\gamma^2}{\gamma}+\dfrac{\gamma}{\delta}a\right], \\
\alpha\left(t-\left(\dfrac{\gamma+\delta}{\alpha}+\dfrac{\delta+\gamma}{\beta}+a+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)\dfrac{\delta^2-\gamma^2}{\gamma}+\dfrac{\gamma}{\delta}a\right)\right) \\
t\in\left[\dfrac{\delta+\gamma}{\beta}+\dfrac{\gamma}{\alpha}+a+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)\dfrac{\delta^2-\gamma^2}{\gamma}+\dfrac{\gamma}{\delta}a;\right. \\
\qquad \left.\dfrac{\gamma+\delta}{\alpha}+\dfrac{\delta+\gamma}{\beta}+a+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)\dfrac{\delta^2-\gamma^2}{\gamma}+\dfrac{\gamma}{\delta}a\right];
\end{cases}
$$



γ
S1
S2
S3
S4
S5
S6
- δ

Деякі властивості екстремального сплайна

$\varphi_r(\alpha, \beta, \gamma, \delta, a; t)$ має два нулі на періоді і при $r \geq 2$ строго монотонна між точками локального екстремуму.

Лема. *Нехай x належить*

простору $W^{r}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(R)$.

Тоді $\exists\ a \geq 0$:

$$\min_{t\in R} \varphi_r(a;t) \leq x(t) \leq \max_{t\in R} \varphi_r(a;t) \quad \forall t\ .$$

Основні результати

Теорема. *Якщо* $f \in W^r_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(-\infty;\infty)$, $r \in N$ *і* $a \geq 0$ *таке, що*

$$\min_{t \in R} \varphi_r(\alpha,\beta,\gamma,\delta;t) \leq f(t) \leq \max_{t \in R} \varphi_r(\alpha,\beta,\gamma,\delta;t)$$

для будь- якого $t \in (-\infty;\infty)$, *то функція* $\varphi_r(\alpha,\beta,\gamma,\delta,a;t)$ *є функцією порівняння для функції* $f(t)$.

* Дякую за увагу!