3. Элементы алгебры логики

3.1. ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Переменная x называется логической, если $x \in \{0, 1\}$.

Над логическими переменными определены логические операции или логические функции.

Функцией алгебры логики или булевой функции n переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется функция, областью значений которой служит {0,1} и область определения также {0,1}.

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}$ $\qquad$ $f \in \{0, 1\}$

Базовые операции над логическими переменными:

1. Отрицание

Обозначается: $\overline{x}$ *или* $\neg x$

Таблица истинности логической операции «отрицание»:

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

Отрицание соответствует союзу «НЕ». Если логическая переменная **а** истинна, то есть а = 1, то ее отрицание (НЕ а) будет ложно, и наоборот.

2. Конъюнкция или логическое умножение

Обозначается: $\wedge$ *или* $\cdot$

Конъюнкция в русском языке соответствует союзу «И».

3. Дизъюнкция или логическое сложение

Обозначается: $\vee$

Дизъюнкция в русском языке соответствует союзу «ИЛИ».

Таблица истинности логических операций конъюнкция» и «дизъюнкция»:

a	*b*	*a*∧*b*	*a*∨*b*
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Логические элементы могут быть реализованы на различной элементной базе. Сначала это были электромагнитные реле, затем появились электронные лампы, еще позже - транзисторы и, наконец, интегральные микросхемы.

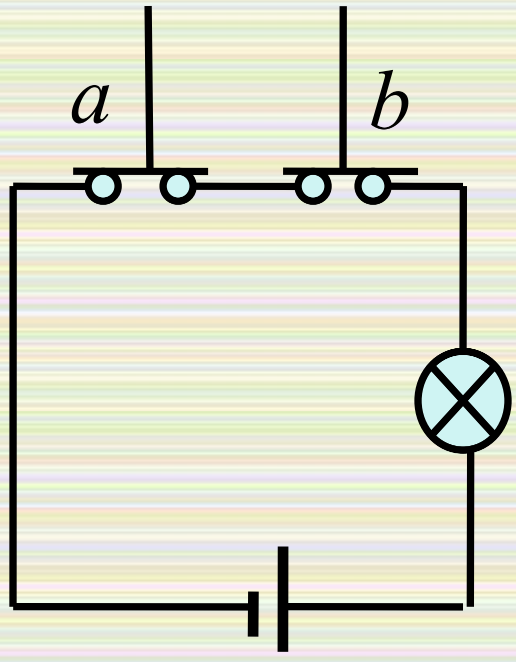
В настоящее время один кремниевый кристалл может содержать несколько миллионов логических элементов.

Рассмотрим реализацию логики на электромагнитных релейно-контактных схемах. Если логическая переменная a = 1, то реле замкнуто, а если a = 0, — то разомкнуто.

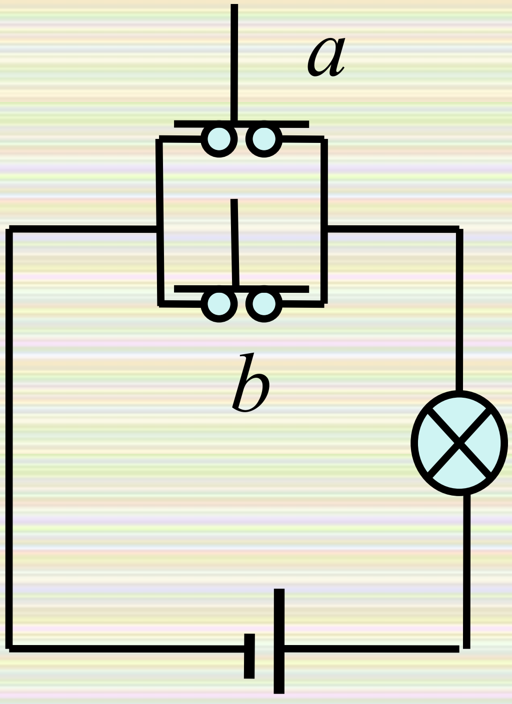
Конъюнкция соответствует последовательному соединению реле. Лампочка будет гореть, если оба реле замкнуты,
a = 1 и b = 1.
Поэтому конъюнкция равна «1» только на наборе «1, 1»,
а на остальных наборах равна «0».

Дизъюнкция соответствует параллельному соединению реле. Лампочка не будет гореть, если оба реле разомкнуты, т. е. a = 0 и b = 0. Поэтому дизъюнкция равна «0» только на наборе «0, 0», а на остальных наборах равна «1».

Все остальные логические операции могут быть выражены через базовые.



$f = a \cdot b$



$f = a \vee b$

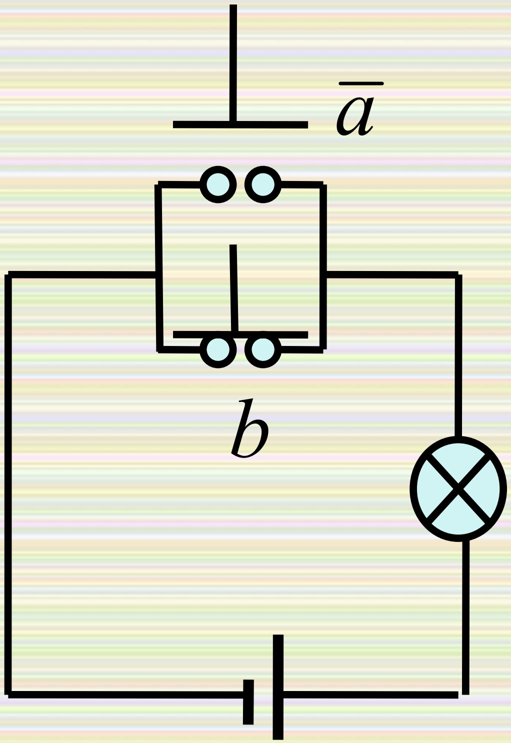
4. Импликация или следование

Обозначается: «→»
Импликация соответствует выражению «Если **a**, то **b**».
Переменная **a** называется посылкой, **b** — следствием.

a	*b*	*a→b*
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$\mathbf{a \to b = \bar{a} \vee b.}$$

a	b	$\bar{a}$	$\bar{a} \vee b$	$a \to b$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1



$\mathbf{a \rightarrow b = \bar{a} \vee b.}$

5. Эквиваленция или равнозначность

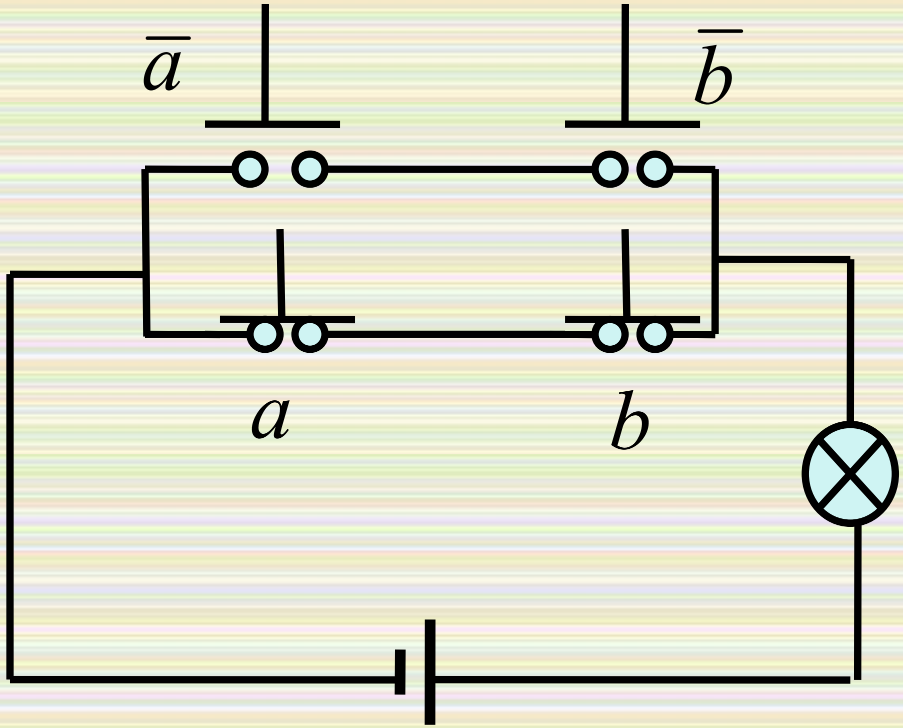
Обозначается: **a ~ b**

Эквиваленция соответствует выражению «**a**, если и только если **b**». Эквиваленция в русском языке соответствует выражению «**a**, если и только если **b**».

a	*b*	*a~b*
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a ~ b = □a ▪ □b ⋁ a ▪ в

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a} \cdot \bar{b}$	$a \cdot b$	$\bar{a} \cdot \bar{b} \vee a \cdot b$	a ~ b
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1



a ~ b = □a ▪ □b ∨ a ▪

B

5. Неравнозначность

Обозначается: **a ⊕ b**
Неравнозначность противоположна эквиваленции и соответствует выражению «либо **a**, либо **b**».

a	*b*	*a⊕b*
0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**0**

Другое название неравнозначности — «исключающее ИЛИ». Оно говорит о том, что на наборах «1, 1» и «0, 0» неравнозначность равна 0, то есть не допускается одновременный выбор и того и другого.

Третье название неравнозначности — «сложение по модулю два». Оно означает, что остаток от деления на два равен 0. Обозначим его словом mod.

$0 + 0 = 0$ $0 \bmod 2 = 0$

$0 + 1 = 1$ $1 + 0 = 1$ $1 \bmod 2 = 1$

$1 + 1 = 2$ $2 \bmod 2 = 0$

a ⊕ b = □a ▪ в ⋁ a ▪□b.

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a} \cdot b$	$a \cdot \bar{b}$	$\bar{a} \cdot b \vee a \cdot \bar{b}$	$a \oplus b$
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0

Приоритет логических операций:

Отрицание

Конъюнкция

Дизъюнкция

Импликация ***Эквиваленция*** ***Неравнозначность***