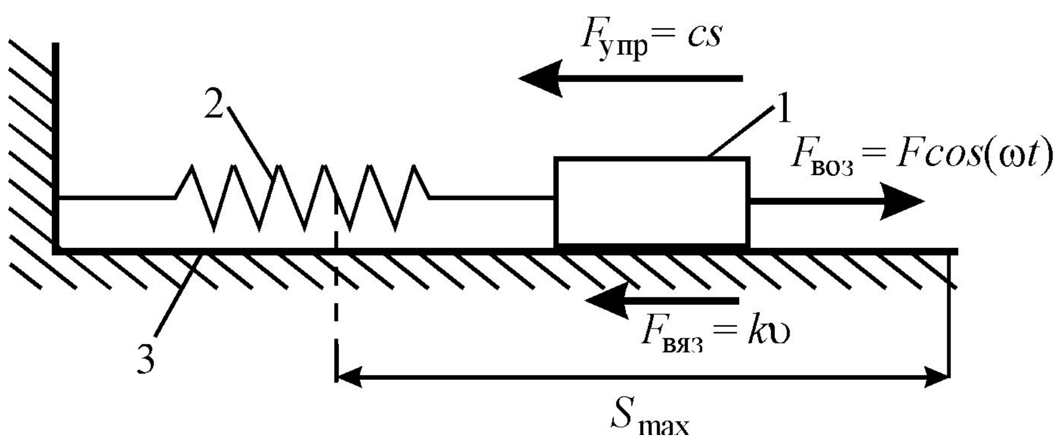
Пример Определить критерии физического подобия для механической системы, находящейся под воздействием возмущающей силы $F_{воз} = F sin(\omega t)$. Система представляет груз массы M, который колеблется на пружине с жесткостью c, при перемещении массы на расстояние S появится упругая сила $F_{упр} = -cS$, вязкое сопротивление $F_{вяз} = k\upsilon$, (k – коэффициент пропорциональности).



Триботехническая система в виде гасителя колебаний транспортных средств: 1 − масса; 2 − пружина; 3 − опора; $F_{воз}$ − возмущающая сила; $F_{упр}$ − упругая сила; $F_{вяз}$ − сила вязкого сопротивления

Решение. Рассматриваемая схема может быть реализована в виде гасителя вертикальных колебаний.

1. Выявляем параметры, которые определяют процесс колебания механической системы:

1)$P_1 - M$ (кг), 2) $P_2 - \omega$ ($с^{-1}$), 3) $P_3 - F$ (кг·м/$с^2$),
4) $P_4 - S$ (м), 5) $P_5 - \mu$ (кг/с), 6) $P_6 - c$ (кг/$с^2$),
7) $P_7 - t$ (с).

Участвующих величин будет семь ($m = 7$). Функциональная зависимость, подлежащая исследованию, получит вид:

$\Phi(P_1, P_2, P_3, P_4, P_{5,} P_{6,} P_7) = 0$ или $\Phi(M, \omega, F, S, \mu, c, t) = 0$, где $P_1, P_2 ,\dots, P_7$ − параметры системы.

2. Выберем три ($k = 3$) независимые единицы применительно к системе измерений LMT (здесь L – линейный размер, м; M − масса, кг; T − время, с). В качестве основных (базисных) параметров примем: $P_1 = M$, кг; $P_2 = \omega$, $с^{-1}$, $P_3 = F$, кг·м/$с^2$.

3. Определяем размерность каждого основного (базисного) параметра:

$$P_1 = [M] = [L]^0\,[M]^1\,[T]^0,$$
$$P_2 = [\omega] = [L]^0\,[M]^0\,[T]^{-1},$$
$$P_3 = [F] = [L]^1\,[M]^1\,[T]^{-2}.$$

Остальные четыре параметра ($Ni - k = 7 - 4 = 3$) уравнения примут вид

$$P_4 = [S] = [L]^1\,[M]^0\,[T]^0,$$
$$P_5 = [\mu] = [L]^0\,[M]^1\,[T]^{-1},$$
$$P_6 = [c] = [L]^0\,[M]^1\,[T]^{-2},$$
$$P_7 = [t] = [L]^0\,[M]^0\,[T]^1.$$

4. Проверяем правильность сделанного выбора по числу независимых (базисных) параметров ($k = 3$), составив матрицу размерностей

Используя формулы Крамера

$$D_{1-3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

$$\begin{array}{r} p_1 = M \\ D_{1-3} = p_1 = M \\ p_1 = M \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = +1.$$

т. е. $D_{1-3} \neq 0$. Следовательно, значение базисных параметров p_1, p_2, p_3 и их количество (k = 3) выбрано правильно и величины M, ω, F действительно независимы.

Определитель $D = 0$ принимается в частных случаях, например, при использовании в опытах одинаковых материалов как для модели, так и образца, т. е. $C_\lambda = C_\mu = C_T = C_{HB} = 1$ или $\lambda_м = \lambda_0$, $\mu_м = \mu_0$, $E_м = E_0$, $HB_м = HB_0$ и т.д. (здесь λ – теплопроводность; μ – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; HB – твердость материала)

5. Составляются выражения для оставшихся $n = m - k$ критериев подобия. В общем виде их можно записать в виде дробей:

$$\pi_4 = \frac{[S]}{[M]^{\alpha_s}[\omega]^{\beta_s}[F]^{\varepsilon_s}} \qquad \pi_5 = \frac{[\mu]}{[M]^{\alpha_k}[\omega]^{\beta_k}[F]^{\varepsilon_k}}$$

$$\pi_6 = \frac{[c]}{[M]^{\alpha_c}[\omega]^{\beta_c}[F]^{\varepsilon_c}} \qquad \pi_7 = \frac{[t]}{[M]^{\alpha_t}[\omega]^{\beta_t}[F]^{\varepsilon_t}}.$$

Нахождение критериев подобия заключается в отыскании значений показателей степени.

6. Определяются значения показателей степени α, β, ε.

Находят определители D_{is} для параметров P_{4-7}, т. е.

$$\alpha_4^{\alpha} = D_4^{\alpha} / D_{1-3} \quad , \ldots, \qquad \alpha_7^{\varepsilon} = D_7^{\varepsilon} / D_{1-3}$$

Значения D_{4-7}^{α}, D_{4-7}^{β}, D_{4-7}^{ε}

могут быть найдены из определителя $D_{1\text{-}3}$ после замены в нем i-строки на строку, составленную из показателей степени $\alpha_{S,\mu,c,t}$, $\beta_{S,\mu,c,t}$, $\varepsilon_{S,\mu,c,t}$ величин p_4, p_5, p_6, p_7 взятых из формулы:

$$D_4^{\alpha} = \begin{array}{c|ccc|} & M & L & T \\ p_4 & 0 & 1 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 & -1 \\ p_3 & 1 & 1 & -2 \end{array} = -1; \quad D_4^{\beta} = \begin{array}{c|ccc|} & M & L & T \\ p_1 & 1 & 0 & 0 \\ p_4 & 0 & 1 & 0 \\ p_3 & 1 & 1 & -2 \end{array} = -2; \quad D_4^{\varepsilon} = \begin{array}{c|ccc|} & M & L & T \\ p_1 & 1 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 & -1 \\ p_4 & 0 & 1 & 0 \end{array} = +1;$$

$$D_5^{\alpha} = \begin{array}{c|ccc|} & M & L & T \\ p_5 & 1 & 0 & -1 \\ p_2 & 0 & 0 & -1 \\ p_3 & 1 & 1 & -2 \end{array} = +1; \quad D_5^{\beta} = \begin{array}{c|ccc|} & M & L & T \\ p_1 & 1 & 0 & 0 \\ p_5 & 1 & 0 & -1 \\ p_3 & 1 & 1 & -2 \end{array} = -2; \quad D_5^{\varepsilon} = \begin{array}{c|ccc|} & M & L & T \\ p_1 & 1 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 & -1 \\ p_5 & 1 & 0 & -1 \end{array} = 0;$$

$$D_6^{\alpha} = \begin{array}{c} \\ p_6 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M & L & T \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \end{array} = +1; \qquad D_6^{\beta} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_6 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M & L & T \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \end{array} = +2; \qquad D_6^{\varepsilon} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M & L & T \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \end{array} = 0;$$

$$D_7^{\alpha} = \begin{array}{c} \\ p_7 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M & L & T \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \end{array} = 0; \qquad D_7^{\beta} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_7 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M & L & T \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \end{array} = -1; \qquad D_7^{\varepsilon} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M & L & T \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 0;$$

Численные значения показателей будут:

$$\alpha_l = \frac{D_4^{\alpha}}{D_{1-3}} = \frac{-1}{+1} = -1; \qquad \beta_l = \frac{D_4^{\beta}}{D_{1-3}} = \frac{-2}{+1} = -2; \qquad \varepsilon_l = \frac{D_4^{\varepsilon}}{D_{1-3}} = \frac{+1}{+1} = +1;$$

$$\alpha_k = \frac{D_5^{\alpha}}{D_{1-3}} = \frac{+1}{+1} = +1; \qquad \beta_k = \frac{D_5^{\beta}}{D_{1-3}} = \frac{+1}{+1} = +1; \qquad \varepsilon_k = \frac{D_5^{\varepsilon}}{D_{1-3}} = \frac{0}{+1} = 0;$$

$$\alpha_c = \frac{D_6^{\alpha}}{D_{1-3}} = \frac{+1}{+1} = +1; \qquad \beta_c = \frac{D_6^{\beta}}{D_{1-3}} = \frac{+2}{+1} = +2; \qquad \varepsilon_c = \frac{D_6^{\varepsilon}}{D_{1-3}} = \frac{0}{+1} = 0;$$

$$\alpha_t = \frac{D_7^{\alpha}}{D_{1-3}} = \frac{0}{+1} = 0; \qquad \beta_t = \frac{D_7^{\beta}}{D_{1-3}} = \frac{-1}{+1} = -1; \qquad \varepsilon_t = \frac{D_7^{\varepsilon}}{D_{1-3}} = \frac{0}{+1} = 0.$$

Используя значения показателей и уравнения, окончательные значения критериев запишем в следующем виде:

$$\pi_4 = \frac{[S]}{p_1^{-1} p_2^{-2} p_3^{+1}} = \frac{[L]}{[M]^{-1}[\omega]^{-2}[F]^{+1}} = \frac{LM\omega^2}{F} = \frac{M\upsilon}{FT}.$$

Так как $\omega = 1/T$, то $$\pi_4 = \frac{M\upsilon}{FT^2}.$$

$$\pi_5 = \frac{[\mu]}{p_1^{1} p_2^{1} p_3^{0}} = \frac{[\mu]}{[M]^{+1}[\omega]^{+1}} = \frac{\mu}{M^{+1}T^{-1}} = \frac{\mu T}{M};$$

$$\pi_6 = \frac{[c]}{p_1^{1} p_2^{-2} p_3^{0}} = \frac{[c]}{[M]^{1}[\omega]^{-2}} = \frac{cT^2}{M};$$

$$\pi_7 = \frac{[t]}{p_1^{0} p_2^{-1} p_3^{0}} = \frac{[T]}{[M]^{0}[\omega]^{-1}[F]^{0}} = \omega T.$$

Согласно второй теореме подобия, уравнение движения груза под действием сил представляется функциональной зависимостью из критериев подобия

$$\Phi(\pi_4; \pi_5; \pi_6; \pi_7) = 0$$

или

$$\Phi\left(\frac{ML}{FT^2}; \frac{\mu T}{M}; \frac{cT^2}{M}; \omega T\right) = 0.$$

$$a = \sigma^{\alpha}\, t^{\beta}\, l^{\gamma}\, \vartheta^{\delta}$$

За основные единицы приняты масса M, длина L, время T, температура θ, а за независимые параметры – σ – напряжение; t – время; l – длина; ϑ – температура.

Составим систему уравнений размерностей всех величин

$$ln\,[a] = 0\; ln\, M + 2\; ln\, L - ln\, T + 0\; ln\, \theta,$$

$$ln\,[\sigma] = ln\, M - ln\, L - 2\; ln\, T + 0\; ln\, \theta,$$

$$ln\,[t] = 0\; ln\, M + 0\; ln\, L + ln\, T + 0\; ln\, \theta,$$

$$ln\,[l] = 0\; ln\, M + ln\, L + 0\; ln\, T + 0\; ln\, \theta,$$

$$ln\,[\vartheta] = 0\; ln\, M + 0\; ln\, L + 0\; ln\, T + ln\, \theta.$$

Эта система определяется матрицей

$$\begin{array}{ccccc} & M & L & T & \theta \\ a & 0 & 2 & -1 & 0 \\ \sigma & 1 & -1 & -2 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vartheta & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Из нее для размерностей независимых единиц может быть выделен определитель четвертого порядка

$$D_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$