МЕХАНИКА

Теоретическая механика
Модуль 1

Раздел 3 – ДИНАМИКА ТОЧКИ

- ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ — ЛЕКЦИЯ 14
- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ — ЛЕКЦИЯ 15, ЛЕКЦИЯ 16

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Динамика - *это раздел механики, в котором изучается движение материальных точек, тел и механических систем под действием приложенных сил*

Основные законы механики

Первый закон (закон инерции)

Второй закон (основной закон динамики)

$$m\overline{a} = \overline{F}$$

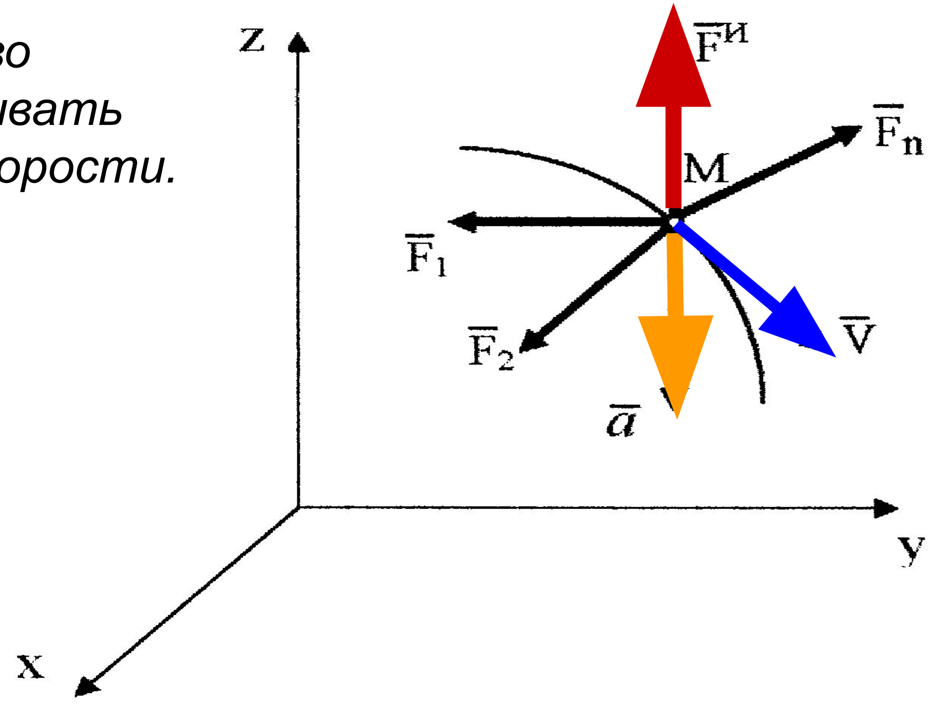
Третий закон (закон равенства действия и противодействия)

Четвертый закон (закон независимости действия сил)

$$\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \ldots + \overline{a}_n$$

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Инерция – это свойство материальной точки оказывать сопротивление изменению скорости.



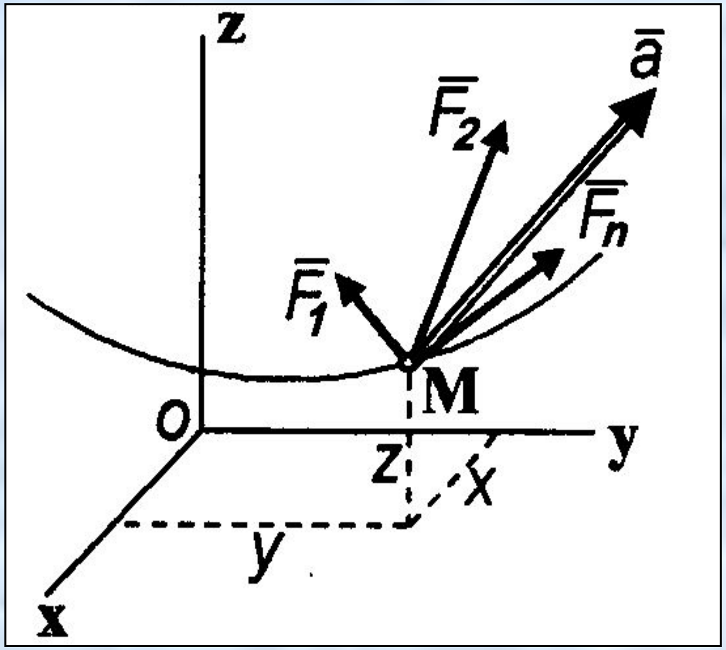
$$-m\overline{a} = \overline{F}^{u}$$

Сила инерции материальной точки направлена противоположно ускорению точки и приложена к телу, сообщающему точке это ускорение

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на декартовые оси:

$$\boxed{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \sum F_{kx} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \sum F_{ky} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \sum F_{kz} \end{aligned}}$$



Закон движения точки:

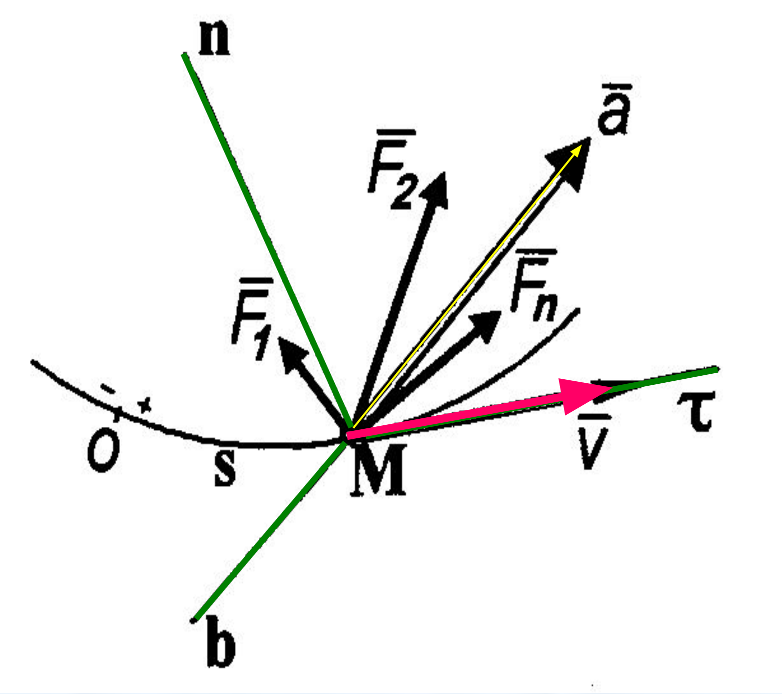
$$\begin{cases} x = f_1(t); \\ y = f_2(t); \\ z = \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Дифференциальные уравнения в проекциях на оси естественного трехгранника

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$\boxed{\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= \sum F_{k\tau} \\ m\frac{v^2}{\rho} &= \sum F_{kn} \end{aligned}}$$



Дифференциальные уравнения движения материальной точки

$$\boxed{m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \sum \bar{F}_k}$$

ДВЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

Первая задача динамики: по известному закону движения материальной точки находят приложенные к ней силы.

Вторая (основная) задача динамики: при известных действующих на материальную точку силах, определяют закон движения точки

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Решение задач динамики точки:

Первая задача динамики:

- *составить и решать дифференциальные уравнения движения материальной точки*

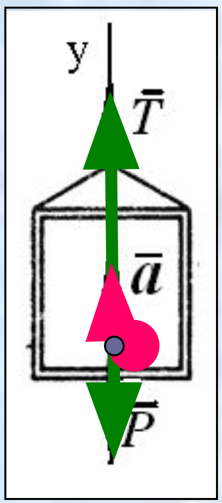
Вторая задача динамики:

- *выбрать систему координат и записать начальные условия;*
- *изобразить движущуюся точку в произвольном положении и все действующие на точку силы;*
- *составить дифференциальные уравнения движения точки;*
- *проинтегрировать полученные уравнения, определив постоянные интегрирования из начальных условий.*
- *найти искомые величины из полученных выражений.*

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Лифт весом P начинает подъем по закону:

$y = at^2.$



Определить:

натяжение троса T

Решение. На лифт действуют сила тяжести $\overline{P}$ и реакция троса $\overline{T}$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}$$

$$m\ddot{y} = P_y + T_y$$

$$(P/g)\,2a = T - P,$$

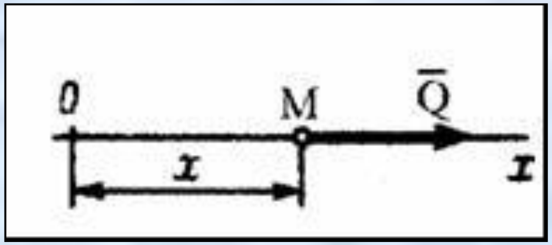
$$T = P\,(1 + 2a/g).$$

Если лифт опускается с таким же ускорением:

$$T = P\,(1 - 2a/g).$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Задача 2.
Материальная точка с массой m движется под действием постоянной силы $\overline{Q}$



Найти:
закон движения точки при начальных условиях:

$$t=0,\ x=x_0,\ v_x=v_0\ .$$

Решение:

Учитывая, что $Q_x = Q$: $\quad m\dfrac{dv_x}{dt} = Q$

$$v_x = (Q/m)\,t + C_1.$$

$$\frac{dx}{dt} = (Q/m)\,t + C_1.$$

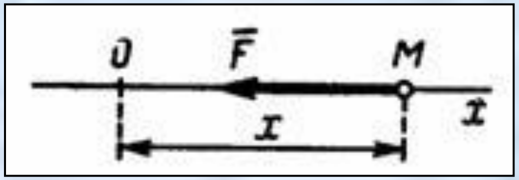
$$x = (Q/2m)t^2 + C_1 t + C_2$$

$$v_0 = C_1,\ x_0 = C_2$$

$$x = x_0 + v_0\,t + (Q/2m)t^2.$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Свободные прямолинейные колебания материальной точки



Восстанавливающая сила F - сила, стремящаяся вернуть точку в положение равновесия (всегда направлена к положению равновесия и зависит от величины отклонения точки от положения равновесия x).

$$F_x = -cx$$

Сила сопротивления R, зависящая от скорости движения

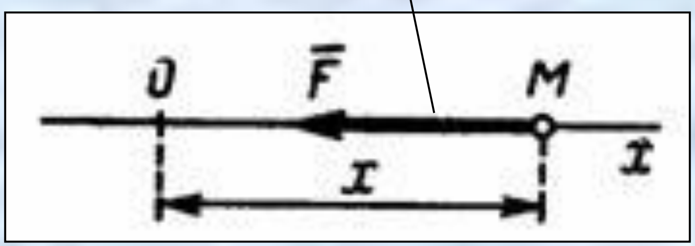
$$R_x = -\mu \dot{x}$$

Возмущающая сила, т.е. сила, являющаяся заданной функцией времени.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Свободные прямолинейные колебания материальной точки

Восстанавливающая сила



$$F_x = -cx$$

$$m\ddot{x} = F_x\,,$$ или

$$m\ddot{x} = -cx$$

если $c/m = k^2$, то

$$\boxed{\ddot{x} + k^2 x = 0}$$

дифференциальное уравнение свободных колебаний
при отсутствии сопротивления.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Свободные прямолинейные колебания материальной точки

$$\boxed{\ddot{x} + k^2 x = 0}$$

Характеристическое уравнение:

$$x = e^{nt}$$

$$n^2 + k^2 = 0,\ n_{1,2} = \pm ik$$

общее решение

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt,$$

Пусть
$$C_1 = A\cos\alpha,$$
$$C_2 = A\sin\alpha,$$

$$x = A\,(\sin kt \cos\alpha + \cos kt \sin\alpha)$$

или

закон гармонических колебаний точки:

$$\boxed{x = A\sin(kt + \alpha).}$$

Скорость точки: $v_x = Ak\cos(kt + \alpha).$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Свободные прямолинейные колебания материальной точки

$$\boxed{x = A \sin (kt + \alpha)}$$

A - *амплитуда колебаний.*

$(kt+\alpha)= \phi$ - *фаза колебаний.*

α - *начальная фаза колебаний.*

k - *круговая частота колебаний*

Период колебаний T **-** *промежуток времени, в течение которого точка совершает одно полное колебание*

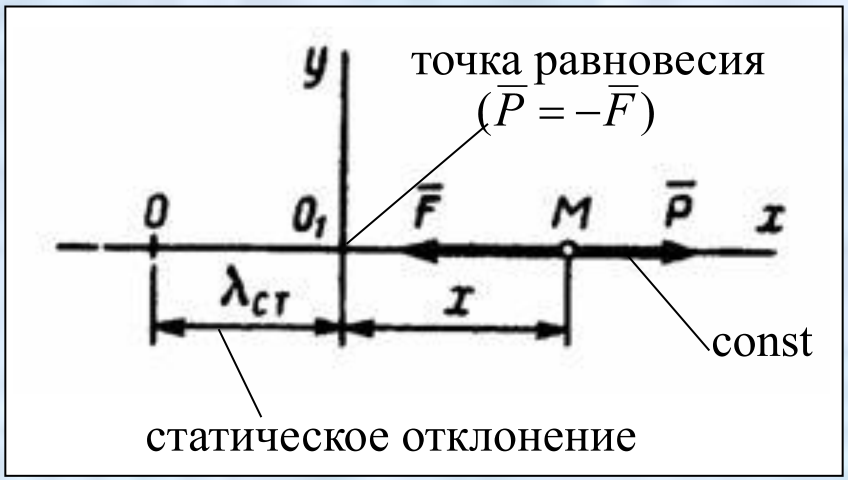
$$T = 2\pi/k.$$

Частота колебаний ν *– число колебаний, совершаемых за 1с*

$$\nu = 1/T = k/2\pi.$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Влияние постоянной силы на свободные колебания точки



$$P = \text{const}$$

$$F = cx$$

В точке равновесия при $x = \lambda_{ст}$

$$F = P = c\lambda_{ст}$$

$$F_x = -c(x + \lambda_{ст})$$

В результате

$$m\ddot{x} = -cx$$

или

$$\boxed{\ddot{x} + k^2 x = 0}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{m\lambda_{cm} / P}}$$

17.2

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Введение в динамику системы

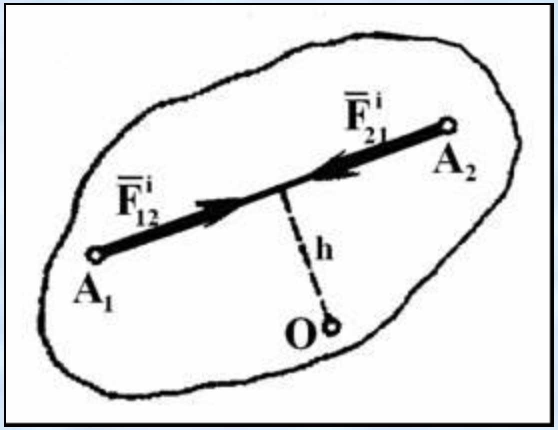
Механическая система - совокупность материальных точек или тел, находящихся в механическом взаимодействии

$\overline{F}_k^e$ *- Внешние силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы*

$\overline{F}_k^i$ *- Внутренние силы, с которыми точки или тела данной системы действуют друг на друга*

Свойства внутренних сил:

$$\sum \overline{F}_k^i = 0 \qquad \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k^i) = 0$$



ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Центр масс механической системы

Масса системы: $M = \sum m_k$

Центром масс *(центром инерции) механической системы называется геометрическая точка С, координаты которой :*

$$\boxed{x_C = \frac{\sum m_k x_k}{M} \qquad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{M} \qquad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{M}}$$

Радиус-вектор центра масс: $\boxed{\bar{r}_C = \dfrac{\sum m_k \bar{r}_k}{M}}$

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Для каждой точки системы

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i$$

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i$$

$$\sum m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = M \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2}$$

$$\left[\begin{array}{c} \bar{r}_C = \dfrac{\sum m_k \bar{r}_k}{M} \\ \sum m_k \bar{r}_k = M \bar{r}_C \end{array} \right]$$

$$\sum m_k \bar{a}_k = M \bar{a}_C$$

$\bar{a}_C$ — *ускорение центра масс системы*

$$\boxed{M \bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} M \dfrac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum F_{kx}^e \\ M \dfrac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum F_{ky}^e \\ M \dfrac{d^2 z_C}{dt^2} = \sum F_{kz}^e \end{array}}$$

Дифференциальные уравнения движения центра масс в проекциях на оси координат

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

$$\boxed{M\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e}$$

Закон сохранения движения центра масс

1. Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю

$$\sum \bar{F}_k^e = 0 \longrightarrow \bar{a}_C = 0 \longrightarrow \bar{v}_C = \text{const}$$

2. Пусть сумма внешних сил системы, не равна нулю, но сумма их проекций на какую-нибудь ось равна нулю

$$\sum \bar{F}_k^e \neq 0$$

$$\sum F_{kx}^e = 0 \longrightarrow M\ddot{x}_C = 0 \longrightarrow \ddot{x}_C = 0 \longrightarrow \dot{x}_C = v_{Cx} = \text{const}$$

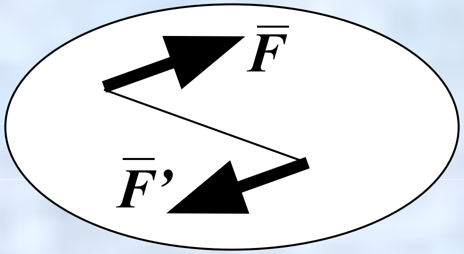
ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Примеры применения теоремы о движении центра масс

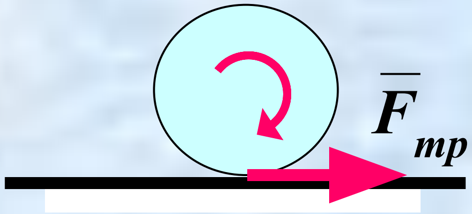
Действие пары сил на тело

$$\sum \overline{F}_k^e = \overline{F} + \overline{F}' = 0$$

$$\overline{a}_C = 0 \qquad \overline{v}_C = \text{const} = \overline{v}_{0C} = 0$$

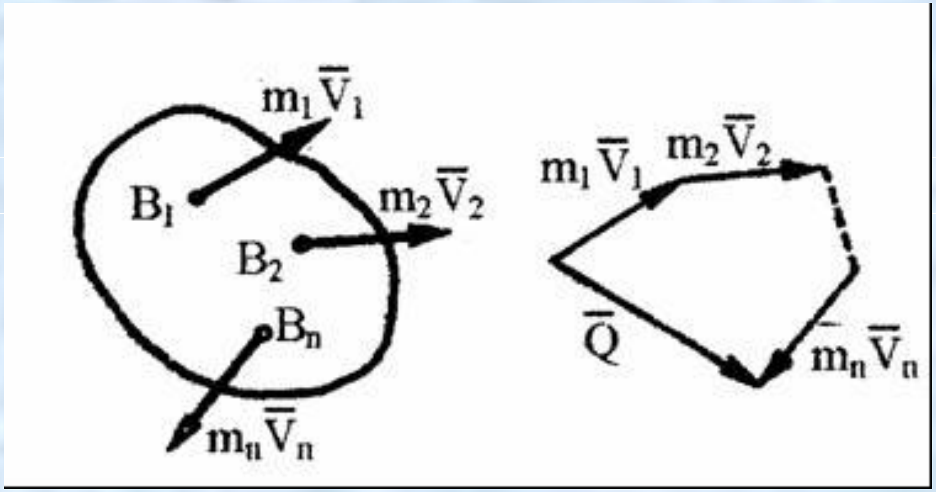


Движение по горизонтальной плоскости



ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Количество движения



$m\overline{v}$ *- Количество движения материальной точки*

Количество движения механической системы $\overline{Q} = \sum m_k \overline{v}_k .$

Количество движения твердого тела $\overline{Q} = M\overline{v}_C$

18.3

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Импульс силы

Элементарный импульс силы: $d\overline{S} = \overline{F}dt$

Импульс силы за конечный промежуток времени t_1: $\overline{S} = \int_0^{t_1} \overline{F}dt.$

Проекции импульса на координатные оси

$$S_y = \int_0^{t_1} F_y dt. \qquad S_x = \int_0^{t_1} F_x dt. \qquad S_z = \int_0^{t_1} F_z dt.$$

Единицей измерения импульса силы в системе СИ является 1 кг·м/с = 1 Н/с.

18.4

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Дифференциальное уравнение движения точки $\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \sum \bar{F}_k.$

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \sum \int_0^{t_1} \bar{F}_k dt.$$

$$\boxed{m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \sum \bar{S}_k}$$

Теорема об изменении количества движения материальной точки

$$m v_{1x} - m v_{0x} = \sum S_{kx},$$
$$m v_{1y} - m v_{0y} = \sum S_{ky},$$
$$m v_{1z} - m v_{0z} = \sum S_{kz}.$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Для всех точек механической системы

$$\underline{\sum m_k \bar{a}_k} = \sum \bar{F}_k^e + \underbrace{\sum \bar{F}_k^i}_{=0}$$

$$\sum m_k \bar{a}_k = \frac{d}{dt}\sum m_k \bar{v}_k = \frac{d\bar{Q}}{dt}.$$

Теорема об изменении количества движения системы:

$$\boxed{\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e.} \qquad \bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \int_0^{t_1} \bar{F}_k^e dt \qquad \boxed{\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e}$$

$$\boxed{\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e.}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Q_{1x} - Q_{ox} &= \sum S_{kx}^e \\ Q_{1y} - Q_{oy} &= \sum S_{ky}^e \\ Q_{1z} - Q_{oz} &= \sum S_{kz}^e \end{aligned}}$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Закон сохранения количества движения

1. $\boxed{\sum \overline{F}_k^e = 0.}$ $\quad \dfrac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_k^e = 0$ $\quad \boxed{\overline{Q} = \text{const}}$

2. $\boxed{\sum F_{kx}^e = 0.}$ $\quad \dfrac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e = 0$ $\quad \boxed{Q_x = \text{const}}$

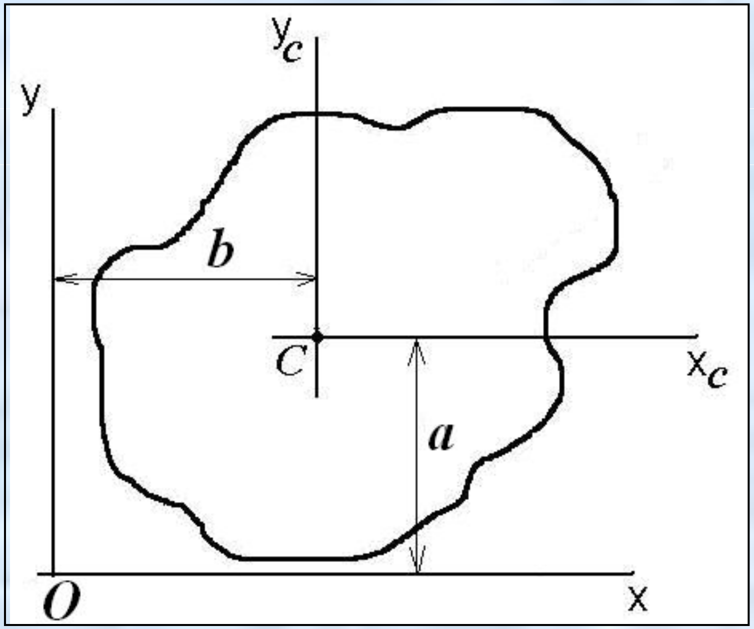
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Осевые моменты инерции тела

$$\boxed{I_z = \sum m_k h_k^2}$$

$$\boxed{I_z = M\rho_z^2}$$

ρ - *радиус инерции тела*



Теорема Гюйгенса

$$I_{Ox} = I_{Cx} + M a^2;$$

$$I_{Oy} = I_{Cy} + M b^2.$$

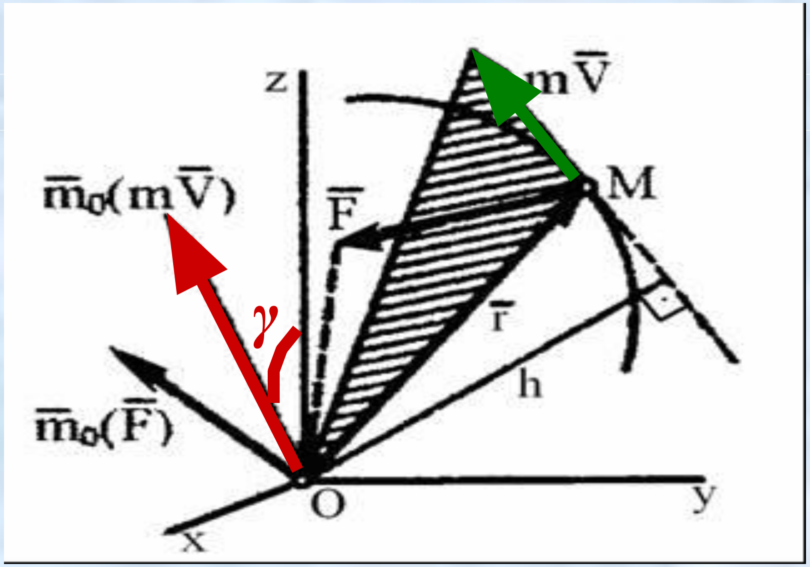
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Момент количества движения материальной точки

$$\overline{m}_0(m\overline{v}) = \overline{r} \times m\overline{v}$$

$$\left|\overline{m}_0(m\overline{v})\right| = mvh$$

$$m_z(m\overline{v}) = [\overline{m}_0(m\overline{v})]_z =$$
$$= \left|\overline{m}_0(m\overline{v})\right| \cos\gamma$$



ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Теорема об изменении момента количества движения точки

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}\times m\bar{v})=\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\times m\bar{v}\right)+\left(\bar{r}\times m\frac{d\bar{v}}{dt}\right)=(\bar{v}\times m\bar{v})+(\bar{r}\times m\bar{a}).$$

$$\bar{v}\times m\bar{v}=0$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}\times m\bar{v})=\bar{r}\times\bar{F}$$

или

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\overline{m}_0(m\bar{v})\right]=\overline{m}_0(\bar{F})}$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

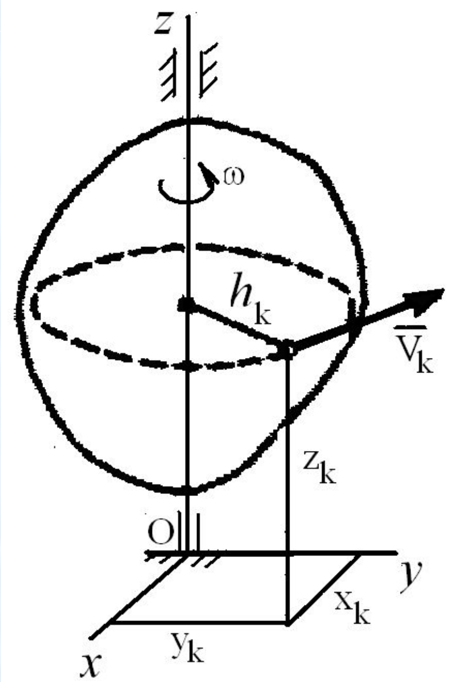
Кинетический момент системы

$$\boxed{\bar{K}_0 = \sum \bar{m}_0(m_k \bar{v}_k)}$$

$$K_x = \sum m_x(m_k \bar{v}_k)$$

$$K_y = \sum m_y(m_k \bar{v}_k)$$

$$K_z = \sum m_z(m_k \bar{v}_k)$$



Кинетический момент вращающегося тела

$$m_z(m_k \bar{v}_k) = m_k v_k h_k \qquad K_z = \sum m_z(m_k \bar{v}_k)$$

$$K_z = \sum m_k v_k h_k = \sum m_k \omega h_k^2$$

$$\boxed{K_z = I_z \omega}$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Если рассмотреть одну точку системы:

$$\frac{d}{dt}[\overline{m}_0(m_k\overline{v}_k)] = \overline{m}_0(\overline{F}_k^e) + \overline{m}_0(\overline{F}_k^i),$$

для всех точек системы:

$$\frac{d}{dt}[\underbrace{\sum \overline{m}_0(m_k\overline{v}_k)}_{\overline{K}_0}] = \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k^e) + \underbrace{\sum m_0(\overline{F}_k^i)}_{=0}.$$

$$\boxed{\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k^e)}$$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} &= \sum m_x(\overline{F}_k^e) \\ \frac{dK_y}{dt} &= \sum m_y(\overline{F}_k^e) \\ \frac{dK_z}{dt} &= \sum m_z(\overline{F}_k^e) \end{aligned}}$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k^e) \\ \frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\overline{F}_k^e)\end{gathered}}$$

следствия из теоремы:

1. Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно центра О равна нулю

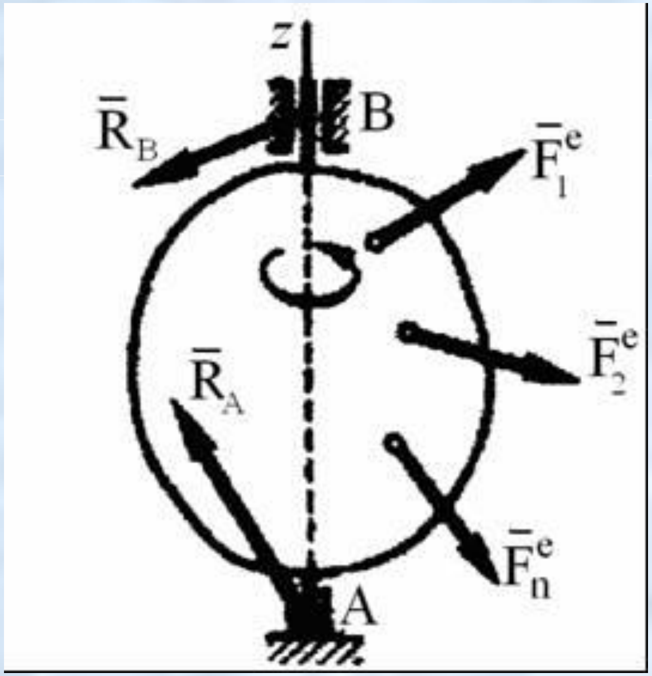
$$\sum \overline{m}_0(\overline{F}_k^e) = 0 \qquad \textit{то} \qquad \overline{K}_0 = \text{const}$$

2. Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно некоторой неподвижной оси равна нулю

$$\sum m_z(\overline{F}_k^e) = 0 \qquad \textit{то} \qquad K_z = \text{const}$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси



$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\overline{F}_k^e) + \sum m_z(\overline{R}_k) = M_z$$

$$K_z = I_z\omega$$

$$\frac{dK_z}{dt} = \frac{d\left(I_z\omega\right)}{dt} = I_z\frac{d\omega}{dt}{}_z$$

$$\boxed{I_z\frac{d\omega}{dt} = I_z\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z}$$

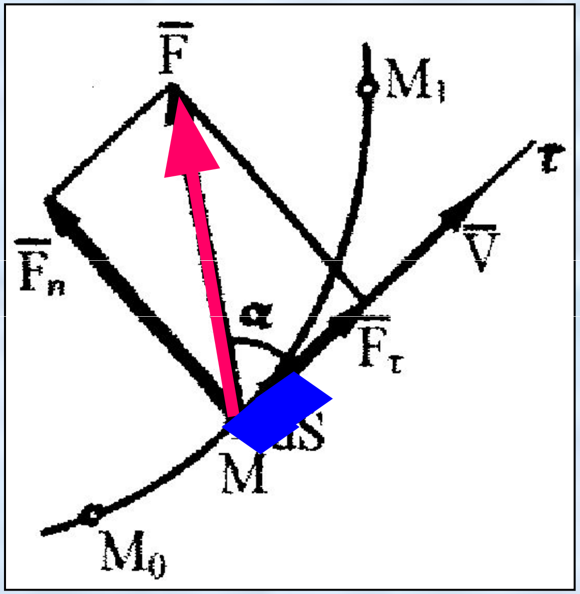
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Работа силы. Мощность

Элементарная работа силы

$\mathrm{d}A = F_\tau \mathrm{d}s,$ *где* $F_\tau = F\cos\alpha,$

$$\boxed{\mathrm{d}A = F\mathrm{d}s\cos\alpha.}$$



Работа силы на конечном перемещении

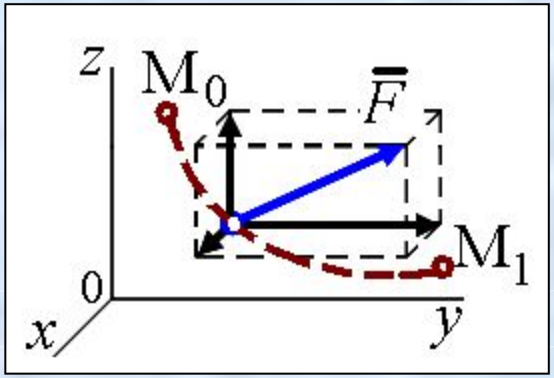
1. $(\overline{F} \neq \mathrm{const})$ $\boxed{A_{(M_0M_1)} = \int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau ds}$

2. $(\overline{F} = \mathrm{const})$ $\boxed{A_{(M_0M_1)} = F_\tau s_1 = Fs_1\cos\alpha}$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Работа силы. Мощность

Если вектор силы спроецировать на оси координат



$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Единицей измерения работы в системе СИ является - 1 джоуль (1 Дж = 1Н·м = 1 кг·м2 /с2).

***Мощность** - это величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени.*

$$N = dA/dt = F\tau\, ds/dt = F\tau v.$$

Единицей измерения мощности в системе СИ является ватт (1 Вт = 1Дж/с). В технике - 1 л.с. = 736 Вт.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

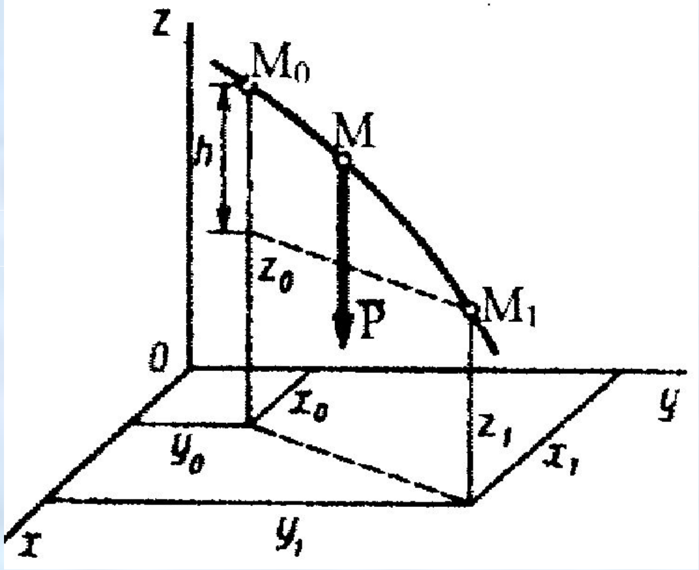
Примеры вычисления работы

Работа силы тяжести

$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{z_0}^{z_1} (-P)dz = P(z_0 - z_1)$$

$$z_0 - z_1 = h$$

$$A_{(M_0 M_1)} = \pm P \cdot h$$

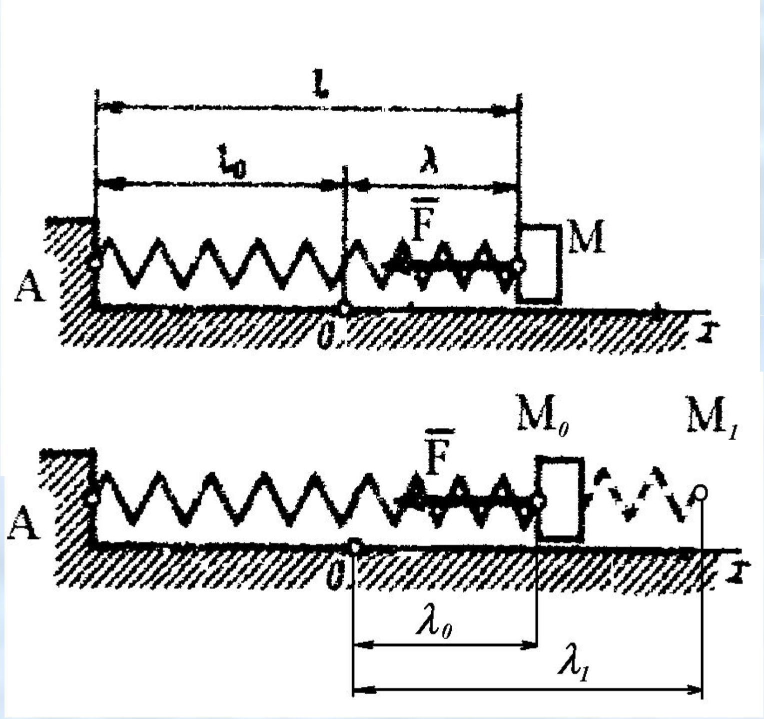


Работа силы тяжести не зависит от формы траектории точки её приложения. Силы, обладающие таким свойством, называются потенциальными силами.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Работа силы. Мощность

Работа силы упругости



$$F = c\lambda = c|x| \text{ и } F_x = -cx.$$

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{x_0}^{x_1} (-cx)dx = \frac{c}{2}(x_0^2 - x_1^2).$$

$$\boxed{A_{(M_0M_1)} = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2),}$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Работа силы. Мощность

Работа силы, приложенной к вращающемуся телу

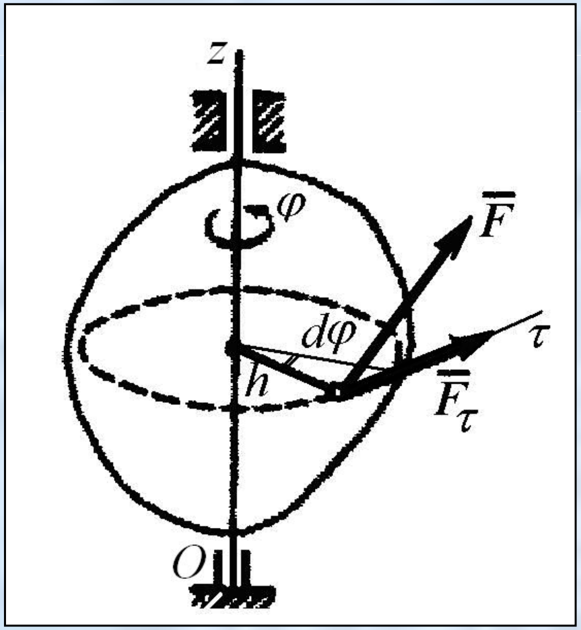
$dA = F_\tau ds$ *где* $ds = h\, d\varphi$

$$dA = \underline{F_\tau h}\, d\varphi.$$

$$F_\tau h = m_z(\overline{F}) = M_z$$

$$dA = M_z\, d\varphi$$

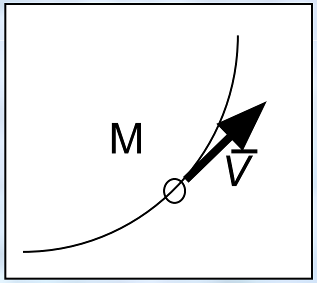
$A = \int_0^{\varphi_1} M_z d\varphi$ *или* $\boxed{A = \pm M_z \cdot \varphi.}$



ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Кинетическая энергия

для материальной точки



$$m\frac{v^2}{2}$$

для механической системы

из n материальных точек

$$T=\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{v_k^2}{2}$$

Кинетическая энергия - скалярная величина

Единица измерения кинетической энергии в системе СИ - 1 Дж.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Кинетическая энергия

для твердого тела

Поступательное движение

$$M\frac{v_C^2}{2}$$

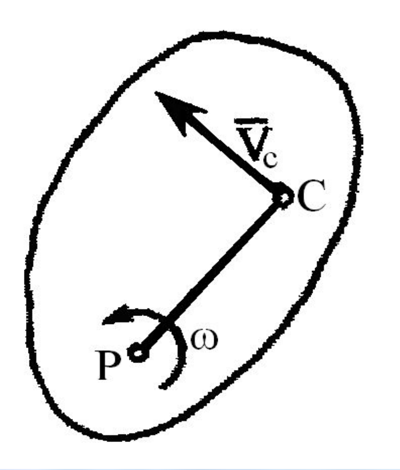
Вращательное движение

$$T = I_z\frac{\omega^2}{2}$$

Плоскопараллельное движение

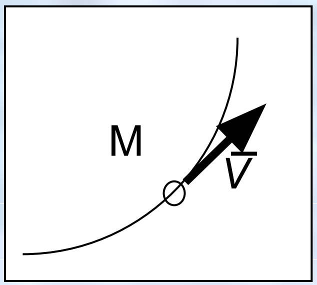
$$T_{\text{пл}} = I_P\frac{\omega^2}{2}$$

$$T_{\text{пл}} = M\frac{v^2}{2} = I_c\frac{\omega^2}{2}$$



ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим материальную точку с массой m



$$ma_\tau = \sum F_{k\tau}.$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

$$mv\frac{dv}{ds} = \sum F_{k\tau}$$

$$mvdv = \sum dA_k$$

$$\boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum dA_k}$$

теорема об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме

$$\boxed{\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_{(M_0 M_1)}}$$

теорема об изменении кинетической энергии точки в конечном виде

22.5

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим материальную точку механической системы с массой m_k

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i$$

Для всей механической системы

$$d\sum\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i$$

$$\boxed{dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i}$$

теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме

$$\boxed{T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i}$$

теорема об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме