

# 3.1. ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

*Переменная  $x$  называется логической, если  $x \in \{0, 1\}$ .*

Над логическими переменными определены логические операции или логические функции.

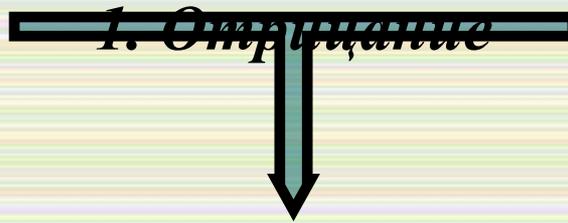
*Функцией алгебры логики или булевой функции  $n$  переменных  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется функция, областью значений которой служит  $\{0, 1\}$  и область определения также  $\{0, 1\}$ .*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}$$

$$f \in \{0, 1\}$$

# Базовые операции над логическими переменными:

## 1. Отрицание



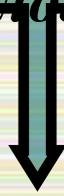
Обозначается:  $\bar{x}$  или  $\neg x$

Таблица истинности логической операции «отрицание»:

$a$	$\bar{a}$
0	1
1	0

Отрицание соответствует союзу «НЕ». Если логическая переменная **a** истинна, то есть  $a = 1$ , то ее отрицание (НЕ **a**) будет ложно, и наоборот.

## ~~2. Конъюнкция или логическое умножение~~



Обозначается:  $\wedge$  или  $\cdot$

Конъюнкция в русском языке соответствует союзу «И».

## ~~3. Дизъюнкция или логическое сложение~~



Обозначается:  $\vee$

Дизъюнкция в русском языке соответствует союзу «ИЛИ».

# Таблица истинности логических операций «конъюнкция» и «дизъюнкция»:

$a$	$b$	$a \wedge b$	$a \vee b$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Логические элементы могут быть реализованы на различной элементной базе. Сначала это были электромагнитные реле, затем появились электронные лампы, еще позже - транзисторы и, наконец, интегральные микросхемы.

В настоящее время один кремниевый кристалл может содержать несколько миллионов логических элементов.

Рассмотрим реализацию логики на электромагнитных релейно-контактных схемах. Если логическая переменная  $a = 1$ , то реле замкнуто, а если  $a = 0$ , — то разомкнуто.

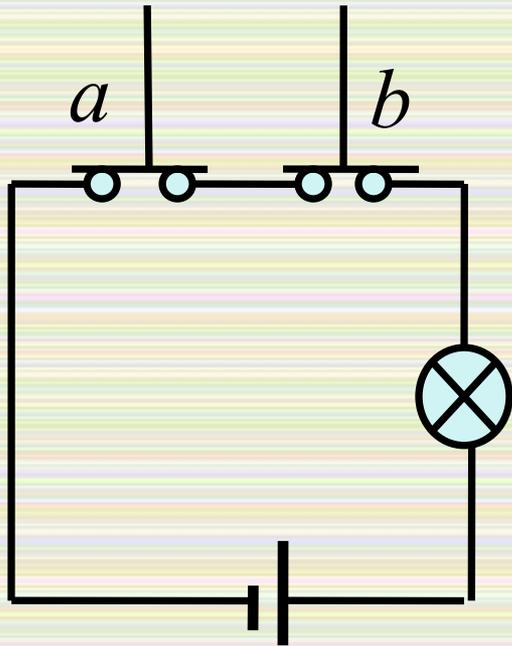
Конъюнкция соответствует последовательному соединению реле. Лампочка будет гореть, если оба реле замкнуты,  $a = 1$  и  $b = 1$ .

Поэтому конъюнкция равна «1» только на наборе «1, 1», а на остальных наборах равна «0».

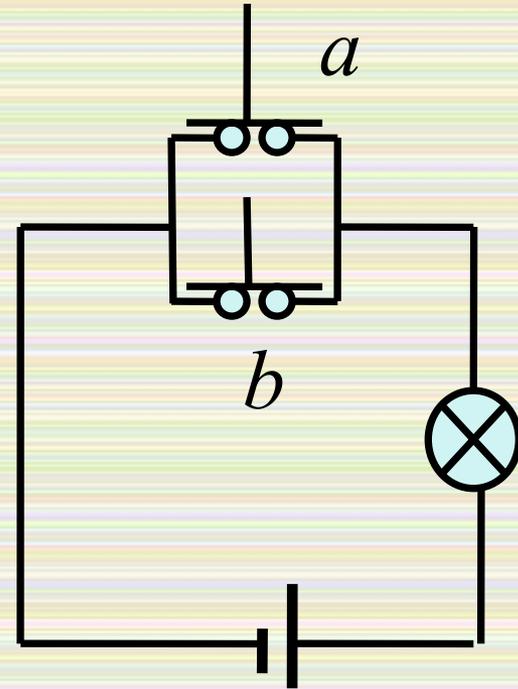
Дизъюнкция соответствует параллельному соединению реле.

Лампочка не будет гореть, если оба реле разомкнуты, т. е.  $a = 0$  и  $b = 0$ . Поэтому дизъюнкция равна «0» только на наборе «0, 0», а на остальных наборах равна «1».

Все остальные логические операции могут быть выражены через базовые.



$$f = a \cdot b$$



$$f = a \vee b$$

## 4. Импликация или следование



Обозначается: « $\rightarrow$ »

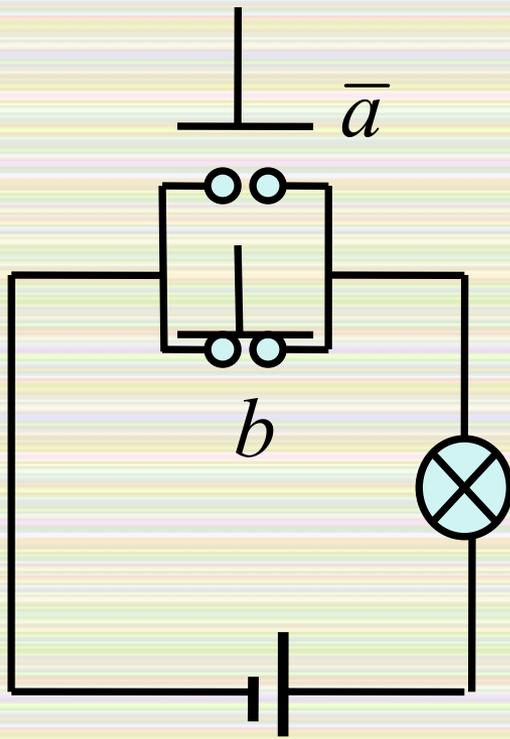
Импликация соответствует выражению «Если **a**, то **b**».

Переменная **a** называется посылкой, **b** — следствием.

<i>a</i>	<i>b</i>	$a \rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$\mathbf{a \rightarrow b = \bar{a} \vee b.}$$

$a$	$b$	$\bar{a}$	$\bar{a} \vee b$	$a \rightarrow b$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1



$$\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b} = \bar{\mathbf{a}} \quad \checkmark$$

**b.**

## 5. Эквиваленция или равнозначность



Обозначается:  $a \sim b$

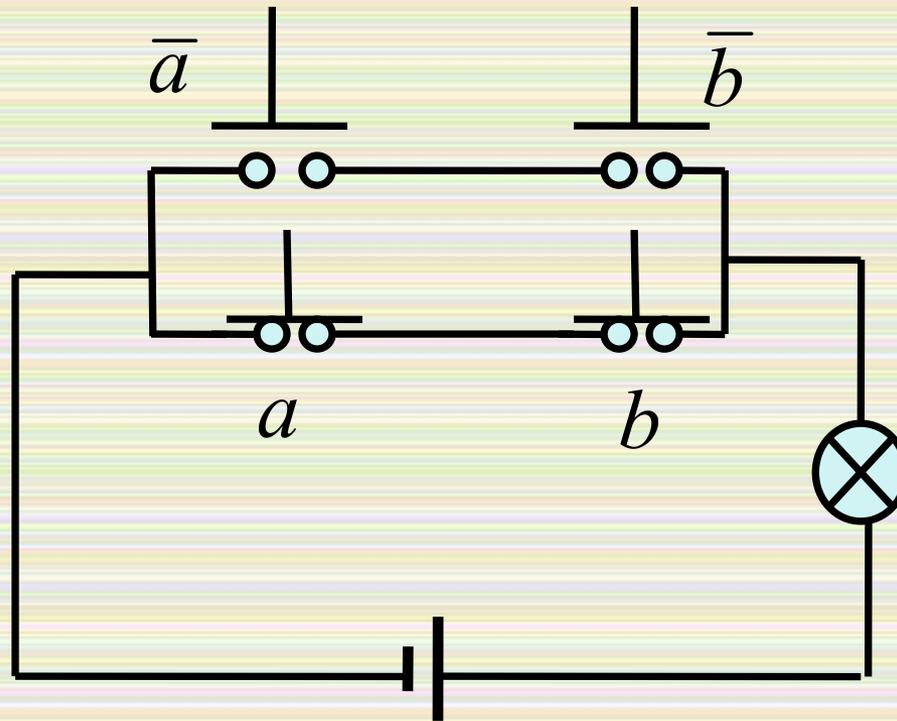
Эквиваленция соответствует выражению «**a**, если и только если **b**». Эквиваленция в русском языке соответствует выражению «**a**, если и только если **b**».

<i>a</i>	<i>b</i>	$a \sim b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$a \sim b = \bar{a} \cdot \bar{b} \vee a \cdot b$$

**B**

$a$	$b$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a} \cdot \bar{b}$	$a \cdot b$	$\bar{a} \cdot \bar{b} \vee a \cdot b$	$a \sim b$
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1



$$a \sim b = \bar{a} \cdot b \vee a \cdot \bar{b}$$

**B**

## 5. Неравнозначность



Обозначается:  $a \oplus b$

Неравнозначность противоположна эквиваленции и соответствует выражению «либо **a**, либо **b**».

$a$	$b$	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Другое название неравнозначности — «исключающее ИЛИ».  
Оно говорит о том, что на наборах «1, 1» и «0, 0»  
неравнозначность равна 0, то есть не допускается  
одновременный выбор и того и другого.

Третье название неравнозначности — «сложение по модулю два».  
Оно означает, что остаток от деления на два равен 0.

Обозначим его словом mod.

$$0 + 0 = 0 \quad 0 \bmod 2 = 0$$

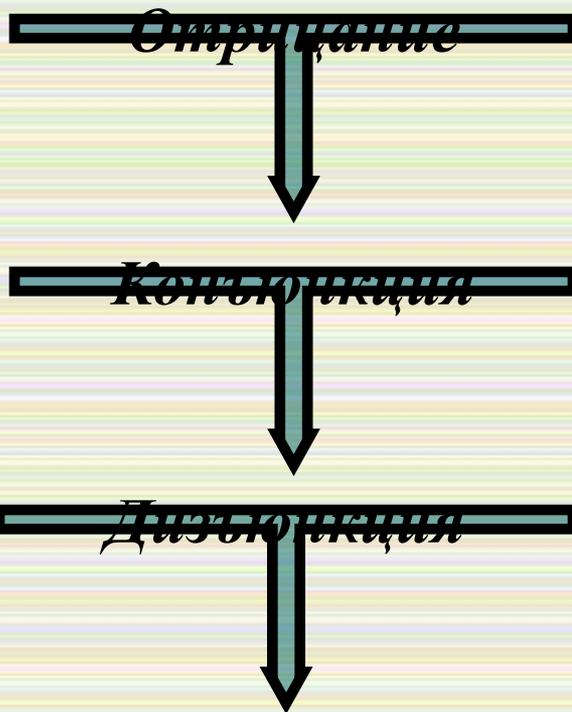
$$0 + 1 = 1 \quad 1 + 0 = 1 \quad 1 \bmod 2 = 1$$

$$1 + 1 = 2 \quad 2 \bmod 2 = 0$$

$$a \oplus b = \bar{a} \cdot b \vee a \cdot \bar{b}$$

$a$	$b$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a} \cdot b$	$a \cdot \bar{b}$	$\bar{a} \cdot b \vee a \cdot \bar{b}$	$a \oplus b$
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0

# Приоритет логических операций:



Импликация

Эквиваленция

Неравнозначность

ь