

Тригонометрические уравнения

Определение.

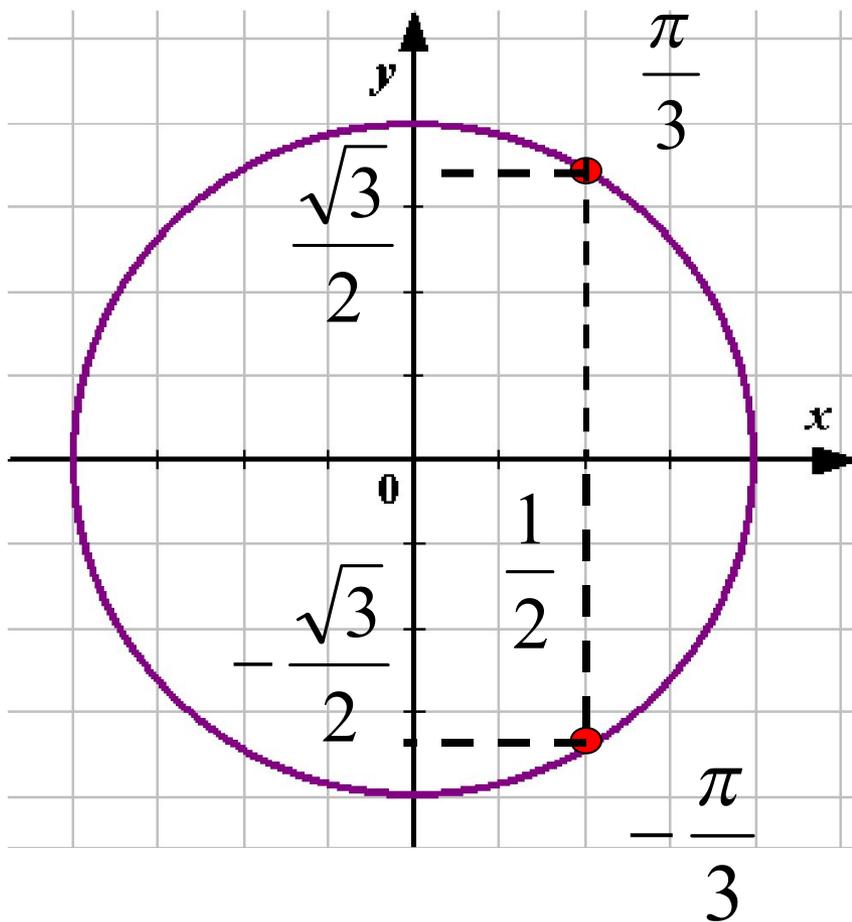
- Уравнения вида $f(x) = a$, где a – данное число, а $f(x)$ – одна из тригонометрических функций, называются простейшими тригонометрическими уравнениями.

Решение простейших тригонометрических уравнений.

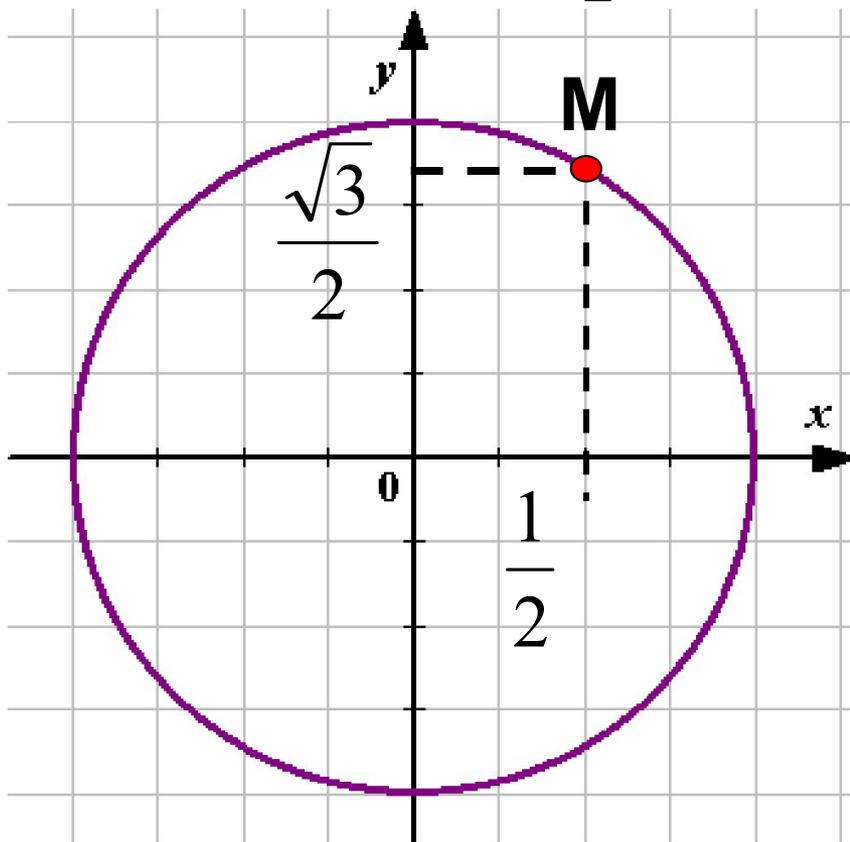
Чтобы успешно решать простейшие тригонометрические уравнения нужно

- 1) уметь отмечать точки на числовой окружности;**
- 2) уметь определять значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для точек числовой окружности;**
- 3) знать свойства основных тригонометрических функций;**
- 4) знать понятие арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса и уметь отмечать их на числовой окружности.**

1. Найти координаты точки M , лежащей на единичной окружности и соответствующей числу



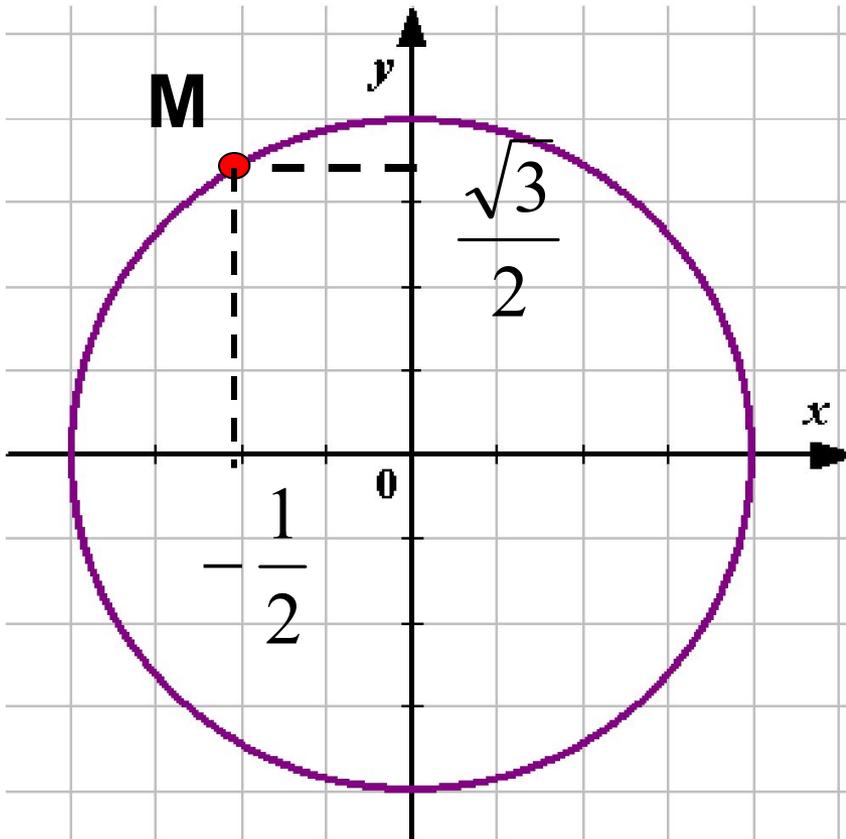
**2. Дана точка M с абсциссой $\frac{1}{2}$.
Найдите ординату этой точки;
укажите три угла поворота, в
результате которых начальная точка
 $(1;0)$ переходит в точку M**



$$\frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$$

**3. Дана точка M с абсциссой $-1/2$.
Найдите ординату этой точки;
укажите три угла поворота, в
результате которых начальная точка
 $(1;0)$ переходит в точку M**

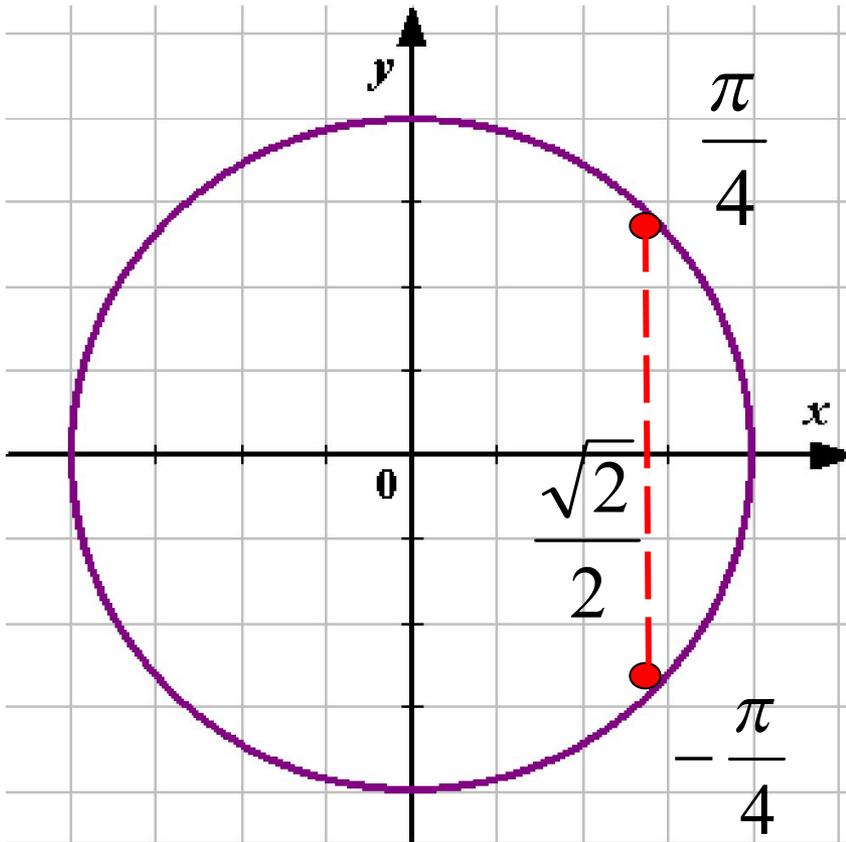


$$\frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3} + 8\pi = \frac{26\pi}{3}$$

Решите уравнение

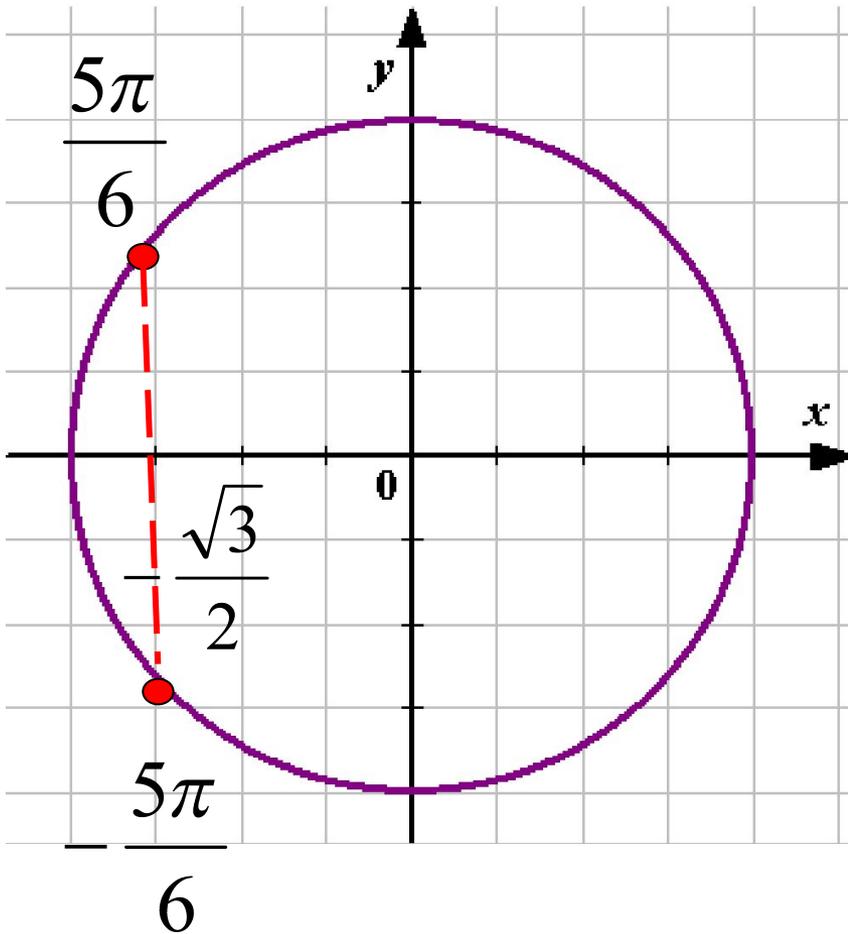


$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решите уравнение



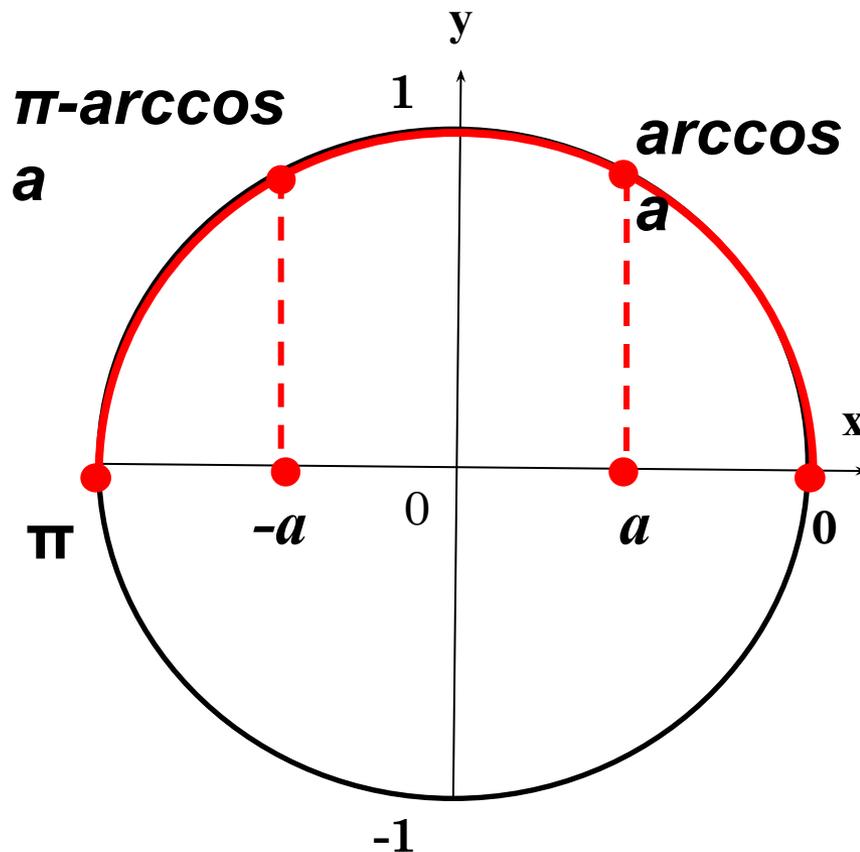
$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Арккосинус и решение уравнений $\cos x = a$.

Арккосинусом числа a называют такое число из промежутка $[0; \pi]$, *косинус* которого равен a

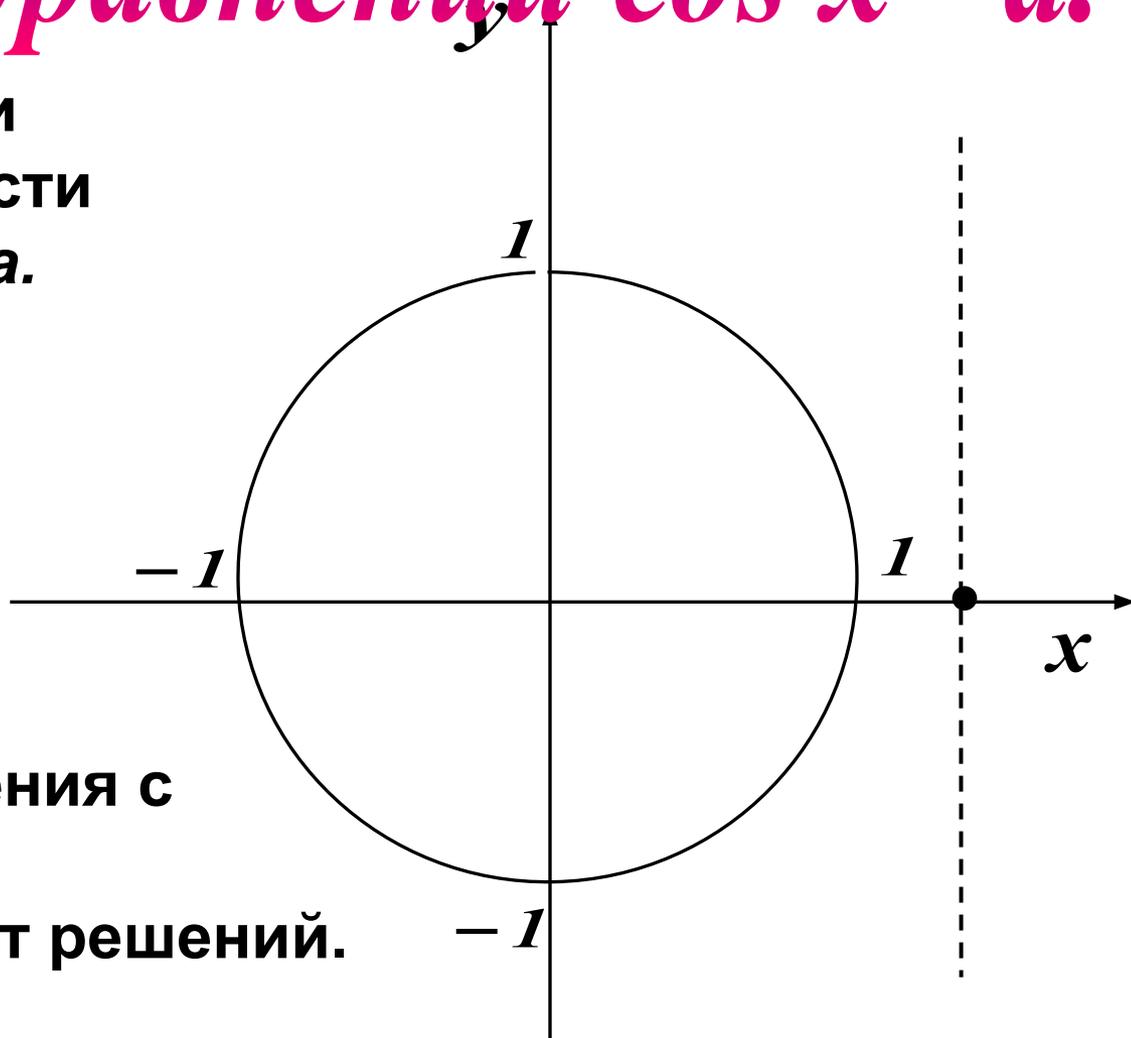


$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

Решение уравнений $\cos x = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\cos x = a$.

$$1) |a| > 1$$



Нет точек пересечения с
окружностью.
Уравнение не имеет решений.

Решение уравнений $\cos x = a$.

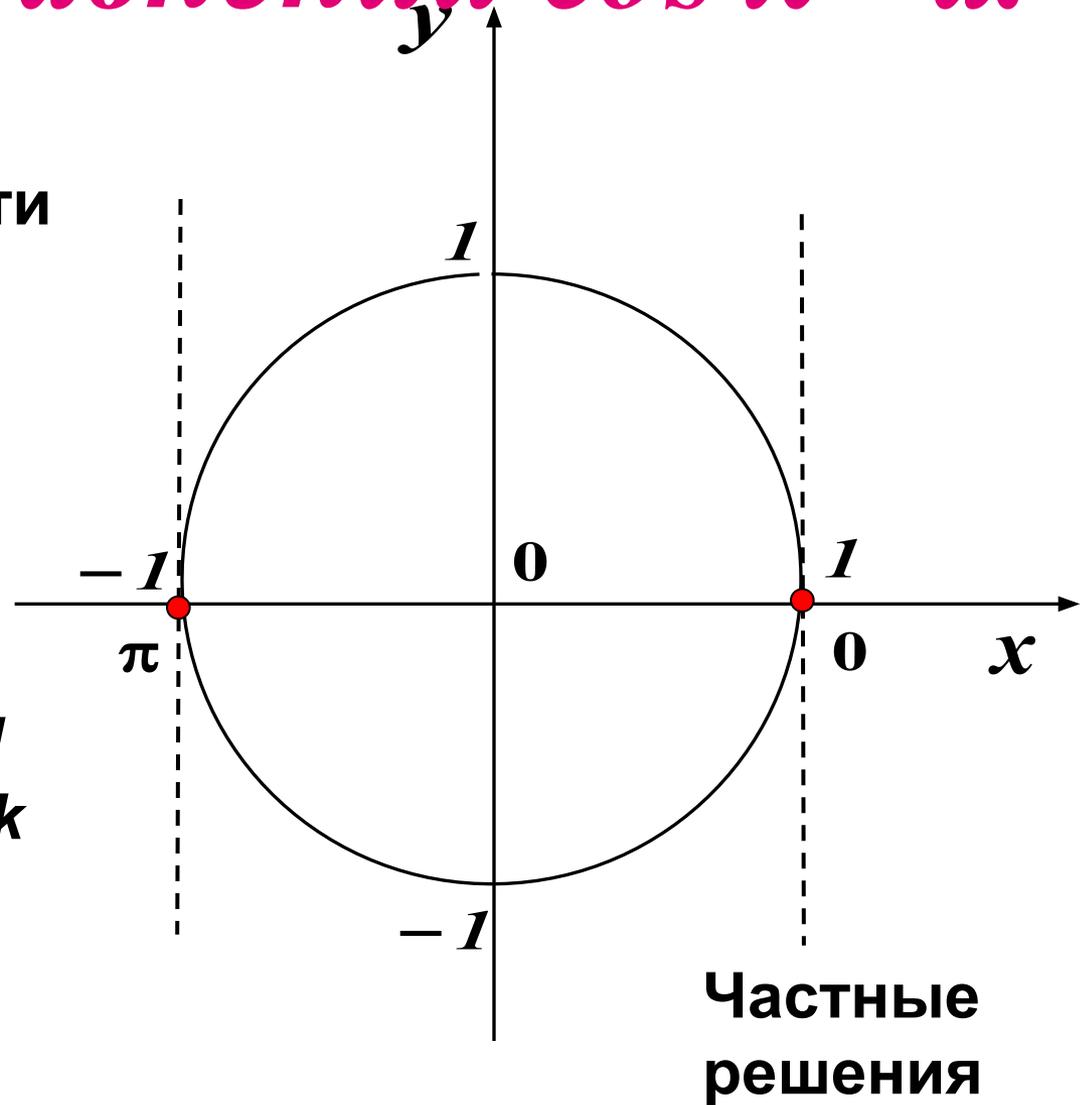
Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\cos x = a$.

$$2) |a| = 1$$

$$\cos x = 1$$
$$x = 2\pi k$$

$$\cos x = -1$$
$$x = \pi + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

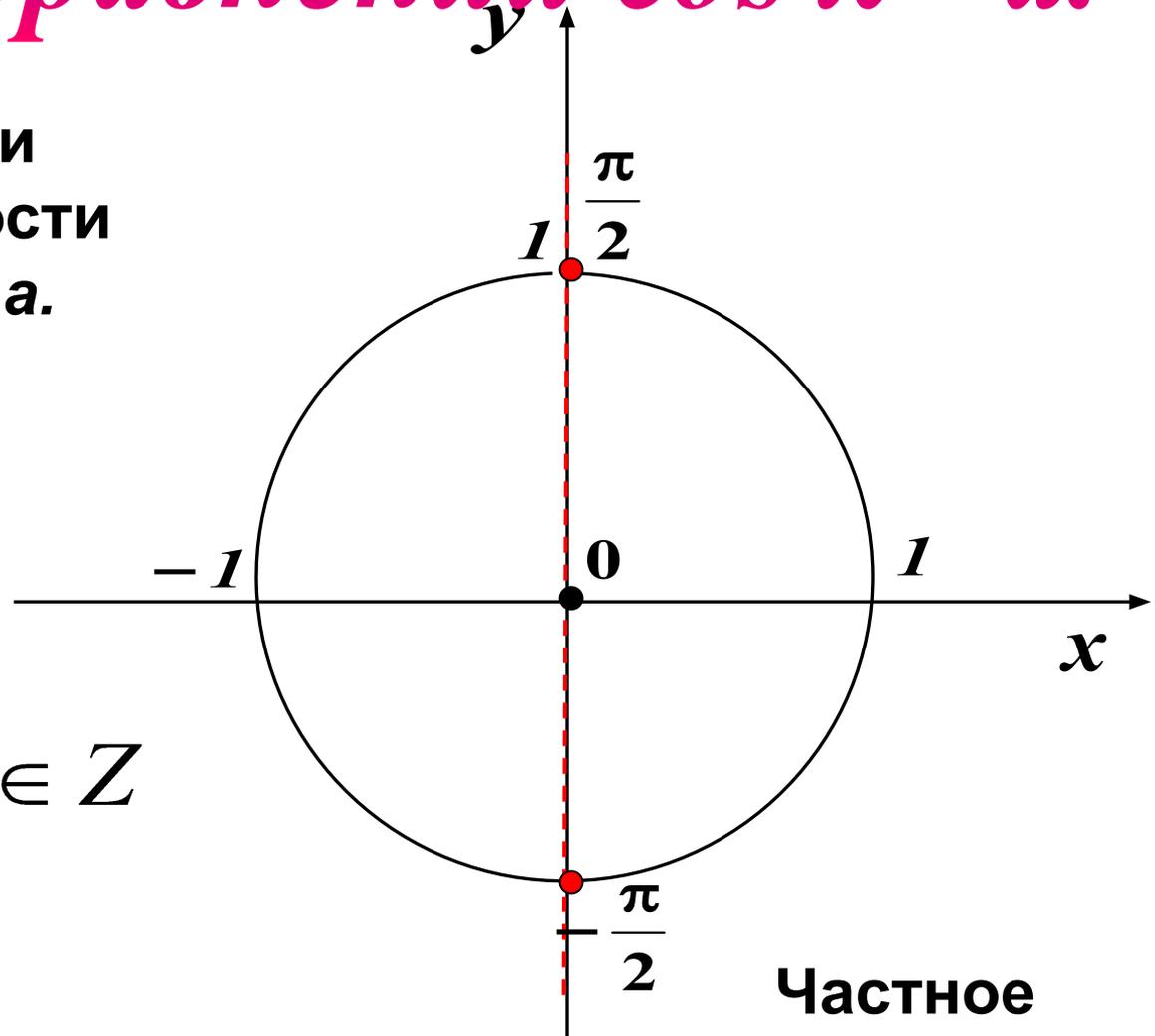


Решение уравнений $\cos x = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\cos x = a$.

3) $a = 0$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$



Частное
решение

Решение уравнений $\cos x = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\cos x = a$.

$$4) |a| < 1$$

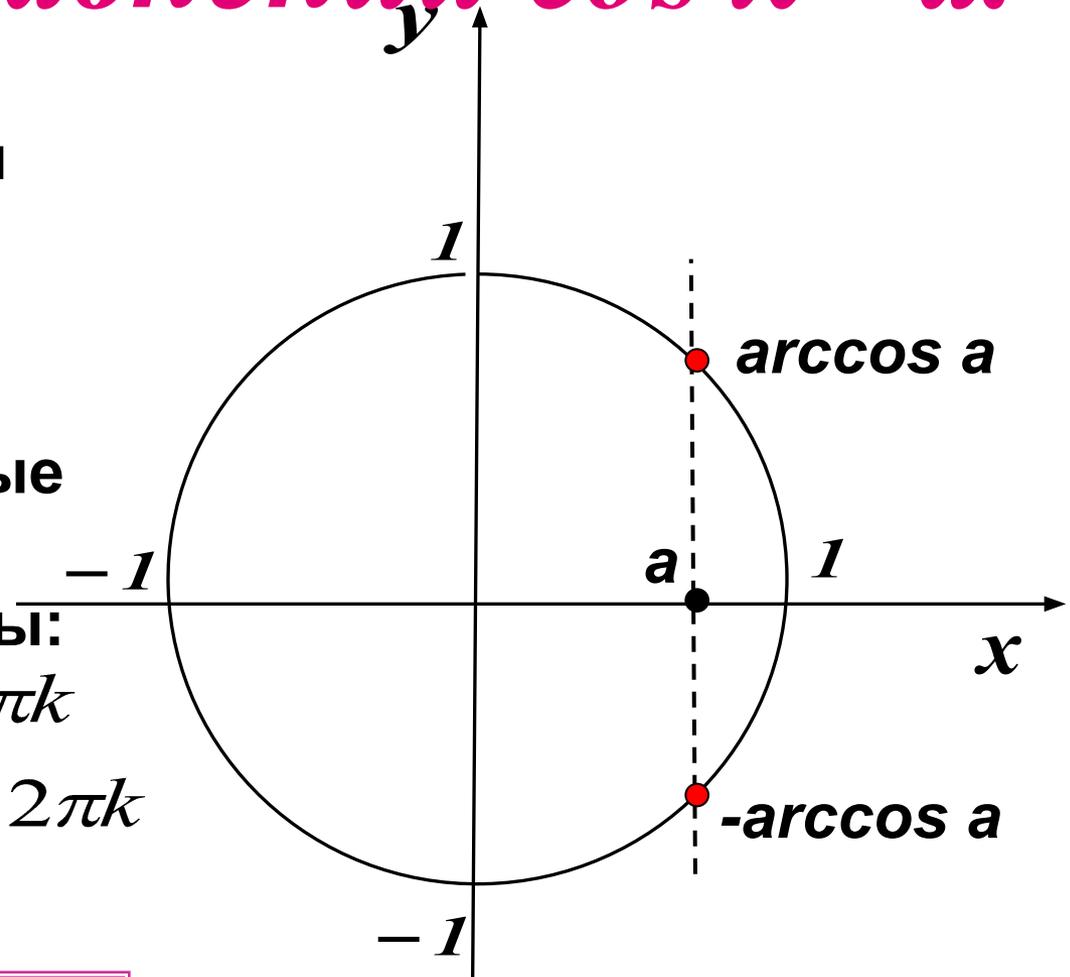
Корни, симметричные
относительно Ox
могут быть записаны:

$$x = \begin{cases} \arccos a + 2\pi k \\ -\arccos a + 2\pi k \end{cases}$$

или

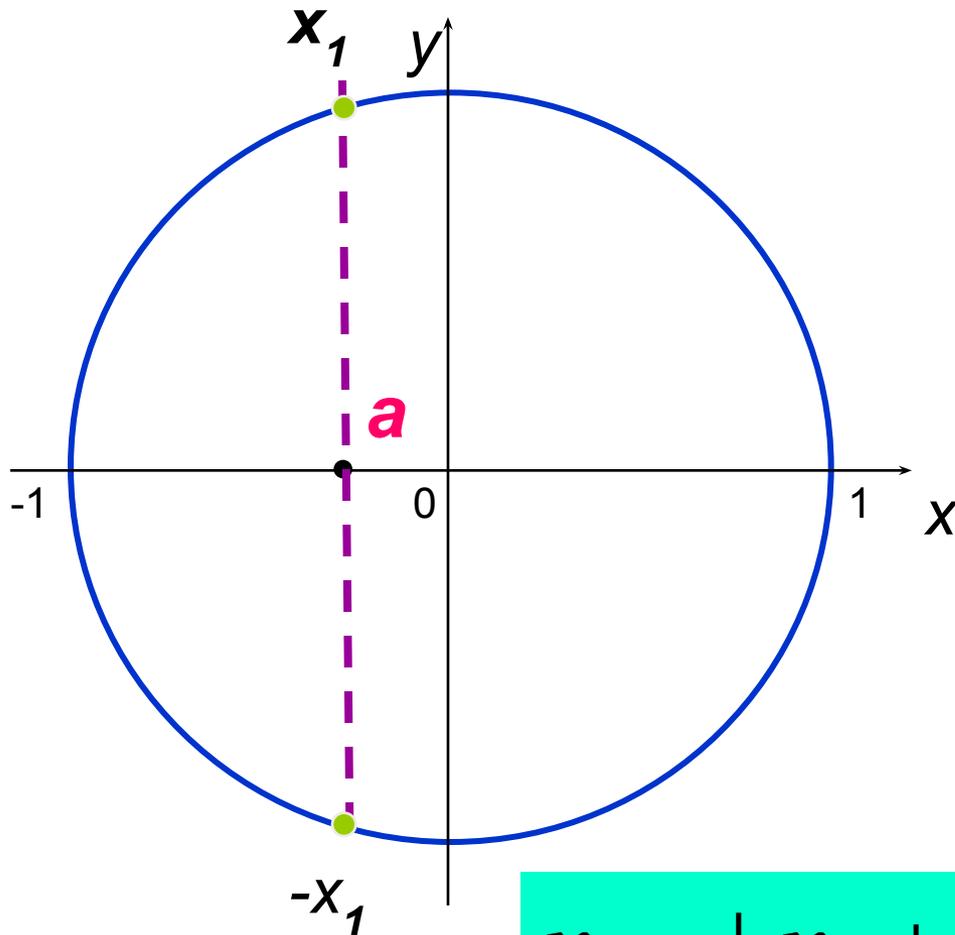
$$x = \pm \arccos a + 2\pi k$$

Общее решение



Уравнение $\cos x = a$ называется простейшим тригонометрическим уравнением

Решается с помощью единичной окружности



1. Проверить условие $|a| \leq 1$
2. Отметить точку a на оси абсцисс (линии косинусов)
3. Провести перпендикуляр из этой точки к окружности
4. Отметить точки пересечения перпендикуляра с окружностью.
5. Полученные числа – решения уравнения $\cos x = a$.
6. Записать общее решение уравнения.

$$x = \pm x_1 + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

Уравнение $\cos t = a$

- а) при $-1 < a < 1$ имеет две серии корней

$$t_1 = \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = -\arccos a + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Эти серии можно записать так

$$t = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

- б) при $a = 1$ имеет одну серию решений

$$t = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

- в) при $a = -1$ имеет одну серию решений

$$t = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

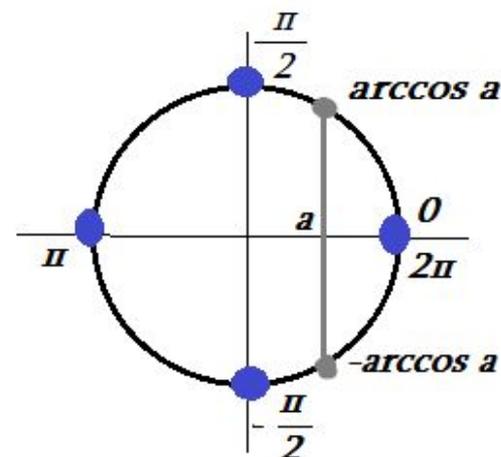
- г) при $a = 0$ имеет две серии корней

$$t_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \text{ Обе серии можно записать в одну серию}$$

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- д) при $a > 1$ и $a < -1$ уравнение не имеет корней.



Решите уравнение

$$1) \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

$$2) \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

Решите уравнение

3) $\cos 4x = 1$

$$4x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

4) $\cos \frac{x}{2} = -1$

$$\frac{x}{2} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2\pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Решите уравнение

$$5) \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Уравнение $\sin t = a$

- а) при $-1 < a < 1$ имеет две серии корней

$$t_1 = \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Эти серии можно записать так

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

- б) при $a = 1$ имеет одну серию решений

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- в) при $a = -1$ имеет одну серию решений

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

- г) при $a = 0$ имеет две серии корней

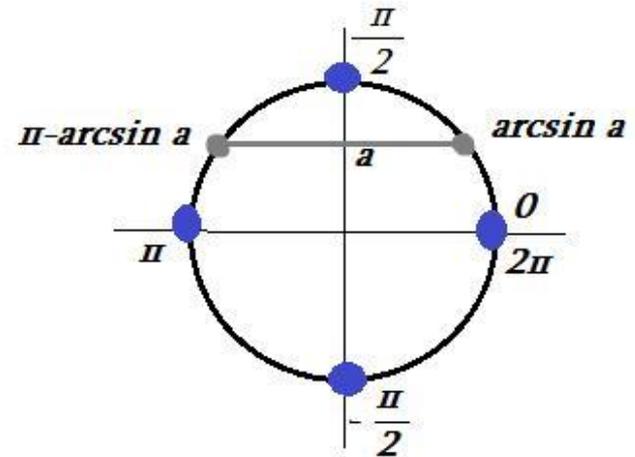
$$t_1 = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$t_2 = \pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Обе серии можно записать в одну серию

$$t = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

- д) при $a > 1$ и $a < -1$ уравнение не имеет корней.



Решите уравнение

$$1) \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

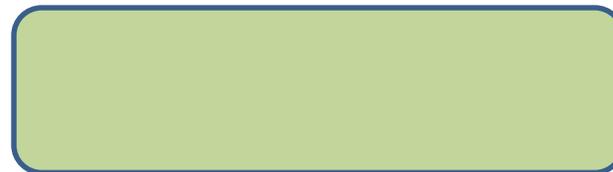
$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

•



Решите уравнение

$$2) \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

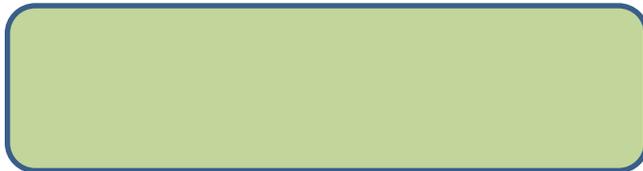
$$x_2 = \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$



Задание 2. Найти корни уравнения:

1) а) $\sin x = 1$ б) $\sin x = -1$ в) $\sin x = 0$

г) $\sin x = 1,2$ д) $\sin x = 0,7$

2) а) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

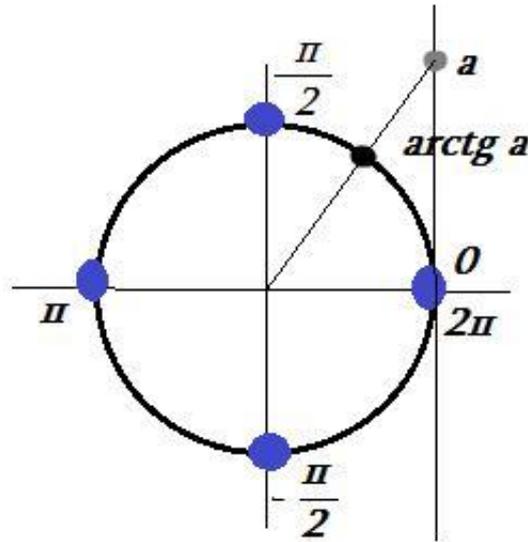
б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

в) $\sin x = -\frac{1}{2}$

г) $\sin 2x = 0$

Уравнение $\operatorname{tg} t = a$

при любом $a \in \mathbb{R}$ имеет одну серию решений
 $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.



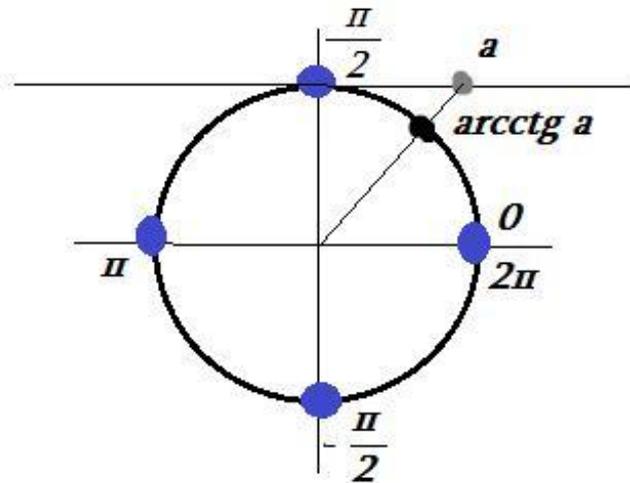
Решите уравнение

1) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

2) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

Уравнение $\operatorname{ctg} t = a$

при любом $a \in \mathbb{R}$ имеет одну серию решений
 $x = \operatorname{arccctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.



Решите уравнение

1) $\text{ctg } x = 1$

2) $\text{ctg } x = -1$

$x = \arccos(-1) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$x = \arcsin(-1) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$x = \arctan(-1) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Подводим итоги

Значение a	$\cos x = a$	$\sin x = a$	$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{ctg} x = a$
$ a > 1$	\emptyset	\emptyset	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$
$ a < 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$
$a = 1$	$x = 2\pi n$	$x = \pi/2 + 2\pi n$	$x = \pi/4 + \pi n$	$x = \pi/4 + \pi n$
$a = -1$	$x = \pi + 2\pi n$	$x = -\pi/2 + 2\pi n$	$x = -\pi/4 + \pi n$	$x = 3\pi/4 + \pi n$
$a = 0$	$x = \pi/2 + \pi n$	$x = \pi n$	$x = \pi n$	$x = \pi/2 + \pi n$