

Аналоги теореми порівняння Колмогорова та їх застосування

Керівник: доцент Коваленко О. В.

Студентка: Конограй К. Ю.

Група: ММ-13-1

**Мета: отримання аналогів
теорема порівняння
Колмогорова**

**Методи дослідження: класичні
методи математичного та
функціонального аналізу**

Функція порівняння. Ідеальні сплайни Ейлера

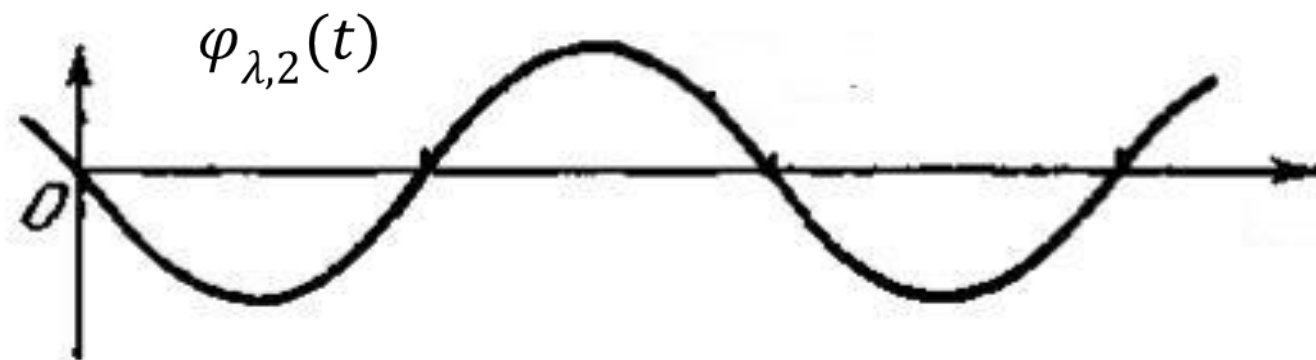
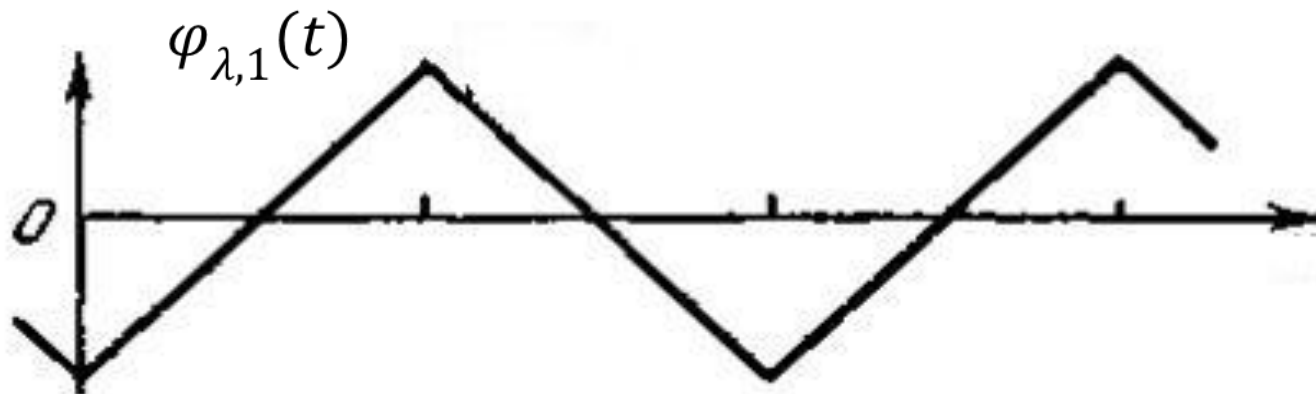
$\varphi \in C(R)$ є функцією порівняння для функції $f \in C(R)$, якщо $\forall c, \alpha \in R$ різниця $\varphi(t) - [f(t + \alpha) + c]$ на кожному проміжку монотонності $\varphi(t)$ або не змінює знак, або змінює один раз.

У якості функцій порівняння будуть виступати ідеальні сплайни Ейлера

$$\varphi_{\lambda,0} = \operatorname{sgn} \sin \lambda t = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(2\nu + 1)\lambda t}{2\nu + 1},$$

$$\varphi_{\lambda,2i-1} = \int_{\pi/(2\lambda)}^t \varphi_{\lambda,2i-2}(u) du = \frac{(-1)^i 4}{\pi \lambda^{2i-1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos(2\nu + 1)\lambda t}{(2\nu + 1)^{2i}},$$

$$\varphi_{\lambda,2i} = \int_0^t \varphi_{\lambda,2i-1}(u) du = \frac{(-1)^i 4}{\pi \lambda^{2i}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(2\nu + 1)\lambda t}{(2\nu + 1)^{2i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots$$



Симетричний випадок

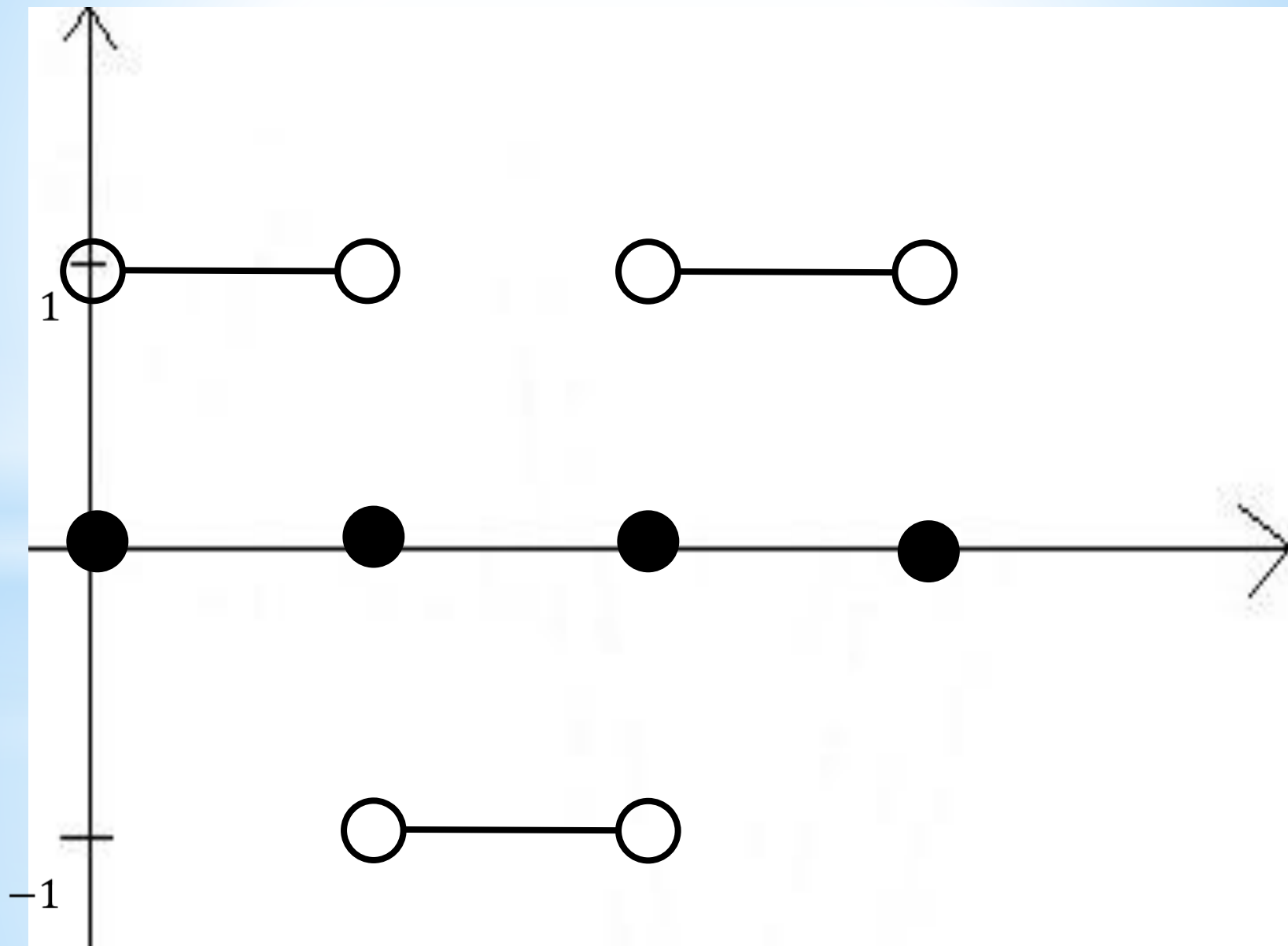
Розглянемо функцію

$$\varphi_{\lambda,r}^{(r)} = \varphi_{\lambda,0}(t) = \begin{cases} 1, t \in (0; \gamma), \\ -1, t \in \left(\gamma; \frac{2\pi}{\lambda}\right), \\ 0, t = 0, \gamma. \end{cases}$$

де число γ обрали так, аби виконувалась рівність

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} \varphi_{\lambda,0}(t) dt = 0,$$

звідси $\gamma = \frac{\pi}{\lambda}$.



Теорема А. Нехай $r \in \mathbb{N}$. Якщо функція $f \in W_{\infty}^r(\mathbb{R})$ і число λ вибрано так, що $\|f\| \leq \|\varphi_{\lambda,r}\|$.
То функція $\varphi_{\lambda,r}$ є функцією порівняння для функції f .

Несиметричний випадок

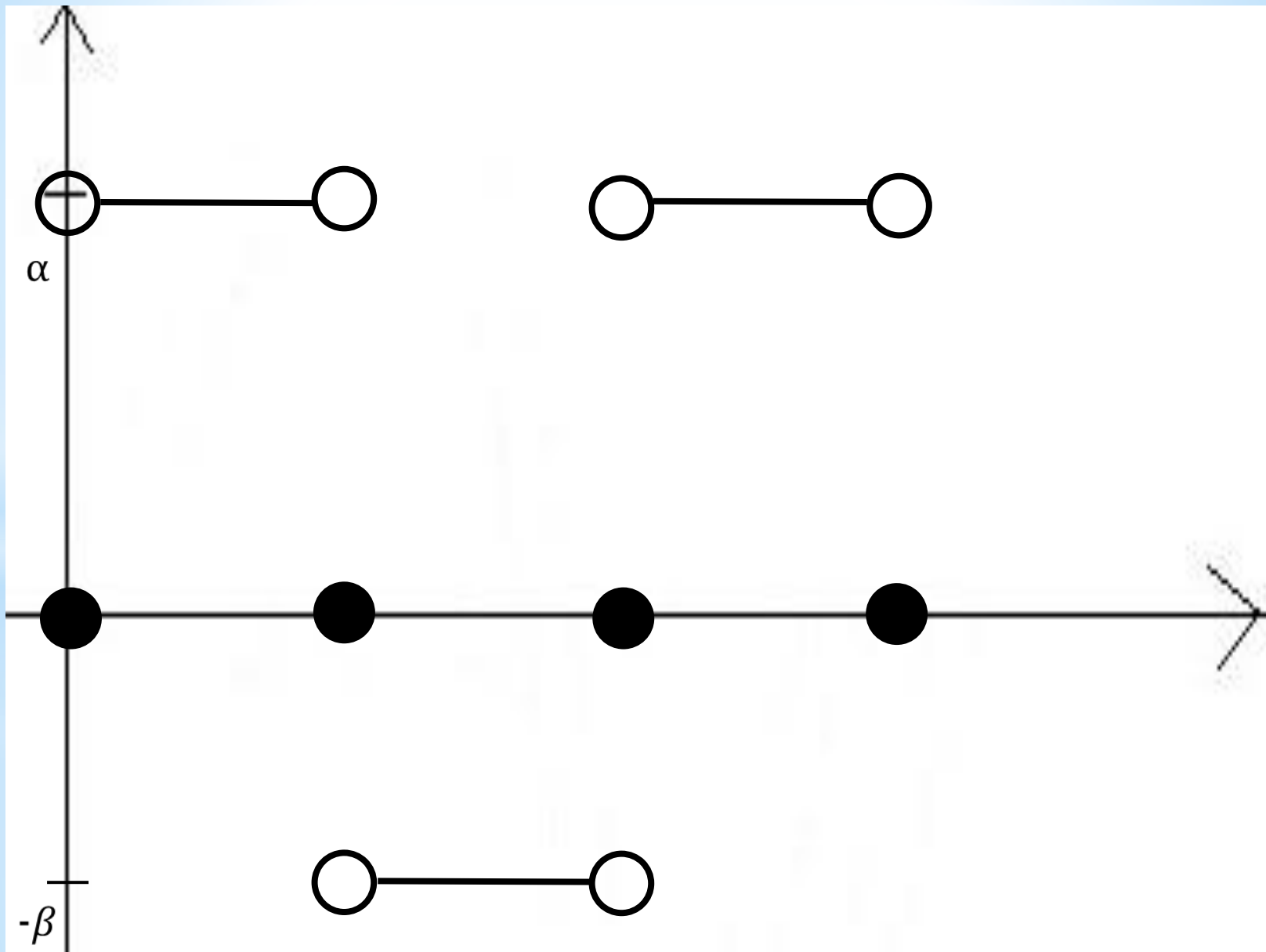
Розглянемо функцію

$$\varphi_{\lambda,r}^{(r)} = \varphi_{\lambda,0}(t) = \begin{cases} \alpha, t \in (0; \gamma), \\ -\beta, t \in \left(\gamma; \frac{2\pi}{\lambda}\right), \\ 0, t = 0, \gamma. \end{cases}$$

де число $\gamma = \gamma(a, \beta)$ обрали так, щоб виконувалось рівняння

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} \varphi_{\lambda,0}(t; \alpha, \beta) dt = 0,$$

звідси $\gamma = \frac{2\pi\beta}{\alpha\lambda + \beta\lambda}$.



Теорема В. Нехай $r \in \mathbb{N}$; $\alpha, \beta > 0$; $f \in W_{\infty, \infty}^r(\mathbb{R})$ і число λ обрали так, що для всіх $t \in \mathbb{R}$

$$\min_t \varphi_{\lambda, r}(t; \alpha, \beta) \leq f(t) \leq \max_t \varphi_{\lambda, r}(t; \alpha, \beta).$$

Тоді функція $\varphi_{\lambda, r}$ є функцією порівняння для функції $f(t)$.

Екстремальна функція

Нехай $\gamma < \delta$, побудуємо функцію $\varphi_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(a; t)$.

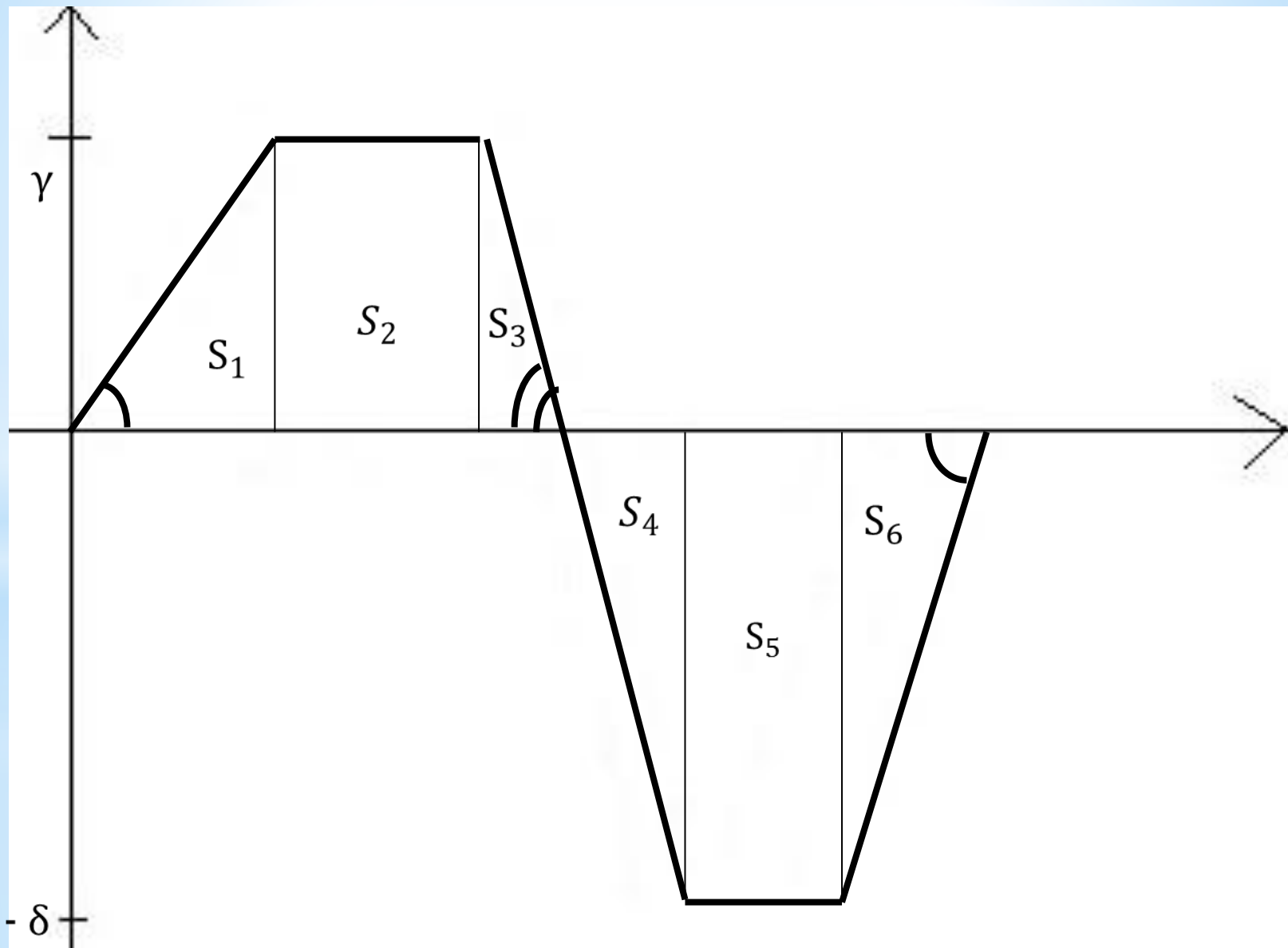
Нехай $a \geq 0$, a - довільне, $b = \frac{\gamma}{\delta} a$,

$$a_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\delta^2 - \gamma^2}{\gamma}.$$

Покажемо, що $\int_0^T \varphi_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(a; t) dt = 0$. Дійсно:

$$\begin{aligned} \int_0^T \varphi_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(a; t) dt &= S_1 + S_2 + S_3 - S_4 - S_5 - S_6 = \\ &= \frac{1}{2} \gamma \frac{\gamma}{\alpha} + (a + a_0) \gamma + \frac{1}{2} \gamma \frac{\gamma}{\beta} - \left(\frac{1}{2} \frac{\delta}{\beta} \delta + b \delta + \frac{1}{2} \frac{\delta}{\alpha} \delta \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\varphi_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta, a; t) = \left\{ \begin{array}{l} \alpha t, t \in \left[0; \frac{\gamma}{\alpha}\right], \\ \gamma, t \in \left[\frac{\gamma}{\alpha}; \frac{\gamma}{\alpha} + a + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\delta^2 - \gamma^2}{\gamma}\right], \\ -\beta \left(t - \left(\frac{\gamma}{\alpha} + a + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\delta^2 - \gamma^2}{\gamma}\right)\right) + \gamma, t \in \left[\frac{\gamma}{\alpha} + a + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\delta^2 - \gamma^2}{\gamma}\right] \\ \\ \frac{\delta + \gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\alpha} + a + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\delta^2 - \gamma^2}{\gamma}, \\ -\delta, t \in \left[\frac{\delta + \gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\alpha} + a + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\delta^2 - \gamma^2}{\gamma}; \right. \\ \left. \frac{\delta + \gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\alpha} + a + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\delta^2 - \gamma^2}{\gamma} + \frac{\gamma}{\delta} a\right], \\ \alpha \left(t - \left(\frac{\gamma + \delta}{\alpha} + \frac{\delta + \gamma}{\beta} + a + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\delta^2 - \gamma^2}{\gamma} + \frac{\gamma}{\delta} a\right)\right) \\ t \in \left[\frac{\delta + \gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\alpha} + a + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\delta^2 - \gamma^2}{\gamma} + \frac{\gamma}{\delta} a; \right. \\ \left. \frac{\gamma + \delta}{\alpha} + \frac{\delta + \gamma}{\beta} + a + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\delta^2 - \gamma^2}{\gamma} + \frac{\gamma}{\delta} a\right]; \end{array} \right.$$



Деякі властивості екстремального сплайна

$\varphi_r(\alpha, \beta, \gamma, \delta, a; t)$ має два нулі на
періоді і при $r \geq 2$ строго
монотонна між точками
локального екстремуму.

Лема. Нехай x належить простору $W_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}^r(R)$.

Тоді $\exists a \geq 0$:

$$\min_{t \in R} \varphi_r(a; t) \leq x(t) \leq \max_{t \in R} \varphi_r(a; t) \quad \forall t .$$

Основні результати

Теорема. Якщо $f \in W_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}^r(-\infty; \infty)$, $r \in N$ і

$a \geq 0$ таке, що

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \varphi_r(\alpha, \beta, \gamma, \delta; t) \leq f(t) \leq \max_{t \in \mathbb{R}} \varphi_r(\alpha, \beta, \gamma, \delta; t)$$

для будь-якого $t \in (-\infty; \infty)$, то функція

$\varphi_r(\alpha, \beta, \gamma, \delta, a; t)$ є функцією порівняння для функції $f(t)$.

 **Дякую за
увагу!**