



# МЕТОД РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Суть метода заключается в замене токов в ветвях на токи в контурах (см. рис. 1). Заданные контурные токи должны являться контурными токами именно главных контуров.

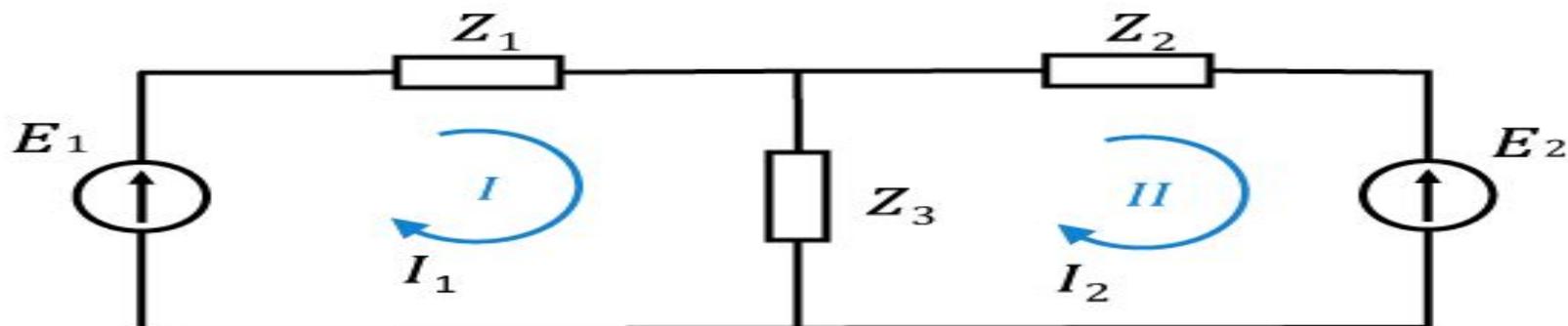


Рисунок 1. Электрическая цепь для иллюстрации метода контурных токов.

В общем случае составляется система уравнений в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NN} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dots \\ \dot{I}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dots \\ \dot{E}_N \end{pmatrix} \quad (1)$$

где (1) – матрица контурных сопротивлений, (2) – столбец контурных токов, (3) – столбец контурных ЭДС.

Диагональные элементы матрицы контурных сопротивлений называются собственными контурными сопротивлениями ( $Z_{ij}$  при  $i = j$ ). Они равны сумме сопротивлений, входящих в  $i$ -й контур. Элементы  $Z_{ij}$  при  $i \neq j$  называются взаимными контурными сопротивлениями. Они равны сумме сопротивлений, входящих одновременно в  $i$ -й и в  $j$ -й контур. Взаимные контурные сопротивления берутся со знаком «+», если направления контурных токов на этих сопротивлениях совпадают, и со знаком «-» – если направления противоположны.

При записи столбца контурных ЭДС также используют правило. Если направление ЭДС совпадает с направлением контурного тока, то в столбце контурных ЭДС ставится знак «+», а если не совпадает – знак «-».

Система уравнений решается по правилу Крамера

$$\dot{I}_K = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1K-1} & \dots & \dot{E}_1 & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2K-1} & \dots & \dot{E}_2 & \dots & Z_{2N} \\ \dots & \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NK-1} & \dots & \dot{E}_N & \dots & Z_{NN} \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} Z_{11} & & & & & & & \\ & Z_{22} & & & & & & \\ & & \dots & & & & & \\ & & & & & & & Z_{NN} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Обозначим  $\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & & & \\ & \dots & & \\ & & & Z_{NN} \end{vmatrix}$  - определитель матрицы.

Тогда

$$\dot{I}_K = \sum_L \dot{E}_L \frac{\Delta_{LK}}{\Delta} \quad (3)$$

где  $\Delta_{LK} = (-1)^{L+K} M_{LK}$  - алгебраическое дополнение элемента  $Z_{LK}$ , а  $M_{LK}$  - дополнительный минор (определитель матрицы), получающейся из исходной матрицы контурных сопротивлений путем вычеркивания строки  $L$  и столбца  $K$ .

После нахождения контурных токов переходят к определению токов в ветвях и напряжений на элементах электрической цепи. Если некоторая ветвь принадлежит только одному контуру, то ток в ней равен контурному току. Если же ветвь принадлежит нескольким контурам, то ток в ней равен сумме соответствующих контурных токов (с учётом направления обхода рассматриваемых контуров).

Метод контурных токов рассчитан только на то, что в цепи присутствуют источники ЭДС. Если в цепи есть источник тока, то его заменяют на эквивалентный источник ЭДС (рис. 2).

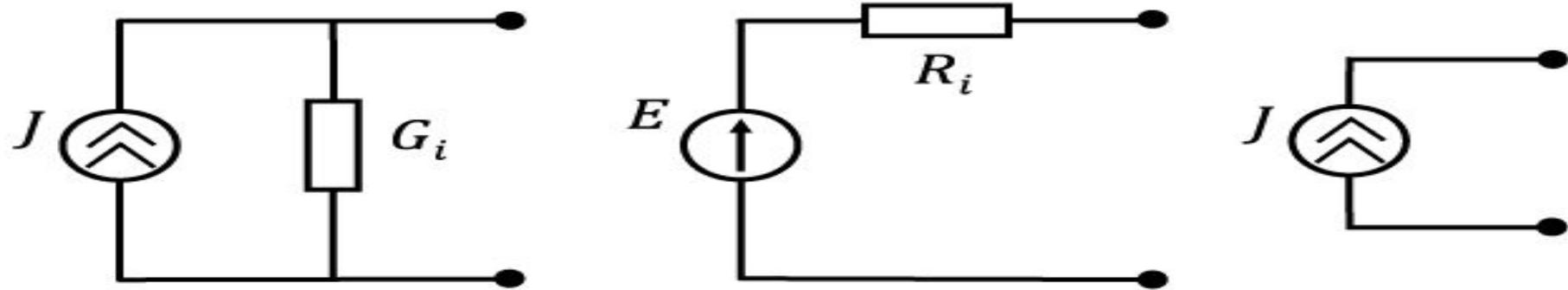


Рисунок 2. Замена источника тока на источник ЭДС.

Возможен вариант с вырожденным источником тока. В этом случае считают, что контурный ток равен току источника.

### Метод узловых напряжений

Суть метода узловых напряжений заключается в переходе от рассмотрения напряжения на ветвях к напряжениям в узлах относительно некоторого базового узла. В качестве примера рассмотрим следующую схему электрической цепи (рис. 3).

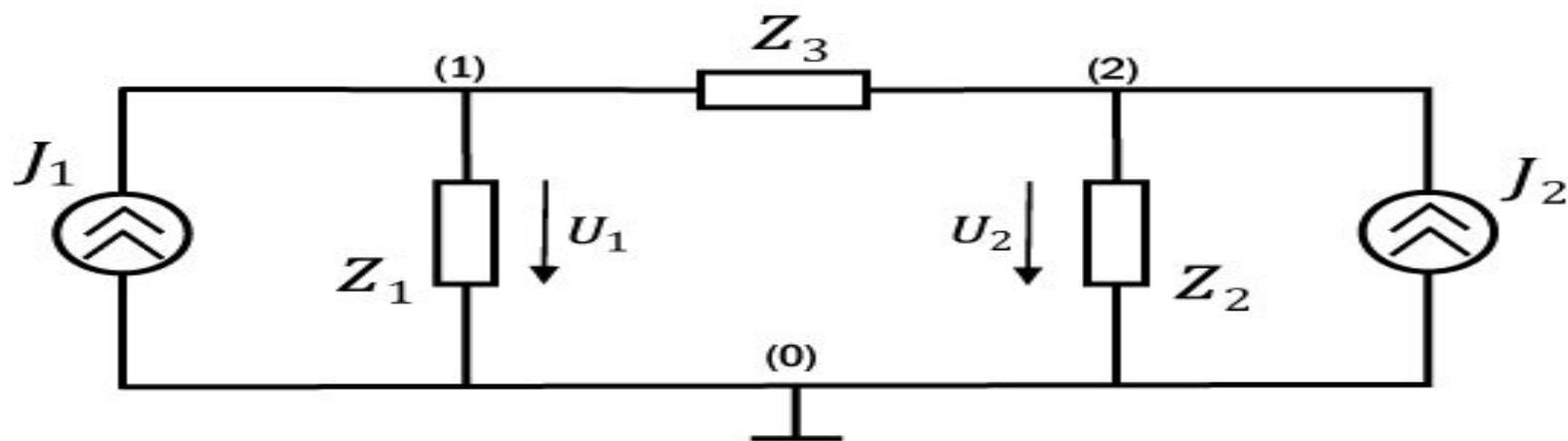


Рисунок 3. Пример схемы электрической цепи для иллюстрации метода узловых напряжений.

По первому закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} J_1 = \dot{U}_1 Y_1 + (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) Y_3 \\ J_2 = \dot{U}_2 Y_2 + (\dot{U}_2 - \dot{U}_1) Y_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} J_1 = (Y_1 + Y_3) \dot{U}_1 - Y_3 \dot{U}_2 \\ J_2 = (Y_2 + Y_3) \dot{U}_2 - Y_3 \dot{U}_1 \end{cases}$$

В общем случае система составляется в матричной форме для  $q$  узлов, получаем  $(q - 1)$  уравнение.

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1q-1} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{q-11} & Y_{q-12} & \dots & Y_{q-1q-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dots \\ \dot{U}_{q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \dots \\ J_{q-1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

1. – матрица узловых проводимостей.

$Y_{ij}$  – собственная проводимость  $i$ -го узла, равная сумме проводимостей ветвей, подключенных к  $i$ -му узлу.

$Y_{ij}$  (при  $i \neq j$ ) – общая проводимость  $i$ -го и  $j$ -го узлов. Она равна сумме проводимостей ветвей, одновременно подключенных к  $i$ -му и  $j$ -му узлу.

1. – столбец узловых напряжений (неизвестные величины).

2. – столбец узловых токов.

$J_i$  – это алгебраическая сумма токов, входящих в  $i$ -й узел. Если ток входит в узел, то ставится знак «+», если выходит – знак «-».

Система уравнений решается по правилу Крамера:

$$\dot{U}_i = \sum_{k=1}^{q-1} \dot{Y}_k \frac{\Delta_{ki}}{\Delta} \quad (5)$$

где  $\Delta$  – определитель матрицы узловых проводимостей,  $\Delta_{li}$  – алгебраическое дополнение элемента  $Y_{ki}$ .

Данный метод рассчитан на то, что в цепи есть источники тока. Если есть источники ЭДС, то его нужно заменить на эквивалентные источники тока. Если источник ЭДС вырожденный, то напряжение в узле считается известным и равным ЭДС источника.

### Принцип наложения

Согласно формуле (3), ток в  $k$ -ом контуре  $\dot{I}_K = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n \dot{E}_i \Delta_{ik}$ . На основе этого выражения можно сформулировать принцип наложения.

Ток в любом контуре электрической цепи может быть получен как алгебраическая сумма токов, вызываемых в этом контуре каждой из ЭДС в отдельности. Рассмотрим на примере применение этого принципа (рис. 4)

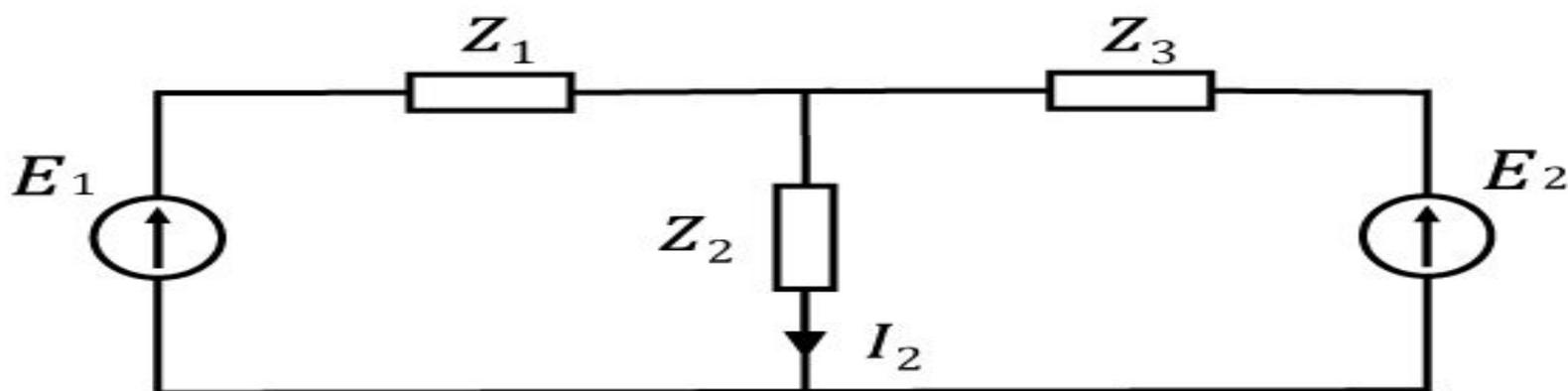


Рисунок 4. Электрическая схема для иллюстрации применения принципа наложения.

Пусть необходимо найти ток  $I_2$ . По очереди устраняем источники ЭДС. Устранение источника ЭДС соответствует короткому замыканию ветви. Сначала устраняем источник ЭДС ( $\dot{E}_1$ ), тогда  $\dot{I}'_2 = f(\dot{E}_2)$  (см. рис. 5а). Затем устраняем источник ЭДС ( $\dot{E}_2$ ), тогда  $\dot{I}''_2 = f(\dot{E}_1)$  (см. рис. 5б).

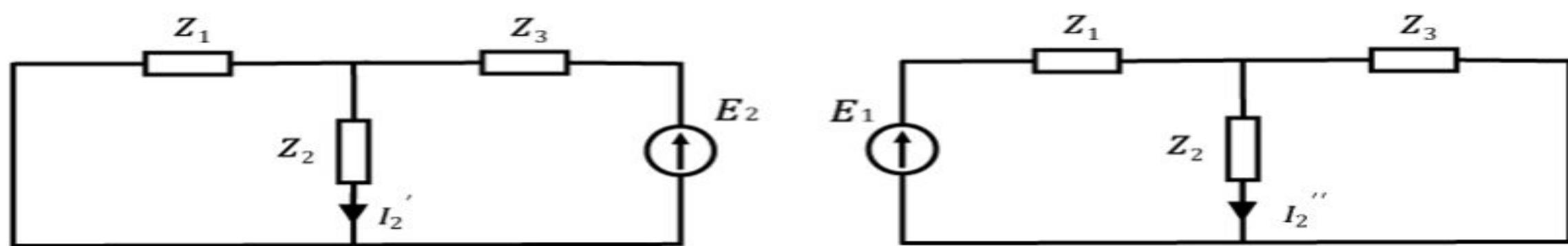


Рисунок 5. Первый (а) и второй (б) этапы решения задачи.

В итоге получаем, что

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_2'' + \dot{I}_2' \quad (6)$$

По аналогии можно сформулировать и для напряжения.

Узловое напряжение любого узла линейной электрической цепи может быть получено как алгебраическая сумма напряжений, вызываемых в этом узле каждым из токов в отдельности.

$$\dot{U}_k = \sum_{i=1}^{q-1} \dot{I}_i \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} \quad (7)$$

При устранении источника тока в цепи образуется разрыв.

### Теорема обратимости (взаимности)

Теорема может быть сформулирована применительно к источникам ЭДС и источникам тока. Рассмотрим вариант с источником ЭДС. Пусть имеется электрическая цепь (рис. 6а).



Рисунок 6. Источник ЭДС находится в  $i$ -ом (а) и  $k$ -ом (б) контуре.

Будем считать, что в цепи присутствует только один источник ЭДС. По методу контурных токов  $\dot{I}_k = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} \dot{E}$ . Перенесем источник ЭДС из  $i$ -го контура в  $k$ -й. Находим  $\dot{I}_i = \frac{\Delta_{ki}}{\Delta} \dot{E}$ . Тогда  $\Delta_{ik} = \Delta_{ki}$ ,  $\dot{I}_k = \dot{I}_i$ .

Если некоторая ЭДС, находящаяся в каком-либо контуре (первом) электрической цепи, вызывает ток в другом контуре (втором) данной цепи, то та же ЭДС, будучи перенесенной во второй контур, вызовет в первом контуре ток той же величины и фазы

### Теорема компенсации

Токи электрической цепи не изменятся, если любой участок цепи заменить ЭДС, равной по величине напряжению на данном участке и направленной навстречу току, проходящему по данному участку.

Рассмотрим доказательство данной теоремы на электрической цепи, приведенной на рис. 7а.



Рисунок 7. Пример электрической цепи до (а) и после (б) применения теоремы компенсации.

По второму закону Кирхгофа  $\dot{E} = \dot{J} Z_1 + \dot{J} Z$ . Заменяем сопротивление  $Z$  источником ЭДС согласно теореме  $\dot{E}' = \dot{J} Z$  (см. рис. 76). Воспользуемся вторым законом Кирхгофа для цепи на рис. 76.

$$\dot{E} - \dot{E}' = \dot{J} Z_1, \quad \dot{E} = \dot{J} Z_1 + \dot{E}' = \dot{J} Z_1 + \dot{J} Z$$

Уравнение баланса напряжений осталось прежним, следовательно, теорема доказана.

### Теорема об эквивалентном источнике напряжения или тока (Теорема об эквивалентном генераторе)

Ток в любой ветви  $mn$  линейной электрической цепи не изменится, если электрическую цепь, к которой подключена данная ветвь, заменить эквивалентным источником напряжения. ЭДС этого источника должна быть равна комплексному напряжению на зажимах разомкнутой ветви  $mn$ , а комплексное внутреннее сопротивление источника должно равняться комплексному входному сопротивлению пассивной электрической цепи со стороны зажимов  $mn$  при разомкнутой ветви  $mn$ .

Иллюстрация данной теоремы приведена на рис. 8.

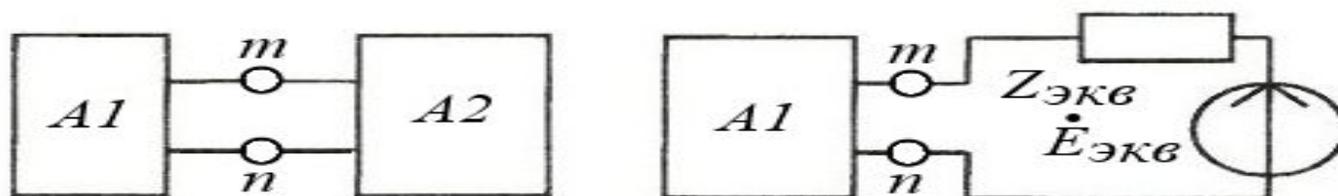


Рисунок 8. Замена участка электрической цепи эквивалентным источником ЭДС.

Рассмотрим доказательство. Пусть имеется следующая электрическая цепь (рис. 9). Здесь  $A$  – активный двухполюсник (внутри него имеется источник ЭДС). Введем два равных по величине и противоположных источника ЭДС  $U_{mn}$  и  $U_{nm}$ . Воспользуемся принципом наложения (рис. 9). Получаем, что  $\dot{I} = \dot{I}'' + \dot{I}'$ . Выберем такое значение  $U_{mn}$  чтобы  $\dot{I}' = 0$  (режим холостого хода), тогда  $\dot{I} = \dot{I}''$ . При этом, пассивный двухполюсник ( $\Gamma$ ) можно заменить на эквивалентное комплексное сопротивление  $Z_{\text{ЭКВ}}$ . Тогда получим окончательный вариант схемы, эквивалентный исходной.

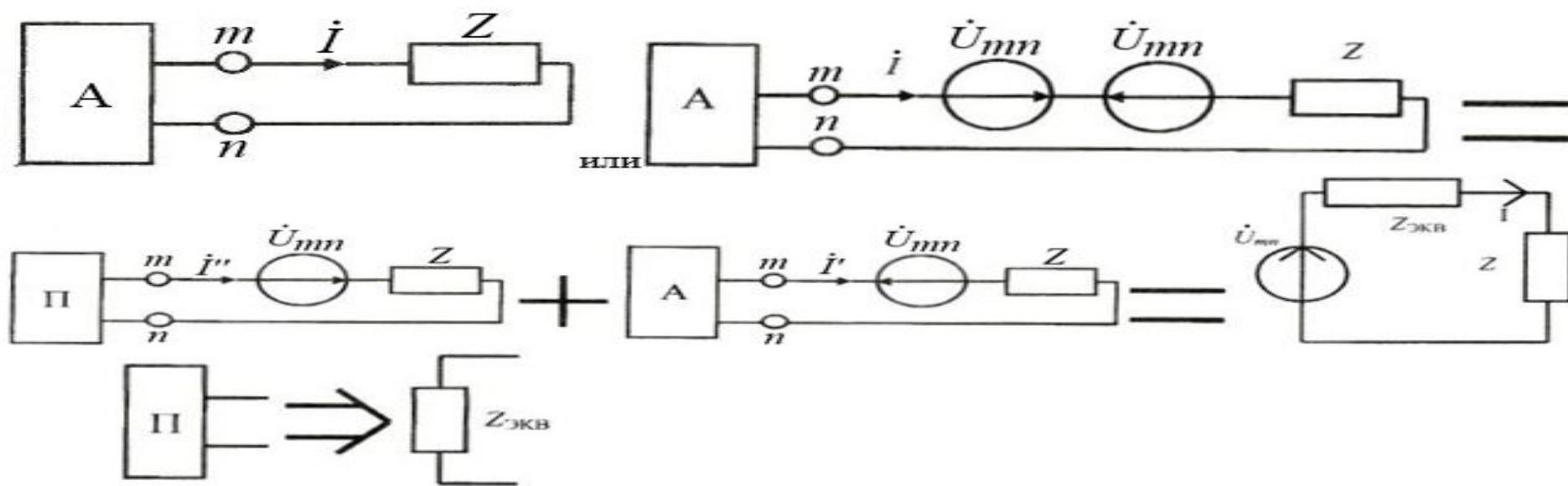


Рисунок 9. К доказательству теоремы об эквивалентном источнике.

Теорему об эквивалентном источнике можно сформулировать и для источника тока.

Пусть имеется некоторая цепь (рис. 10а). Эту цепь можно представить в виде эквивалентной схемы (рис. 10б). Параметр  $Z_{\text{экв}}$  является входным комплексным сопротивлением определяется аналогично теореме об эквивалентном источнике ЭДС, а комплексный ток эквивалентного источника – как ток короткого замыкания  $\dot{I}_{\text{кз}}$  (рис. 10в).

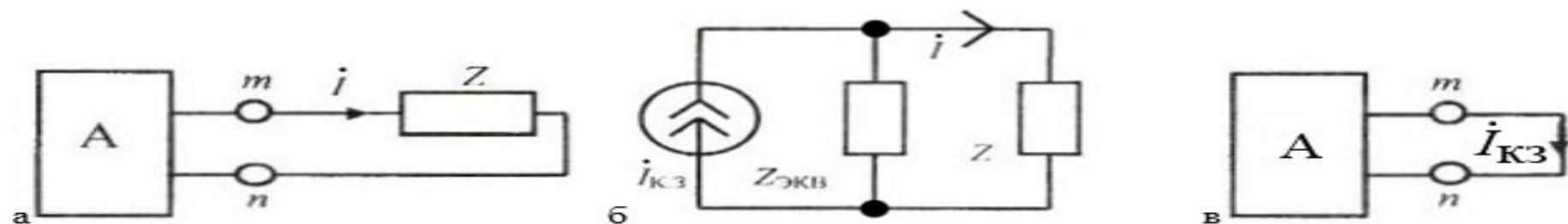


Рисунок 10. Замена участка электрической цепи эквивалентным источником тока.

# ЗАДАНИЯ

## Задание

4 возможных балла (оценивается)

В электрической цепи №2 все сопротивления равны **1 кОм**, а токи источников равны **100 мА**. По методу узловых напряжений составьте матрицу проводимостей для **(1)** и **(2)** узлов начиная с **(1)** узла. Результат запишите в мСм.

$$= \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

Отправить

## Задание

2 возможных балла (оценивается)

В электрической цепи № 2 все сопротивления равны **1 кОм**, а токи источников равны **100 мА**. По методу узловых напряжений составьте матрицу узловых токов для **(1)** и **(2)** узлов начиная с **(1)** узла. Результат запишите в мА.

$$= \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$$

## Задание

2 возможных балла (оценивается)

В электрической цепи № 2 все сопротивления равны **1 кОм**, а токи источников равны **100 мА**. По методу узловых напряжений определите напряжения для **(1)** и **(2)** узлов начиная с **(1)** узла. Примите напряжение **(0)** узла равным нулю. Результат запишите в В.

= (    
  )

Отправить

Схема электрической цепи № 1

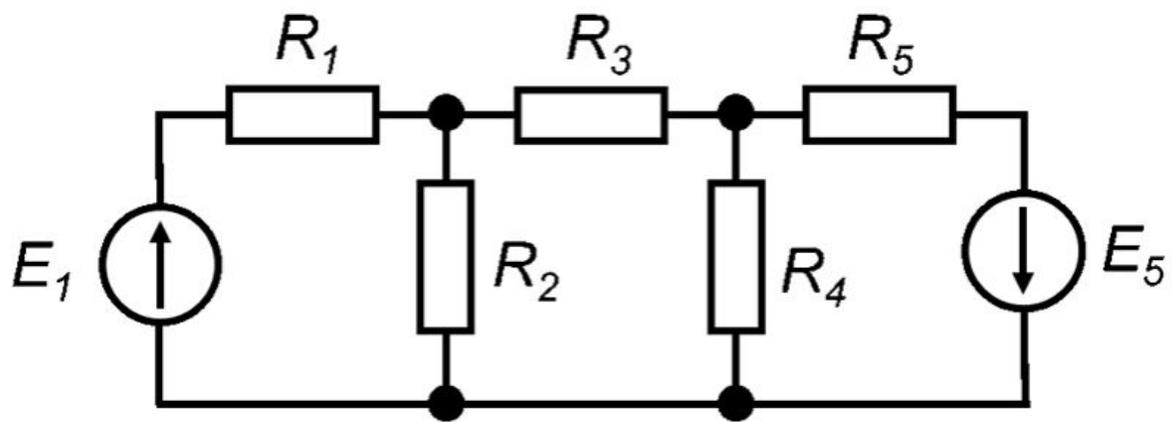
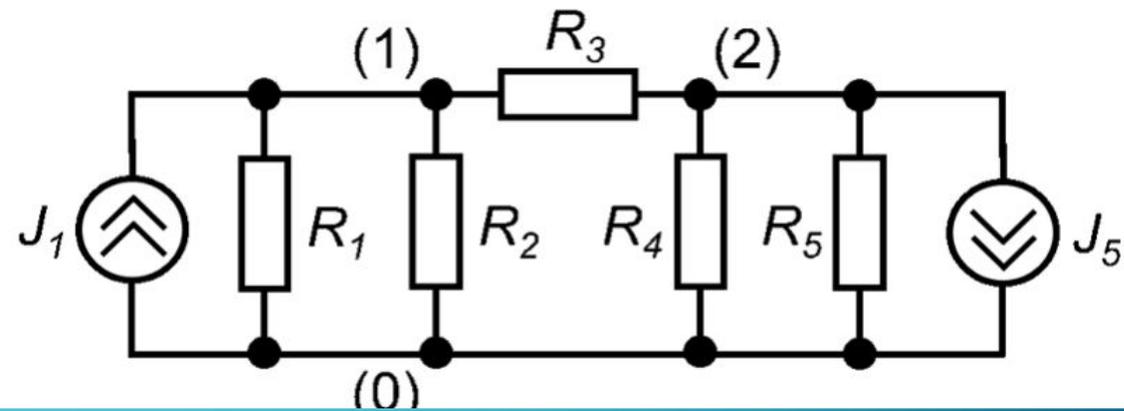


Схема электрической цепи № 2



Укажите число главных контуров для электрической цепи № 1

В электрической цепи № 2 все сопротивления равны 1 кОм, а токи источников равны 100 мА. Определите ЭДС эквивалентного источника напряжения относительно ветви с сопротивлением  $R_3$ . Результат запишите в В.

✘

В электрической цепи № 2 все сопротивления равны 1 кОм, а токи источников равны 100 мА. Определите внутреннее сопротивление эквивалентного источника напряжения относительно ветви с сопротивлением  $R_3$ . Результат запишите в кОм.

✘

В электрической цепи № 1 все сопротивления равны 1 кОм, а напряжения источников ЭДС равны 100 В. По принципу наложения определите величину тока в ветви с сопротивлением  $R_3$ , вызываемого источником ЭДС  $E_1$ . Результат запишите в мА.

✘

В электрической цепи № 1 все сопротивления равны 1 кОм, а напряжения источников ЭДС равны 100 В. По принципу наложения определите величину тока в ветви с сопротивлением  $R_3$ , вызываемого источником ЭДС  $E_2$ . Результат запишите в мА.

✘