

# МЕХАНИКА

## Теоретическая механика

### Модуль 1

#### Раздел 3 – ДИНАМИКА ТОЧКИ

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

ЛЕКЦИЯ 14

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ЛЕКЦИЯ 15

ЛЕКЦИЯ 16

## ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

**Динамика** - это раздел механики, в котором изучается движение материальных точек, тел и механических систем под действием приложенных сил

## Основные законы механики

Первый закон (закон инерции)

Второй закон (основной закон динамики)

$$m\bar{a} = \bar{F}$$

Третий закон (закон равенства действия и противодействия)

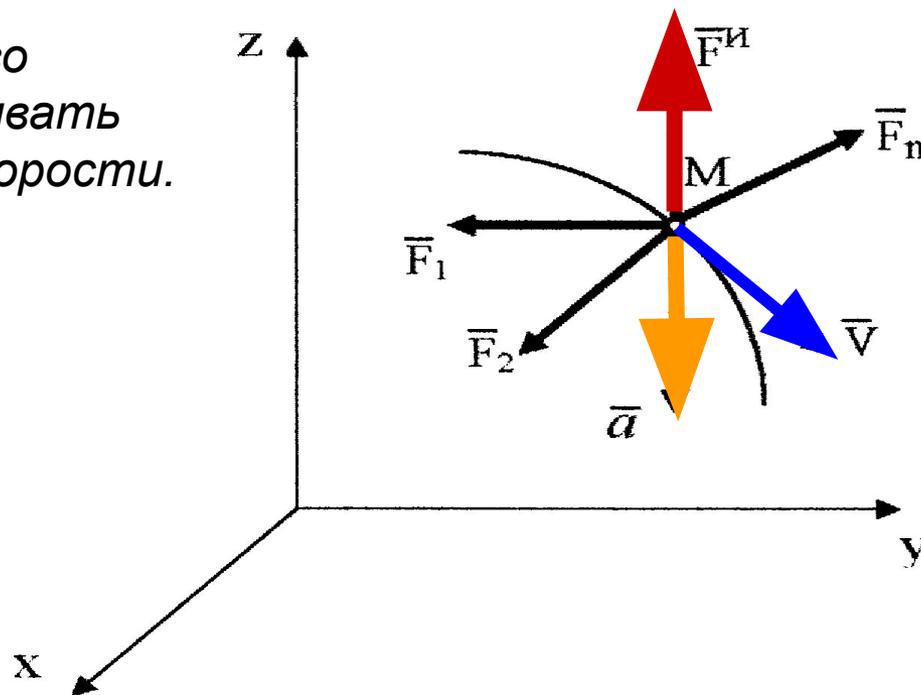
Четвертый закон (закон независимости действия сил)

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n$$

## ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

**Инерция** – это свойство материальной точки оказывать сопротивление изменению скорости.

$$-m\bar{a} = \bar{F}^u$$



**Сила инерции** материальной точки направлена противоположно ускорению точки и приложена к телу, сообщаемому точке это ускорение

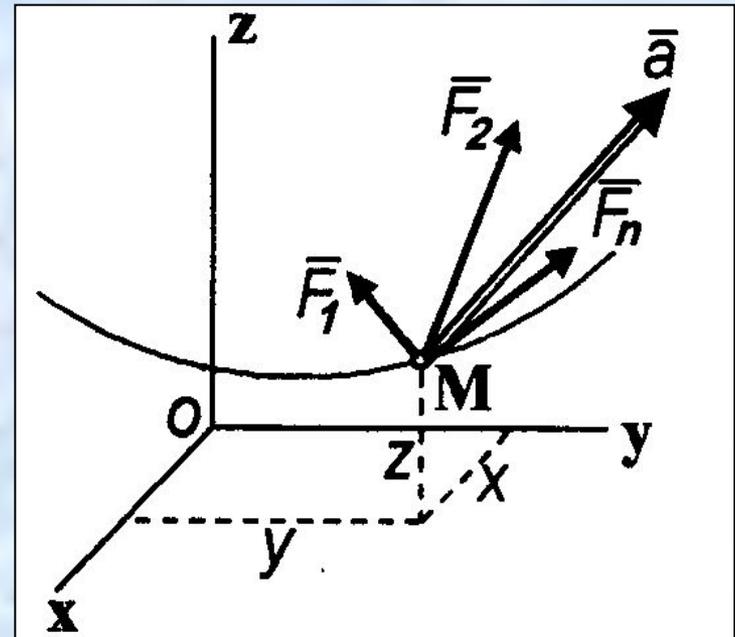
## Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Дифференциальные уравнения движения точки  
в проекциях на декартовы оси:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{kx}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_{ky}$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_{kz}$$



Закон движения точки:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = f_1(t); \\ y = f_2(t); \\ z = f_3(t) \end{array} \right.$$

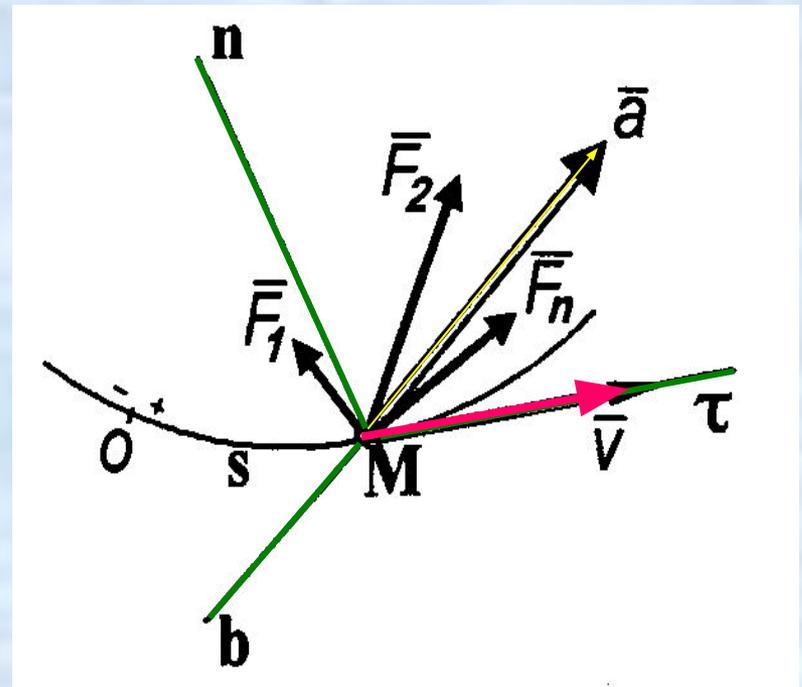
## Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Дифференциальные уравнения в проекциях на оси естественного трехгранника

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau}$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn}$$



## Дифференциальные уравнения движения материальной точки

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \sum \bar{F}_k$$

### ДВЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

*Первая задача динамики:* по известному закону движения материальной точки находят приложенные к ней силы.

*Вторая (основная) задача динамики:* при известных действующих на материальную точку силах, определяют закон движения точки

## Дифференциальные уравнения движения материальной точки

### Решение задач динамики точки:

*Первая задача динамики:*

- *составить и решать дифференциальные уравнения движения материальной точки*

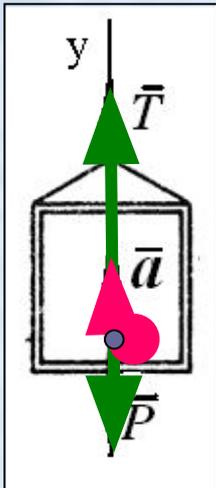
*Вторая задача динамики:*

- *выбрать систему координат и записать начальные условия;*
- *изобразить движущуюся точку в произвольном положении и все действующие на точку силы;*
- *составить дифференциальные уравнения движения точки;*
- *проинтегрировать полученные уравнения, определив постоянные интегрирования из начальных условий.*
- *найти искомые величины из полученных выражений.*

## Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Лифт весом  $P$  начинает подъем по закону:

$$y = at^2.$$



Определить:  
натяжение троса  $T$

**Решение.** На лифт действуют сила тяжести  $\bar{P}$  и реакция троса  $\bar{T}$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_{ky}$$

$$m a = P_y + T_y$$

$$(P/g) 2a = T - P,$$

$$T = P (1 + 2a/g).$$

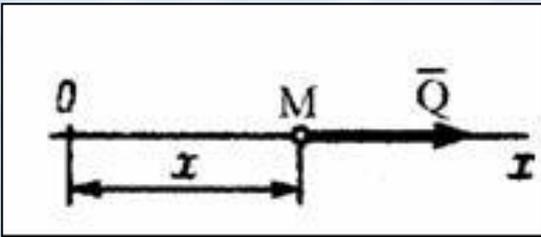
Если лифт опускается с таким же ускорением:

$$T = P (1 - 2a/g).$$

## Дифференциальные уравнения движения материальной точки

### Задача 2.

Материальная точка с массой  $m$  движется под действием постоянной силы  $\bar{Q}$



### Найти:

закон движения точки при начальных условиях:

$$t=0, x=x_0, v_x=v_0.$$

### Решение:

Учитывая, что  $Q_x = Q$  :

$$m \frac{dv_x}{dt} = Q$$

$$v_x = (Q/m) t + C_1.$$

$$\frac{dx}{dt} = (Q/m) t + C_1.$$

$$x = (Q/2m) t^2 + C_1 t + C_2$$

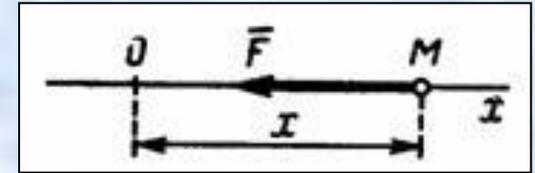
$$v_0 = C_1, x_0 = C_2$$

$$x = x_0 + v_0 t + (Q/2m) t^2.$$

## Дифференциальные уравнения движения материальной точки

### Свободные прямолинейные колебания материальной точки

**Восстанавливающая сила**  $F$  - сила, стремящаяся вернуть точку в положение равновесия (всегда направлена к положению равновесия и зависит от величины отклонения точки от положения равновесия  $x$ ).



$$F_x = -cx$$

**Сила сопротивления**  $R$ , зависящая от скорости движения

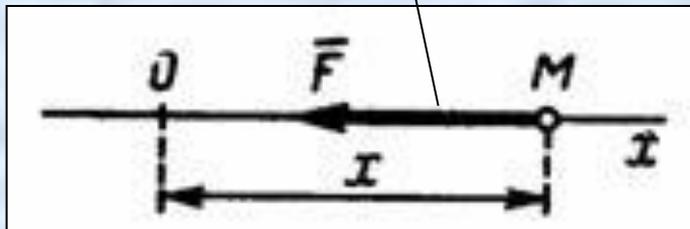
$$R_x = -\mu \dot{x}$$

**Возмущающая сила**, т.е. сила, являющаяся заданной функцией времени.

## Дифференциальные уравнения движения материальной точки

### Свободные прямолинейные колебания материальной точки

Восстанавливающая сила



$$F_x = -cx$$

$$m\ddot{x} = F_x, \text{ или}$$

$$m\ddot{x} = -cx$$

если  $c/m = k^2$ , то

$$\ddot{x} + k^2x = 0$$

*дифференциальное уравнение свободных колебаний при отсутствии сопротивления.*

## Дифференциальные уравнения движения материальной точки

### Свободные прямолинейные колебания материальной точки

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$x = e^{nt}$$

$$n^2 + k^2 = 0, n_{1,2} = \pm ik$$

общее решение

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt,$$

Пусть

$$C_1 = A \cos \alpha,$$

$$C_2 = A \sin \alpha,$$

$$x = A (\sin kt \cos \alpha + \cos kt \sin \alpha)$$

или

**закон гармонических колебаний точки:**

$$x = A \sin (kt + \alpha).$$

Скорость точки:  $v_x = Ak \cos (kt + \alpha).$

## Дифференциальные уравнения движения материальной точки

### Свободные прямолинейные колебания материальной точки

$$x = A \sin (kt + \alpha)$$

$A$  - амплитуда колебаний.

$(kt + \alpha) = \phi$  - фаза колебаний.

$\alpha$  - начальная фаза колебаний.

$k$  - круговая частота колебаний

**Период колебаний  $T$**  -  
промежуток времени, в течение  
которого точка совершает одно  
полное колебание

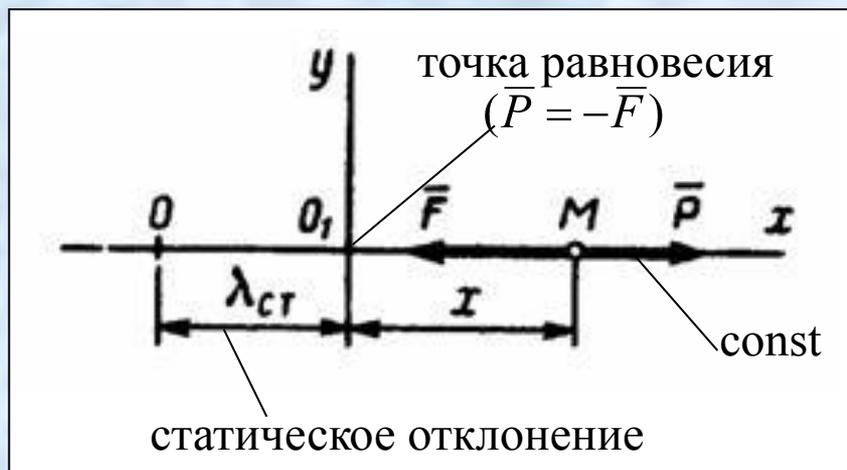
$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

**Частота колебаний  $\nu$**  - число  
колебаний, совершаемых за 1с

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}.$$

## Дифференциальные уравнения движения материальной точки

### Влияние постоянной силы на свободные колебания точки



$$P = \text{const}$$

$$F = cx$$

В точке равновесия при  $x = \lambda_{\text{ст}}$

$$F = P = c\lambda_{\text{ст}}$$

$$F_x = -c(x + \lambda_{\text{ст}})$$

В результате

$$m\ddot{x} = -cx$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

$$T = 2\pi\sqrt{m\lambda_{\text{ст}} / P}$$

## ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

### Введение в динамику системы

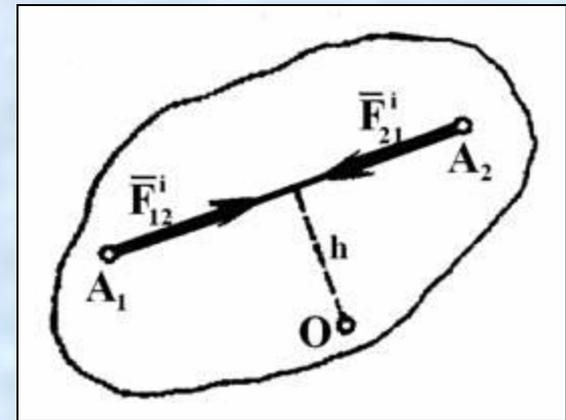
**Механическая система** - совокупность материальных точек или тел, находящихся в механическом взаимодействии

$\bar{F}_k^e$  - **Внешние силы**, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы

$\bar{F}_k^i$  - **Внутренние силы**, с которыми точки или тела данной системы действуют друг на друга

**Свойства внутренних сил:**

$$\sum \bar{F}_k^i = 0 \quad \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k^i) = 0$$



## Центр масс механической системы

**Масса системы:**  $M = \sum m_k$

**Центром масс** (центром инерции) механической системы называется геометрическая точка  $C$ , координаты которой :

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{M} \quad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{M} \quad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{M}$$

Радиус-вектор центра масс:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M}$$

## ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Для каждой точки системы

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i$$

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i$$

$$\sum m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = M \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \bar{r}_C = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M} \\ \sum m_k \bar{r}_k = M \bar{r}_C \end{array} \right]$$

$$\sum m_k \bar{a}_k = M \bar{a}_C$$

$\bar{a}_C$  — ускорение центра  
масс системы

$$M \bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e$$

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 x_C}{dt^2} &= \sum F_{kx}^e \\ M \frac{d^2 y_C}{dt^2} &= \sum F_{ky}^e \\ M \frac{d^2 z_C}{dt^2} &= \sum F_{kz}^e \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения  
движения центра масс в проекциях  
на оси координат

## ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

$$M\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e$$

### Закон сохранения движения центра масс

1. Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю

$$\sum \bar{F}_k^e = 0 \longrightarrow \bar{a}_C = 0 \longrightarrow \bar{v}_C = \text{const}$$

2. Пусть сумма внешних сил системы, не равна нулю, но сумма их проекций на какую-нибудь ось равна нулю

$$\sum \bar{F}_k^e \neq 0$$

$$\sum F_{kx}^e = 0 \longrightarrow M \ddot{x}_C = 0 \longrightarrow \ddot{x}_C = 0 \longrightarrow \dot{x}_C = v_{Cx} = \text{const}$$

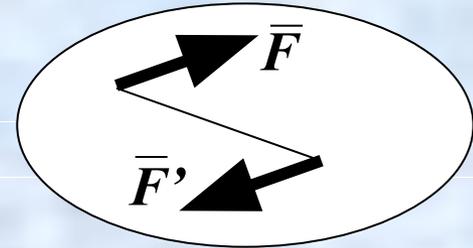
## ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

### Примеры применения теоремы о движении центра масс

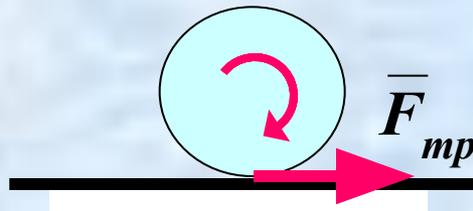
Действие пары сил на тело

$$\sum \bar{F}_k^e = \bar{F} + \bar{F}' = 0$$

$$\bar{a}_C = 0 \quad \bar{v}_C = \text{const} = \bar{v}_{0C} = 0$$

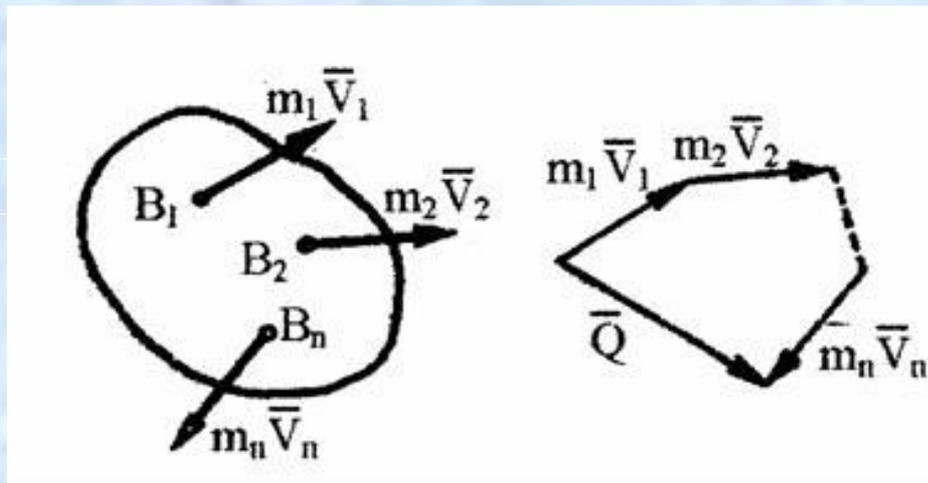


Движение по горизонтальной плоскости



# ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

## Количество движения



$m\bar{v}$  - Количество движения материальной точки

Количество движения механической системы  $\bar{Q} = \sum m_k \bar{v}_k$ .

Количество движения твердого тела  $\bar{Q} = M\bar{v}_C$

## ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

### Импульс силы

Элементарный импульс силы:  $d\bar{S} = \bar{F} dt$

Импульс силы за конечный промежуток времени  $t_1$ :  $\bar{S} = \int_0^{t_1} \bar{F} dt.$

Проекции импульса на координатные оси

$$S_y = \int_0^{t_1} F_y dt. \quad S_x = \int_0^{t_1} F_x dt. \quad S_z = \int_0^{t_1} F_z dt.$$

Единицей измерения импульса силы в системе СИ является 1  
 $\text{кг} \cdot \text{м/с} = 1 \text{ Н/с}.$

## ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Дифференциальное уравнение движения точки  $\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \sum \bar{F}_k$ .

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \sum \int_0^{t_1} \bar{F}_k dt.$$

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \sum \bar{S}_k$$

*Теорема об изменении количества движения материальной точки*

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_{kx},$$

$$mv_{1y} - mv_{0y} = \sum S_{ky},$$

$$mv_{1z} - mv_{0z} = \sum S_{kz}.$$

## ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Для всех точек механической системы

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i = 0$$

$$\sum m_k \bar{a}_k = \frac{d}{dt} \sum m_k \bar{v}_k = \frac{d\bar{Q}}{dt}$$

*Теорема об изменении количества движения системы:*

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e$$

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \int_0^{t_1} \bar{F}_k^e dt$$

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e$$

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e$$

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e$$

$$Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{ky}^e$$

$$Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{kz}^e$$



## ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

### Закон сохранения количества движения

$$1. \quad \sum \bar{F}_k^e = 0.$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e = 0$$

$$\bar{Q} = \text{const}$$

$$2. \quad \sum F_{kx}^e = 0.$$

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e = 0$$

$$Q_x = \text{const}$$

# ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

## Осевые моменты инерции тела

$$I_z = \sum m_k h_k^2$$

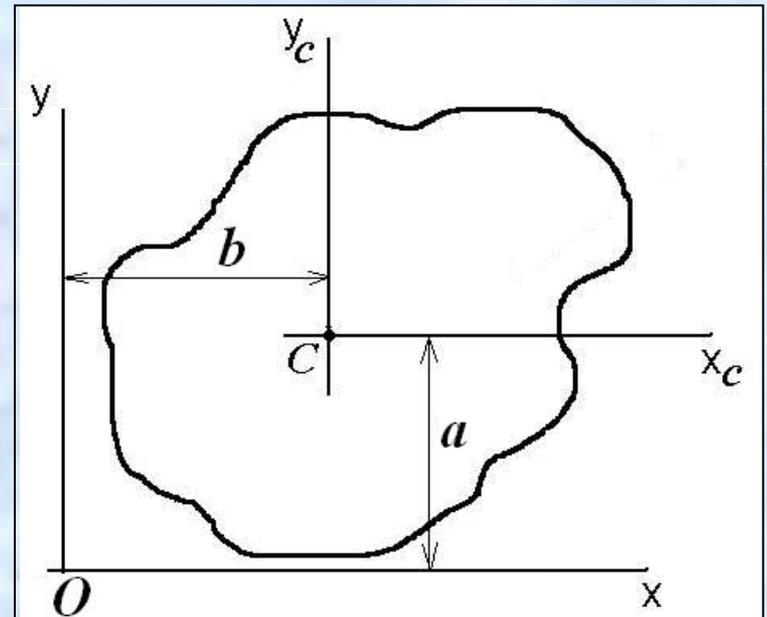
$$I_z = M \rho_z^2$$

$\rho$  - радиус инерции тела

*Теорема Гюйгенса*

$$I_{Ox} = I_{Cx} + M a^2;$$

$$I_{Oy} = I_{Cy} + M b^2.$$



## ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

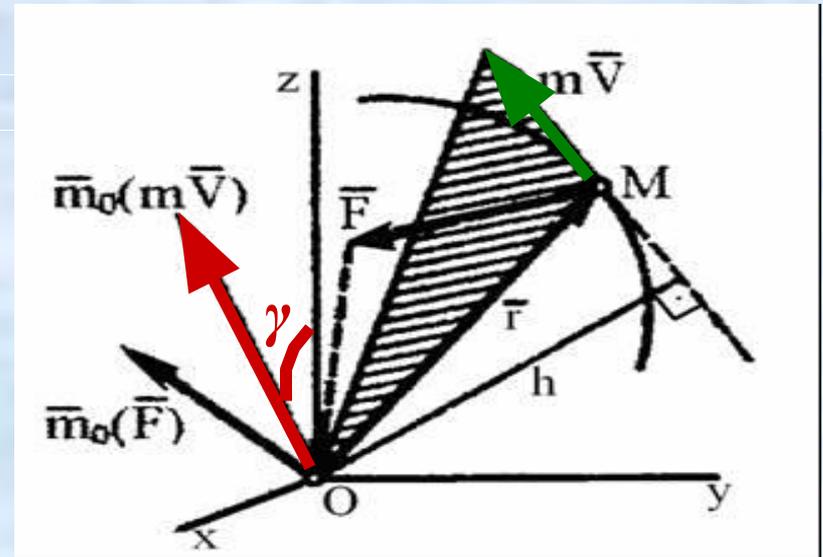
### Момент количества движения материальной точки

$$\bar{m}_0(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v}$$

$$|\bar{m}_0(m\bar{v})| = mvh$$

$$m_z(m\bar{v}) = [\bar{m}_0(m\bar{v})]_z =$$

$$= |\bar{m}_0(m\bar{v})| \cos \gamma$$



## ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

### Теорема об изменении момента количества движения точки

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \left( \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} \right) + \left( \bar{r} \times m \frac{d\bar{v}}{dt} \right) = (\bar{v} \times m\bar{v}) + (\bar{r} \times m\bar{a}).$$

$$\bar{v} \times m\bar{v} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \bar{r} \times \bar{F} \quad \text{или}$$

$$\frac{d}{dt}[\bar{m}_0(m\bar{v})] = \bar{m}_0(\bar{F})$$

## ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

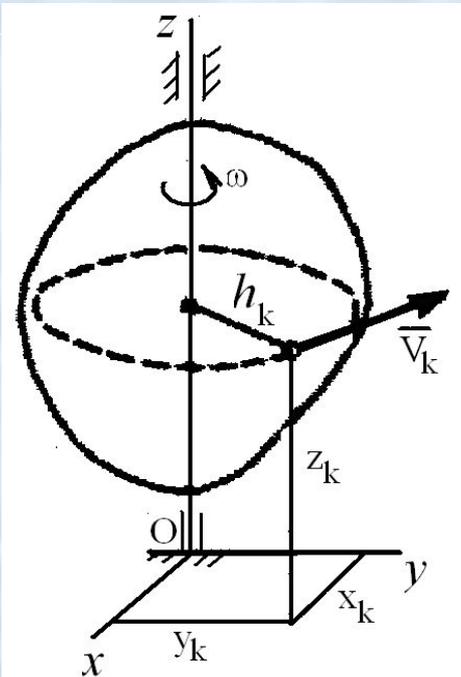
### Кинетический момент системы

$$\bar{K}_0 = \sum \bar{m}_0 (m_k \bar{v}_k)$$

$$K_x = \sum m_x (m_k \bar{v}_k)$$

$$K_y = \sum m_y (m_k \bar{v}_k)$$

$$K_z = \sum m_z (m_k \bar{v}_k)$$



### Кинетический момент вращающегося тела

$$m_z (m_k \bar{v}_k) = m_k v_k h_k \quad K_z = \sum m_z (m_k \bar{v}_k)$$

$$K_z = \sum m_k v_k h_k = \sum m_k \omega h_k^2$$

$$K_z = I_z \omega$$

## ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Если рассмотреть одну точку системы:

$$\frac{d}{dt} [\bar{m}_0 (m_k \bar{v}_k)] = \bar{m}_0 (\bar{F}_k^e) + \bar{m}_0 (\bar{F}_k^i),$$

для всех точек системы:

$$\frac{d}{dt} [\sum \bar{m}_0 (m_k \bar{v}_k)] = \sum \bar{m}_0 (\bar{F}_k^e) + \underbrace{\sum m_0 (\bar{F}_k^i)}_{= 0}.$$

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \sum \bar{m}_0 (\bar{F}_k^e)$$

$$\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} &= \sum m_x (\bar{F}_k^e) \\ \frac{dK_y}{dt} &= \sum m_y (\bar{F}_k^e) \\ \frac{dK_z}{dt} &= \sum m_z (\bar{F}_k^e) \end{aligned}$$

*Теорема об изменении кинетического  
момента механической системы*

## ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

следствия из теоремы:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \sum \bar{m}_0 (\bar{F}_k^e)$$

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z (\bar{F}_k^e)$$

1. Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно центра  $O$  равна нулю

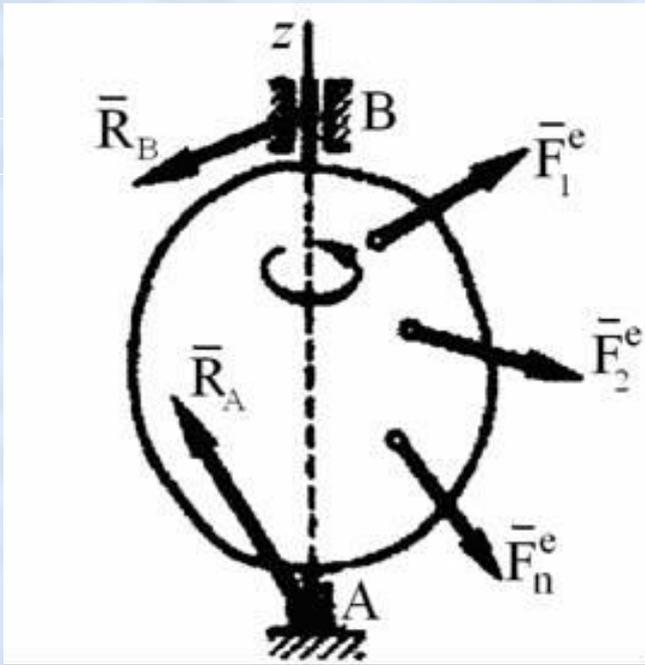
$$\sum \bar{m}_0 (\bar{F}_k^e) = 0 \quad \text{то} \quad \bar{K}_0 = \text{const}$$

2. Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно некоторой неподвижной оси равна нулю

$$\sum m_z (\bar{F}_k^e) = 0 \quad \text{то} \quad K_z = \text{const}$$

## ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Дифференциальное уравнение вращения  
тела вокруг неподвижной оси



$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z (\bar{F}_k^e) + \sum m_z (\bar{R}_k) = M_z$$

$$K_z = I_z \omega$$

$$\frac{dK_z}{dt} = \frac{d(I_z \omega)}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt}$$

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z$$

# ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

## Работа силы. Мощность

### Элементарная работа силы

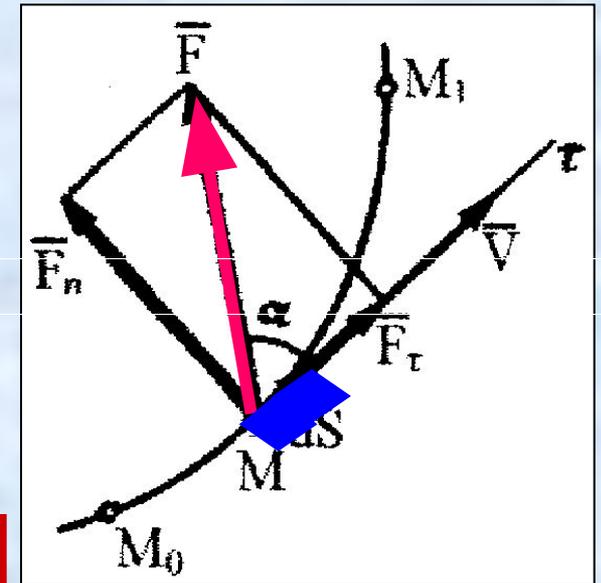
$$dA = F_{\tau} ds, \text{ где } F_{\tau} = F \cos \alpha,$$

$$dA = F ds \cos \alpha.$$

### Работа силы на конечном перемещении

$$1. (\bar{F} \neq \text{const}) \quad A_{(M_0 M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_{\tau} ds$$

$$2. (\bar{F} = \text{const}) \quad A_{(M_0 M_1)} = F_{\tau} s_1 = F s_1 \cos \alpha$$

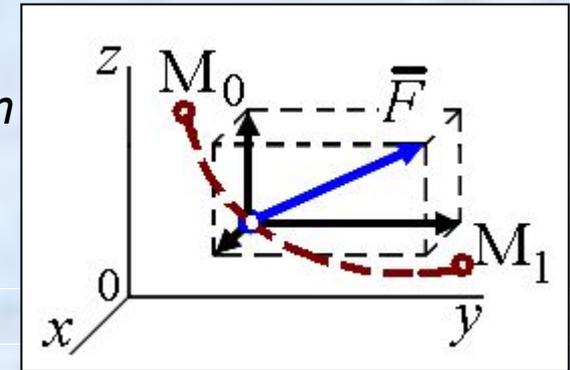


## ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

### Работа силы. Мощность

Если вектор силы спроецировать на оси координат

$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$



Единицей измерения работы в системе СИ является - 1 джоуль  
(1 Дж = 1Н·м = 1 кг·м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>).

**Мощность** - это величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени.

$$N = dA/dt = F\tau ds/dt = F\tau v.$$

Единицей измерения мощности в системе СИ является ватт  
(1 Вт = 1Дж/с). В технике - 1 л.с. = 736 Вт.

## ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

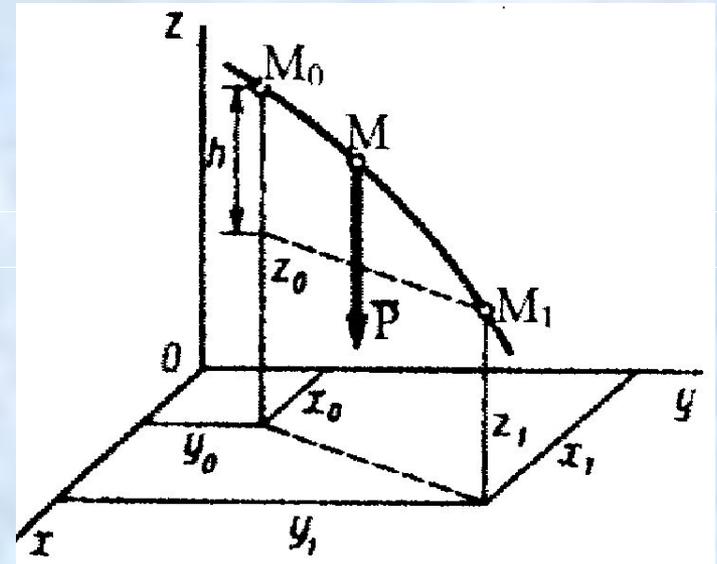
### Примеры вычисления работы

#### Работа силы тяжести

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{z_0}^{z_1} (-P) dz = P(z_0 - z_1)$$

$$z_0 - z_1 = h$$

$$A_{(M_0M_1)} = \pm P \cdot h$$



Работа силы тяжести не зависит от формы траектории точки её приложения. Силы, обладающие таким свойством, называются **потенциальными силами**.

## ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

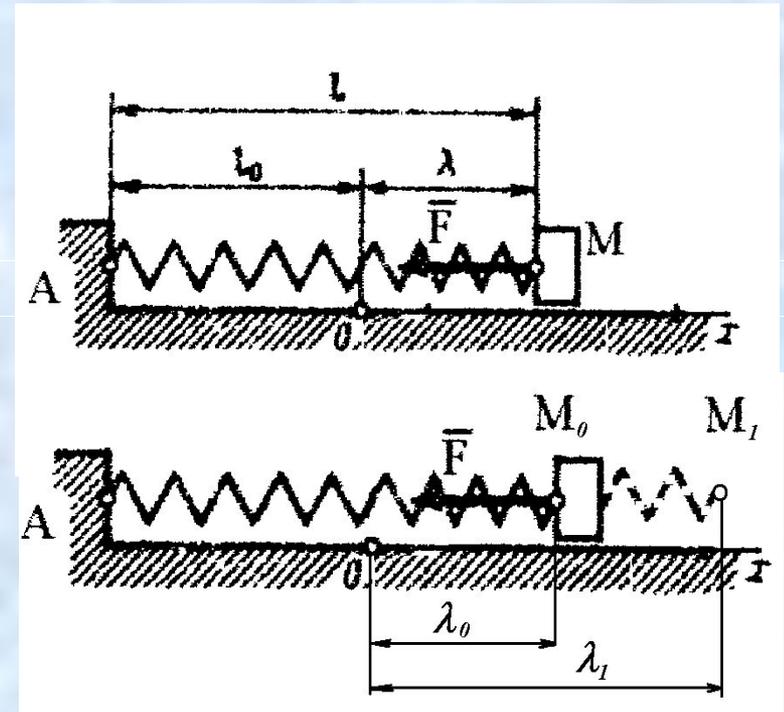
### Работа силы. Мощность

#### Работа силы упругости

$$F = c\lambda = c|x| \text{ и } F_x = -cx.$$

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{x_0}^{x_1} (-cx) dx = \frac{c}{2} (x_0^2 - x_1^2).$$

$$A_{(M_0M_1)} = \frac{c}{2} (\lambda_0^2 - \lambda_1^2),$$



## ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

### Работа силы. Мощность

*Работа силы, приложенной к вращающемуся телу*

$$dA = F_{\tau} ds \quad \text{где} \quad ds = h d\varphi$$

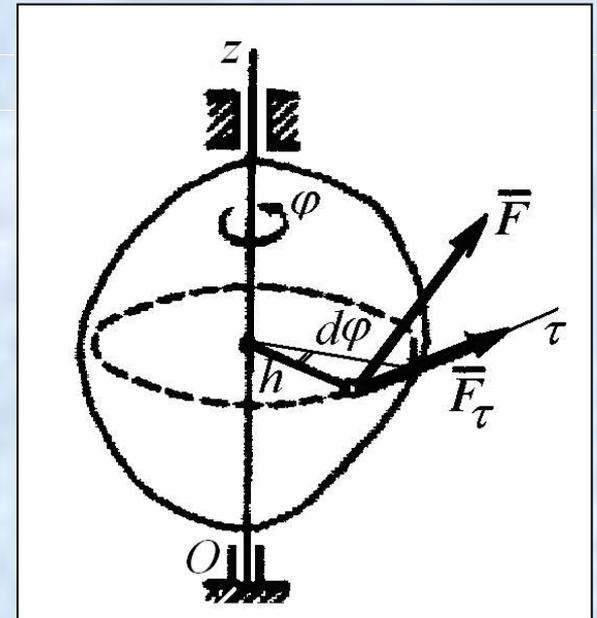
$$dA = F_{\tau} h d\varphi.$$

$$F_{\tau} h = m_z(\bar{F}) = M_z$$

$$dA = M_z d\varphi$$

$$A = \int_0^{\varphi_1} M_z d\varphi \quad \text{или}$$

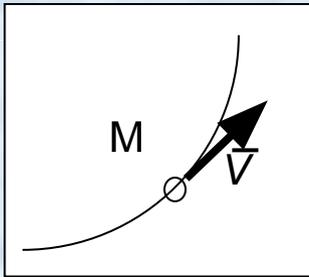
$$A = \pm M_z \cdot \varphi.$$



# ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

## Кинетическая энергия

*для материальной точки*



$$m \frac{v^2}{2}$$

*для механической системы  
из  $n$  материальных точек*

$$T = \sum_{k=1}^n m_k \frac{v_k^2}{2}$$

Кинетическая энергия - скалярная величина

Единица измерения кинетической энергии в системе СИ - 1 Дж.

## ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

### Кинетическая энергия

для твердого тела

Поступательное движение

$$M \frac{v_C^2}{2}$$

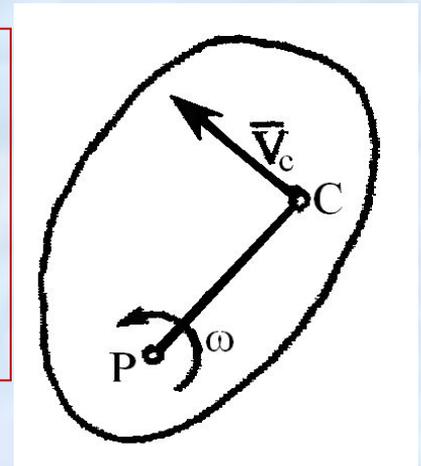
Вращательное движение

$$T = I_z \frac{\omega^2}{2}$$

Плоскопараллельное движение

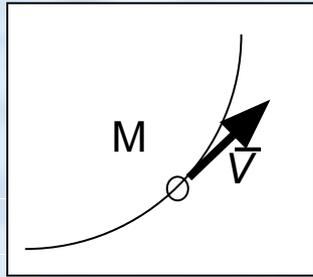
$$T_{\text{пл}} = I_P \frac{\omega^2}{2}$$

$$T_{\text{пл}} = M \frac{v^2}{2} = I_c \frac{\omega^2}{2}$$



## ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим материальную точку с массой  $m$



$$ma_{\tau} = \sum F_{k\tau}$$

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$$

$$mv \frac{dv}{ds} = \sum F_{k\tau}$$

$$mvdv = \sum dA_k$$

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum dA_k$$

*теорема об изменении  
кинетической энергии точки  
в дифференциальной форме*

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}$$

*теорема об изменении  
кинетической энергии точки  
в конечном виде*

## ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим материальную точку механической системы с массой  $m_k$

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i$$

Для всей механической системы

$$d\sum\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i$$

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i$$

**теорема об изменении  
кинетической энергии системы  
в дифференциальной форме**

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i$$

**теорема об изменении  
кинетической энергии системы  
в интегральной форме**