Тригонометрическ ие уравнения

Определение.

- Уравнения вида $f(x) = a$, где a – данное число, а $f(x)$ – одна из тригонометрических функций, называются простейшими тригонометрическими уравнениями.

Решение простейших тригонометрических уравнений.

Чтобы успешно решать простейшие тригонометрические уравнения нужно

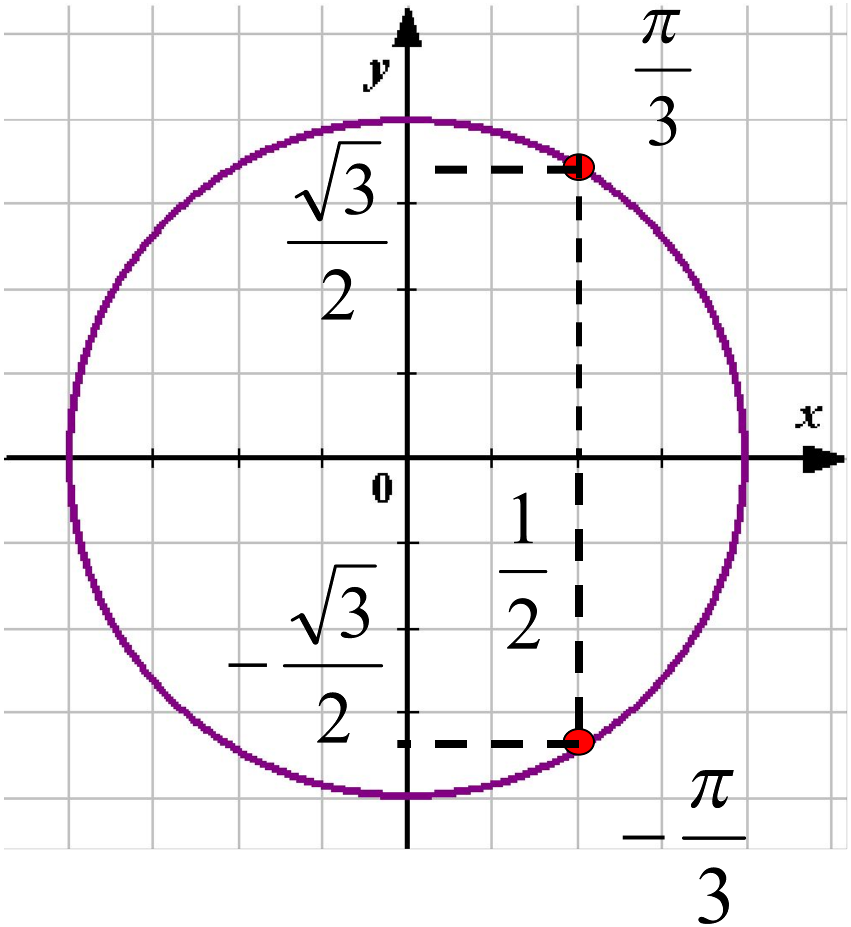
1) уметь отмечать точки на числовой окружности;

2) уметь определять значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для точек числовой окружности;

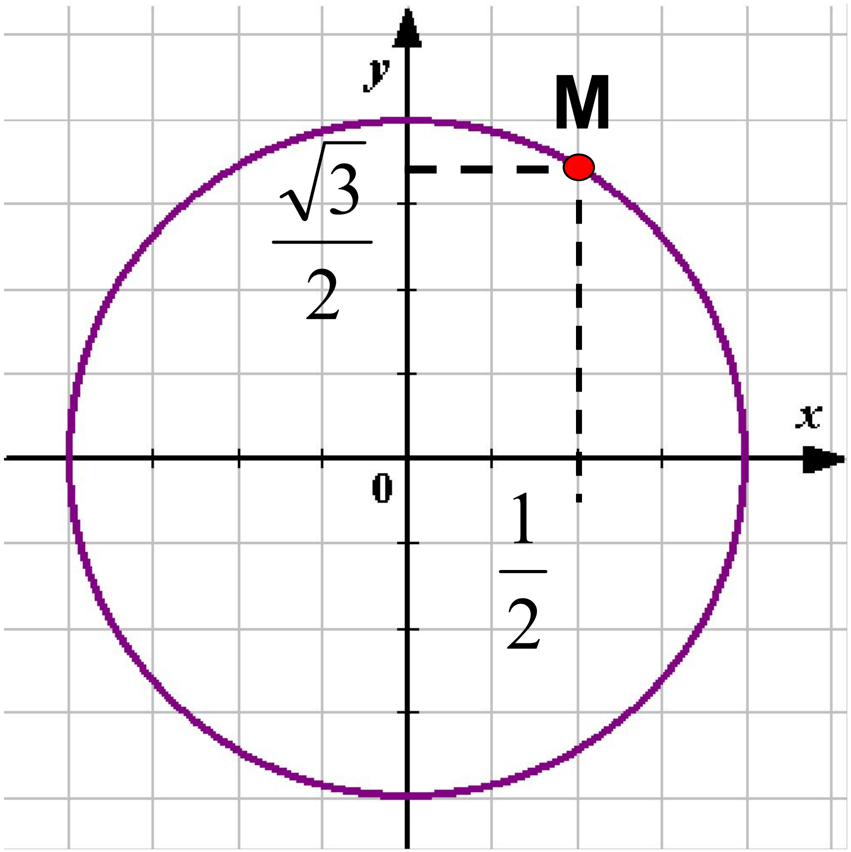
3) знать свойства основных тригонометрических функций;

4) знать понятие арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса и уметь отмечать их на числовой окружности.

1. Найти координаты точки М, лежащей на единичной окружности и соответствующей числу



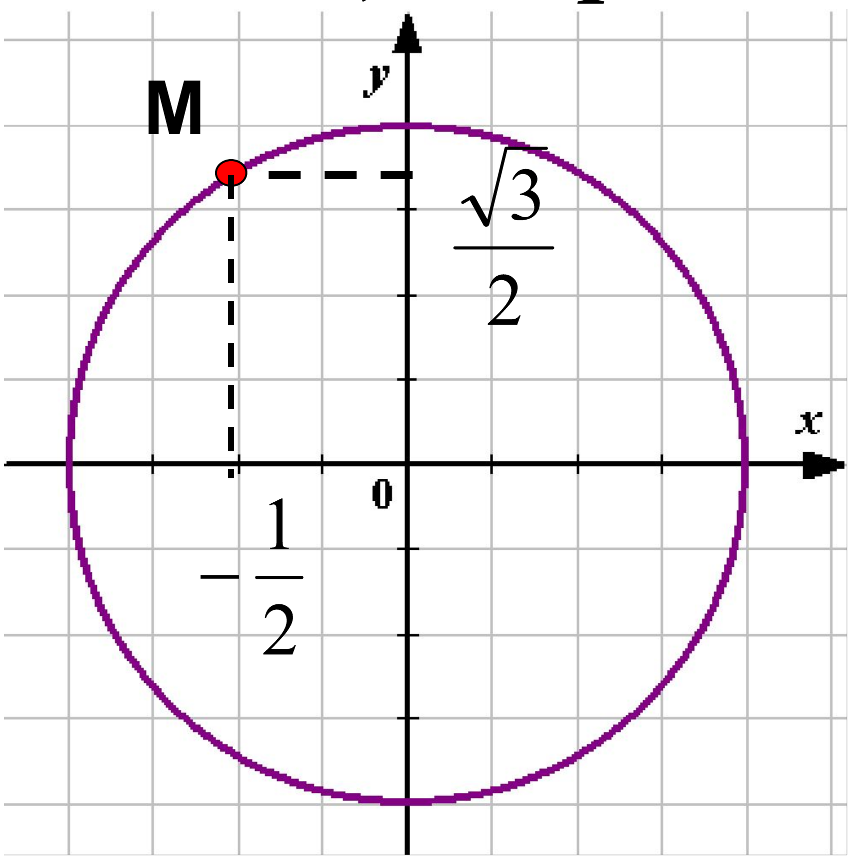
2. Дана точка М с абсциссой ½. Найдите ординату этой точки; укажите три угла поворота, в результате которых начальная точка (1;0) переходит в точку М



$$\frac{\pi}{3} \qquad \frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{7\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3}-2\pi=-\frac{5\pi}{3}$$

3. Дана точка М с абсциссой -½. Найдите ординату этой точки; укажите три угла поворота, в результате которых начальная точка (1;0) переходит в точку М

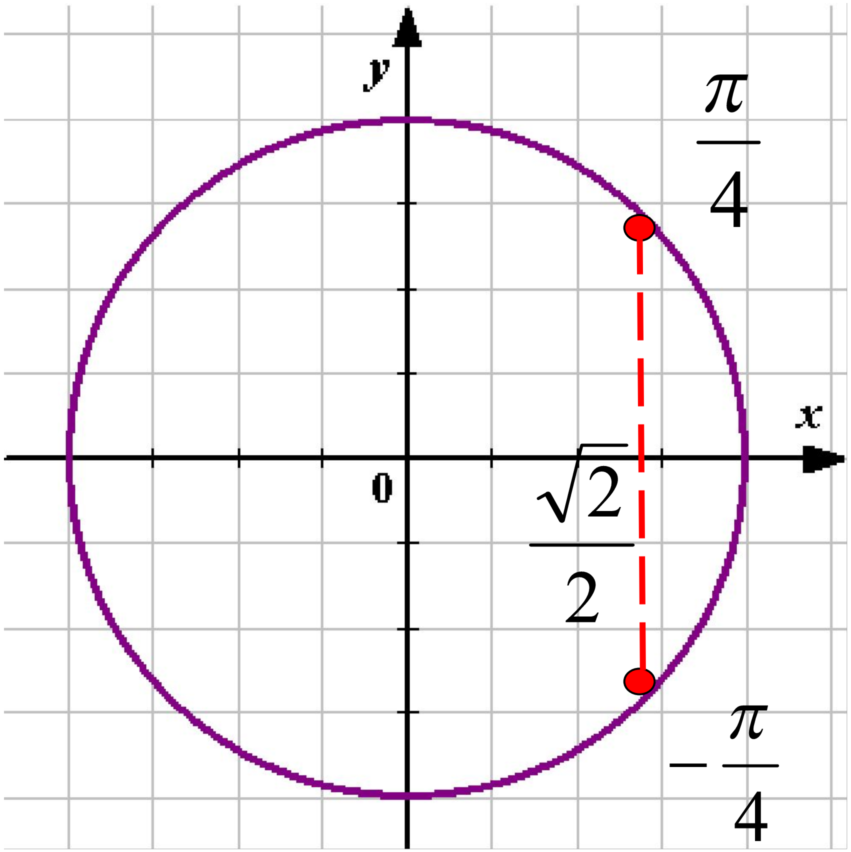


$$\frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3}+2\pi=\frac{8\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3}+8\pi=\frac{26\pi}{3}$$

Решите уравнение

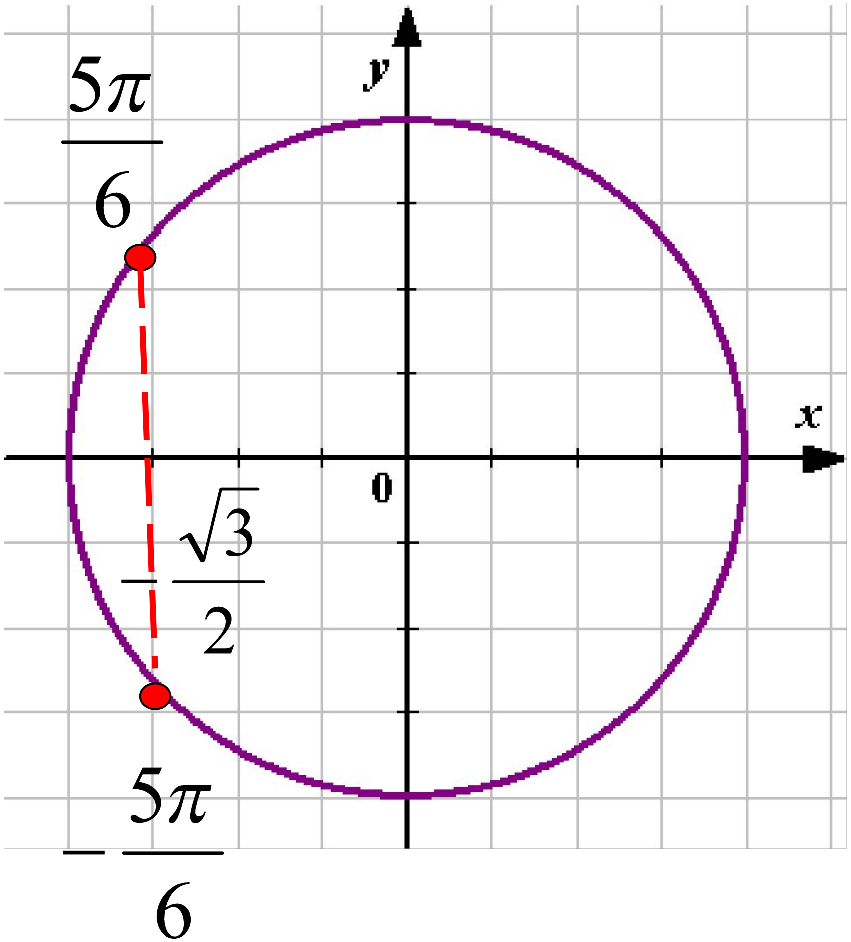


$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$$

Решите уравнение



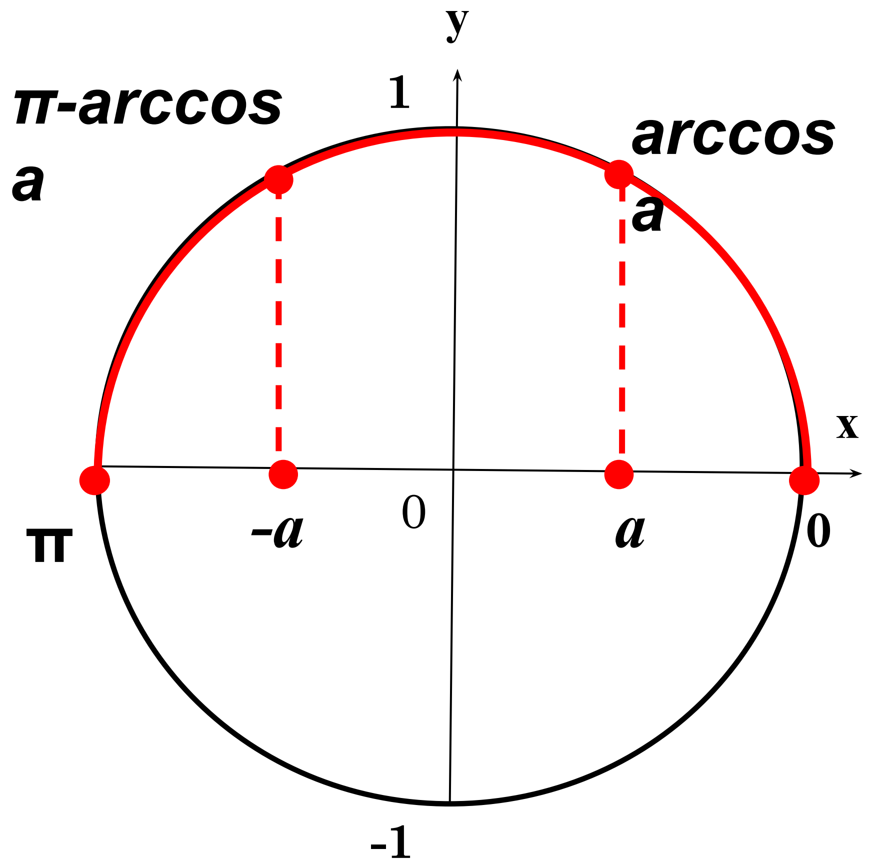
$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$$

Арккосинус и решение уравнений cos x=a.

Арккосинусом числа *a* называют такое <u>число</u> из промежутка [0;π], *косинус которого равен a*

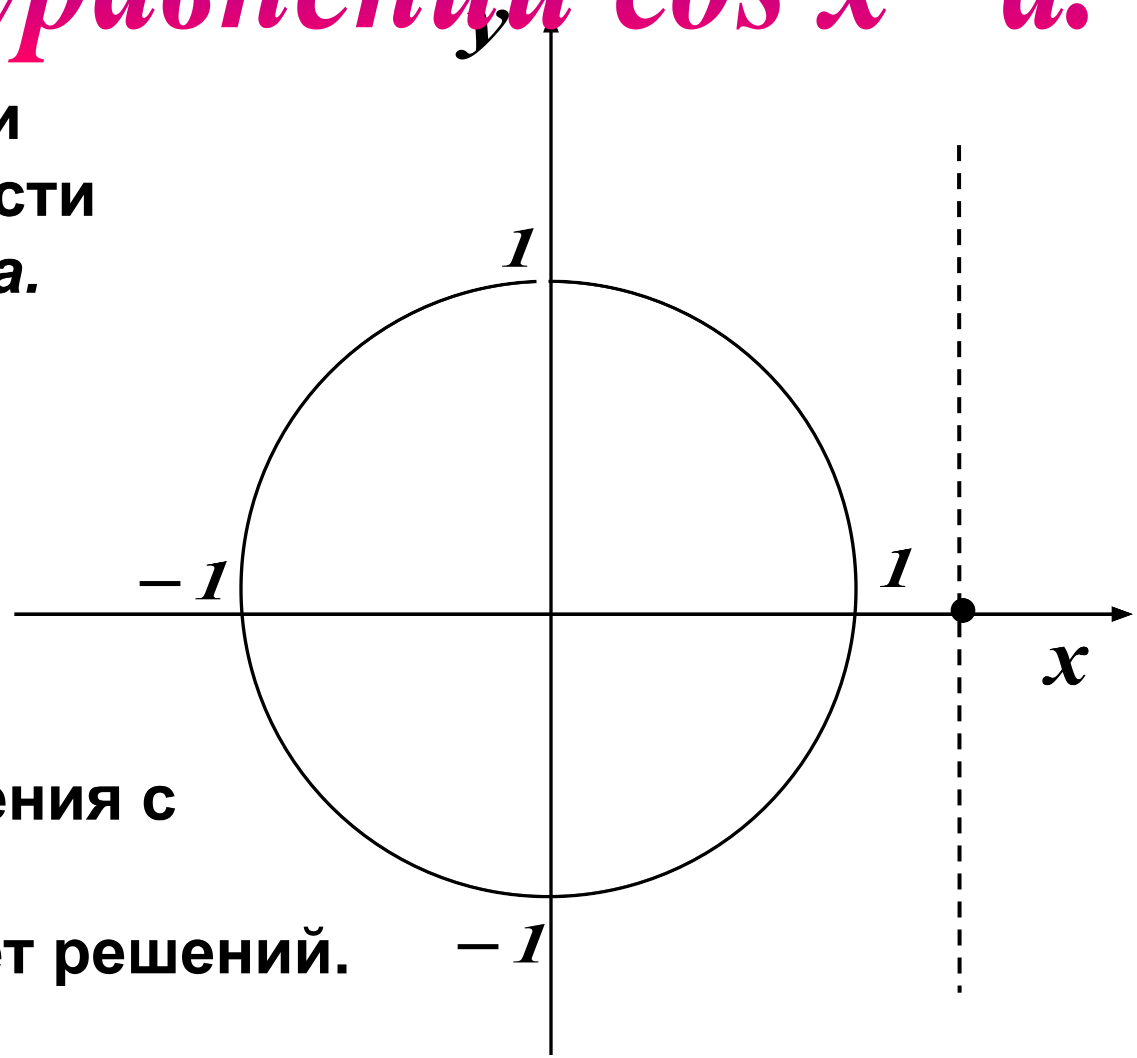


arccos (-a)= π -arccos a

Решение уравнений cos x =a.

Решим при помощи числовой окружности уравнение *cos x = a.*

1) $|a| > 1$



Нет точек пересечения с окружностью.
Уравнение не имеет решений.

Решение уравнений cos x =a.

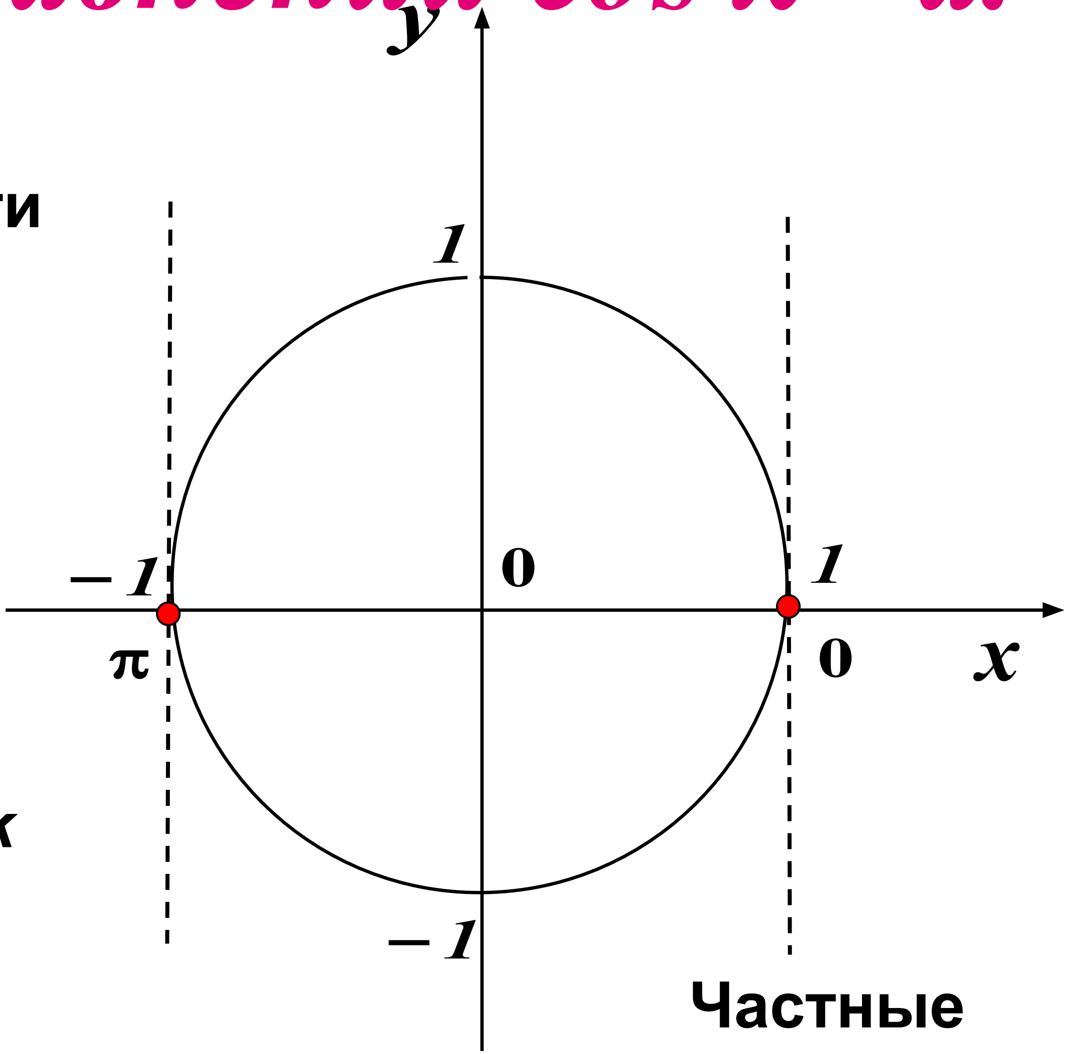
Решим при помощи числовой окружности уравнение *cos x = a.*

2) $|a| = 1$

cos x = 1
x = 2πk

cos x = -1
x = π+2πk

$\kappa \in Z$



Частные решения

Решение уравнений cos x =a.

Решим при помощи числовой окружности уравнение *cos x = a.*

3) *a = 0*

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad n \in Z$$

Частное решение

Решение уравнений cos x =a.

Решим при помощи числовой окружности уравнение *cos x = a.*

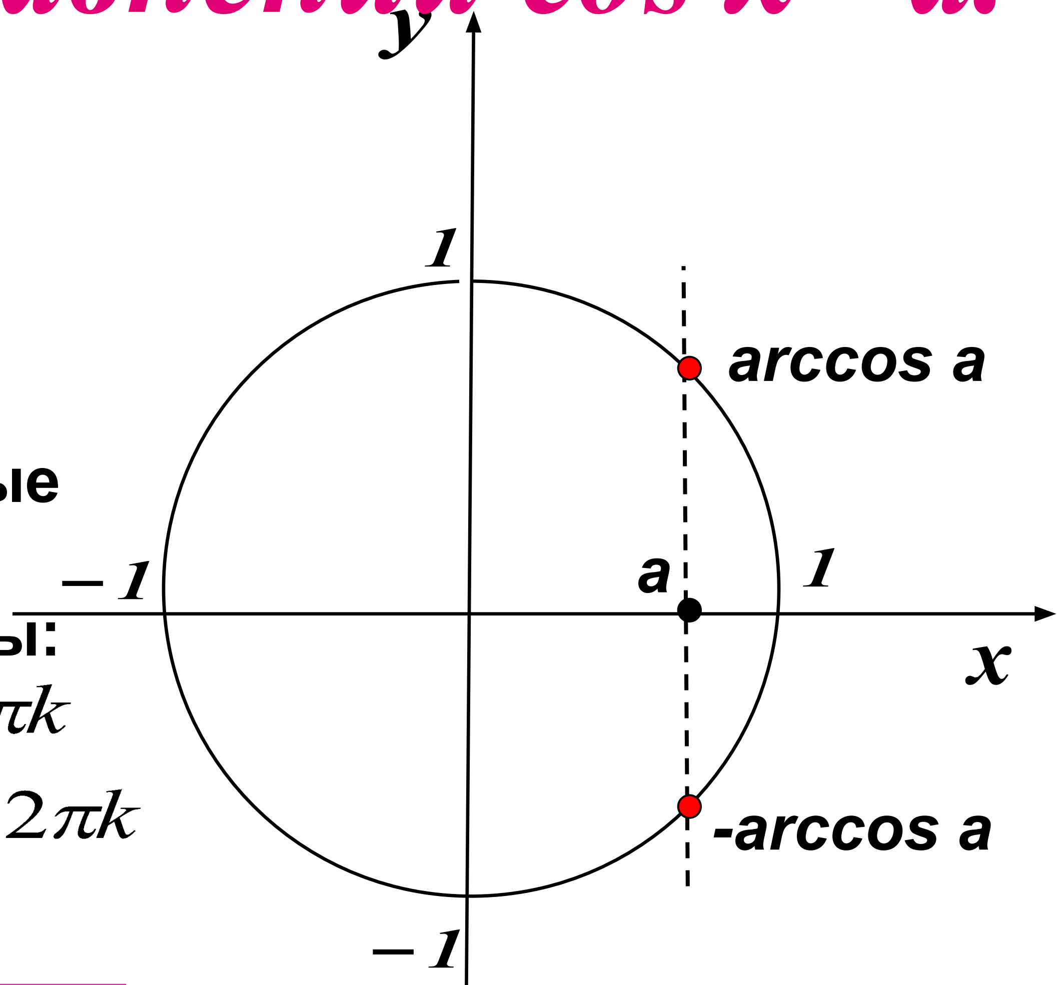
4) $|a| < 1$

Корни, симметричные относительно Ох могут быть записаны:

$$x = \left[\begin{array}{l} \arccos a + 2\pi k \\ -\arccos a + 2\pi k \end{array}\right.$$

или

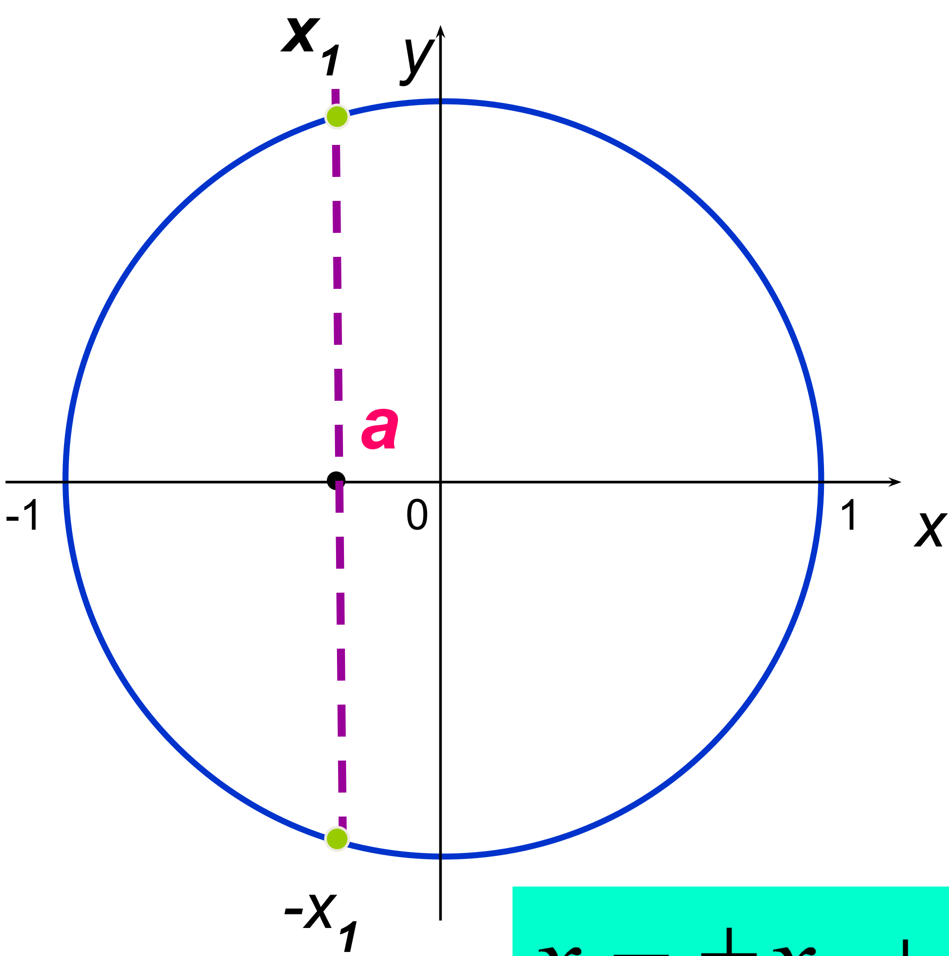
$\boxed{x = \pm \arccos a + 2\pi k}$



Общее решение

Уравнение $\cos x = a$ называется простейшим тригонометрическим уравнением

Решается с помощью единичной окружности



1. Проверить условие $|\ a\ | \le 1$
2. Отметить точку *a* на оси абсцисс (линии косинусов)
3. Провести перпендикуляр из этой точки к окружности
4. Отметить точки пересечения перпендикуляра с окружностью.
5. Полученные числа– решения уравнения *cosx* = *a.*
6. Записать общее решение уравнения.

$$x = \pm x_1 + 2\pi n \quad n \in Z$$

Уравнение cos t = a

- а) при **-1< t < 1** имеет две серии корней

  $t_1 = \ arccos\ a + 2\pi k,\ k \in Z$

  $t_2 = -arccos\ a + 2\pi m,\ m \in Z.$

  Эти серии можно записать так

  $t = \pm arccos\ a + 2\pi n,\ n \in Z;$

- б) при **a = 1** имеет одну серию решений

  $t = 2\pi n,\ n \in Z;$

- в) при **a = -1** имеет одну серию решений

  $t = \pi + 2\pi n,\ n \in Z;$

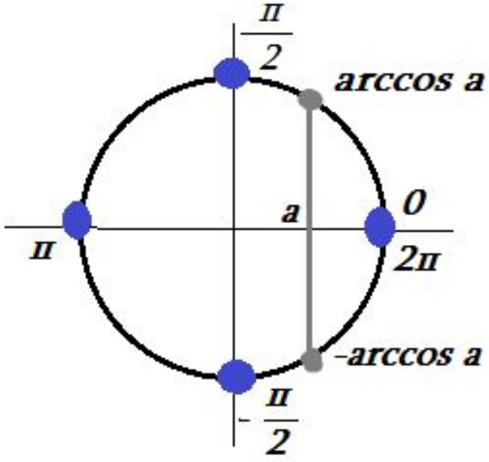
- г) при **a = 0** имеет две серии корней

  $t_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

  $t_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z.$ Обе серии можно записать в одну серию

  $t = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

  д) при a > 1 и a < -1 уравнение не имеет корней.



Решите уравнение

1) $\cos x = \frac{1}{2}$

$$x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$

$$x = \pm \arccos(-\frac{1}{2}) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm (\pi - \arccos\frac{1}{2}) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm(\pi - \frac{\pi}{3}) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

Решите уравнение

3) cos 4x = 1

4x = 2πn, n є Z

$$x = \frac{2\pi n}{4}, n \epsilon Z$$

$$x = \frac{\pi n}{2}, n \epsilon Z$$

4) $$\cos\frac{x}{2} = -1$$

$$\frac{x}{2} = \pi + 2\pi n, n \epsilon Z$$

$$x = 2\pi + 4\pi n, n \epsilon Z$$

Решите уравнение

5) $$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \epsilon Z$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi n, n \epsilon Z$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \epsilon Z$$

Уравнение $\sin t = a$

- а) при **-1< t < 1** имеет две серии корней

  $t_1 = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z$

  $t_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z.$

  Эти серии можно записать так

  $t = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z;$

- б) **при a = 1** имеет одну серию решений

  $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

- в) при **a = -1** имеет одну серию решений

  $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$

- г) при **a = 0** имеет две серии корней

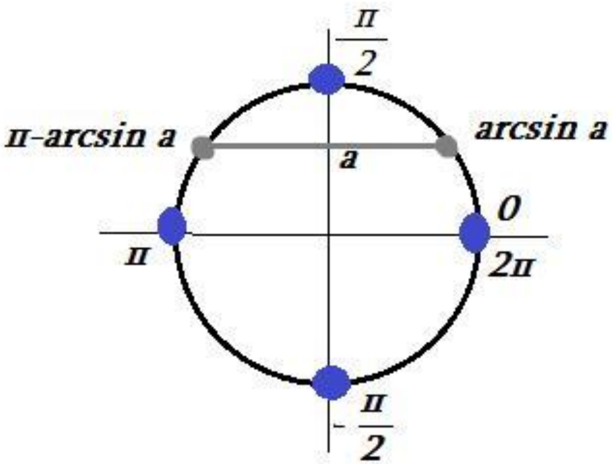
  $t_1 = 2\pi k,\ k \in Z,$

  $t_2 = \pi + 2\pi m,\ m \in Z.$

  Обе серии можно записать в одну серию

  $t = \pi n,\ n \in Z;$

- д) при **a > 1** и **a < -1** уравнение не имеет корней.



•

Решите уравнение

1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x_1 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

•

Решите уравнение

2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x_1 = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

Задание 2. Найти корни уравнения:

1) а) $\sin x = 1$ б) $\sin x = -1$ в) $\sin x = 0$

г) $\sin x = 1{,}2$ д) $\sin x = 0{,}7$

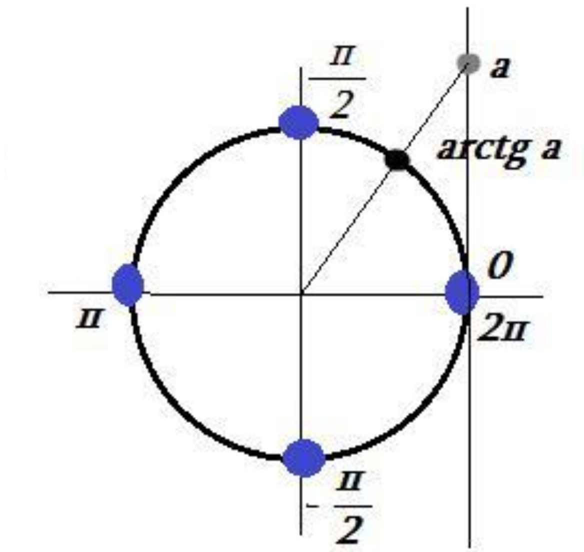
2) а) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

в) $\sin x = -\frac{1}{2}$ г) $\sin 2x = 0$

Уравнение tg t = a

при любом ***a ϵ R*** имеет одну серию решений

$x = \text{arctg } a + \pi n,\ n \in Z.$



Решите уравнение

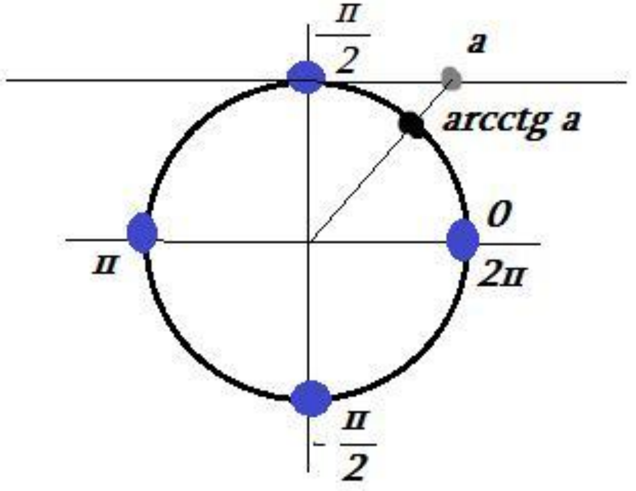
1) tg x = $\sqrt{3}$

2) tg x = - $\sqrt{3}$

Уравнение *ctg t = a*

при любом ***a є R*** имеет одну серию решений

x = arcctg a + πn, nє Z.



Решите уравнение

1) $\operatorname{ctg} x = 1$

2) $\operatorname{ctg} x = -1$

Подводим итоги

Значение *a*	***cos x = a***	***sin x = a***	***tg x = a***	***ctg x = a***
$\|a\|>1$	Ø	Ø	x=arctg a +πn	x=arcctg a +πn
$\|a\|<1$	x=±arccos a+2πn	$x=(-1)^n$arcsin a+πn	x=arctg a +πn	x=arcctg a +πn
a=1	x=2πn	x=π/2+2πn	x=π/4+πn	x=π/4+πn
a = -1	x=π+2πn	x=-π/2+2πn	x=-π/4+πn	x=3π/4+πn
a = 0	x=π/2+πn	x=πn	x=πn	x=π/2+πn