МЕТОД РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Суть метода заключается в замене токов в ветвях на токи в контурах (см. рис. 1). Заданные контурные токи должны являться контурными токами именно главных контуров.

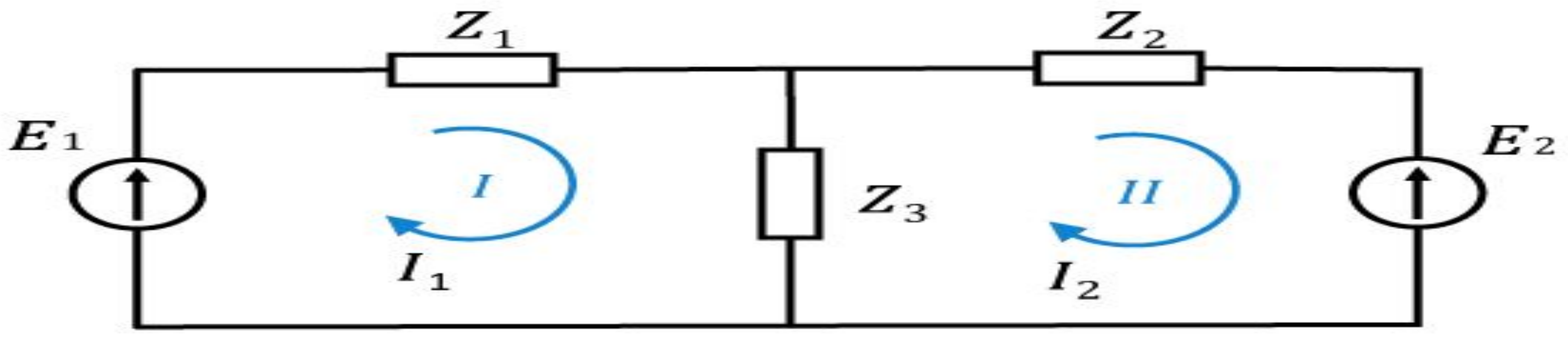


Рисунок 1. Электрическая цепь для иллюстрации метода контурных токов.

В общем случае составляется система уравнений в матричной форме:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \cdots & Z_{NN} \end{pmatrix}}_{(1)} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \cdots \\ \dot{I}_N \end{pmatrix}}_{(2)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \cdots \\ \dot{E}_N \end{pmatrix}}_{(3)} \qquad (1)$$

где (1) – матрица контурных сопротивлений, (2) – столбец контурных токов, (3) – столбец контурных ЭДС.

Диагональные элементы матрицы контурных сопротивлений называются собственными контурными сопротивлениями (Z_{ij} при $i = j$). Они равны сумме сопротивлении, входящих в *i*-й контур. Элементы Z_{ij} при $i \neq j$ называются взаимными контурными сопротивлениями. Они равны сумме сопротивлений, входящих одновременно в *i*-й и в *j*-й контур. Взаимные контурные сопротивления берутся со знаком «+», если направления контурных токов на этих сопротивлениях совпадают, и со знаком «–» – если направления противоположны.

При записи столбца контурных ЭДС также используют правило. Если направление ЭДС совпадает с направлением контурного тока, то в столбце контурных ЭДС ставится знак «+», а если не совпадает – знак «–».

Система уравнений решается по правилу Крамера

$$\dot{I}_K = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1K-1} & \dots & \dot{E}_1 & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2K-1} & \dots & \dot{E}_2 & \dots & Z_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NK-1} & \dots & \dot{E}_N & \dots & Z_{NN} \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} Z_{11} & & & \\ & Z_{22} & & \\ & & \dots & \\ & & & Z_{NN} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Обозначим $\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & & \\ & \dots & \\ & & Z_{NN} \end{vmatrix}$ - определитель матрицы.

Тогда

$$\dot{I}_K = \sum_L \dot{E}_L \frac{\Delta_{LK}}{\Delta} \quad (3)$$

где $\Delta_{LK} = (-1)^{L+K} M_{LK}$ – алгебраическое дополнение элемента Z_{LK}, а M_{LK} - дополнительный минор (определитель матрицы), получающейся из исходной матрицы контурных сопротивлений путем вычеркивания строки *L* и столбца *K*.

После нахождения контурных токов переходят к определению токов в ветвях и напряжений на элементах электрической цепи. Если некоторая ветвь принадлежит только одному контуру, то ток в ней равен контурному току. Если же ветвь принадлежит нескольким контурам, то ток в ней равен сумме соответствующих контурных токов (с учётом направления обхода рассматриваемых контуров).

Метод контурных токов рассчитан только на то, что в цепи присутствуют источники ЭДС. Если в цепи есть источник тока, то его заменяют на эквивалентный источник ЭДС (рис. 2).

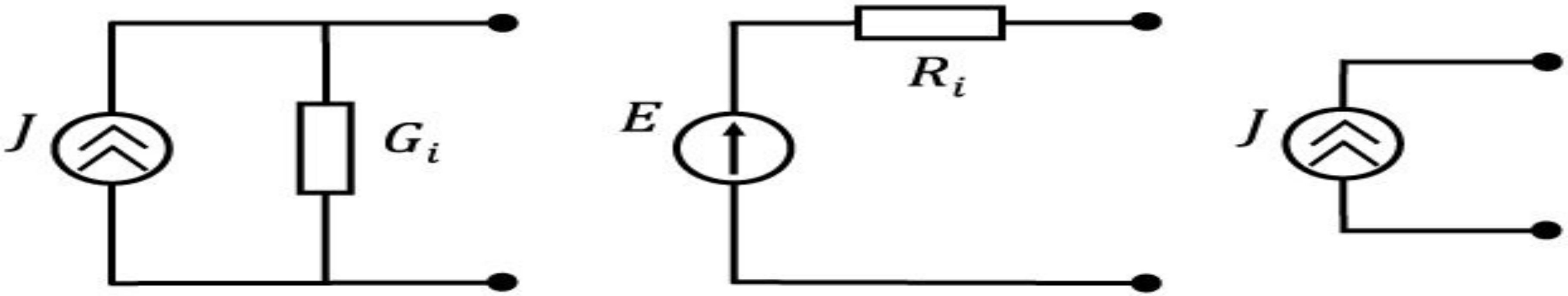


Рисунок 2. Замена источника тока на источник ЭДС.

Возможен вариант с вырожденным источником тока. В этом случае считают, что контурный ток равен току источника.

Метод узловых напряжений

Суть метода узловых напряжений заключается в переходе от рассмотрения напряжения на ветвях к напряжениям в узлах относительно некоторого базового узла. В качестве примера рассмотрим следующую схему электрической цепи (рис. 3).

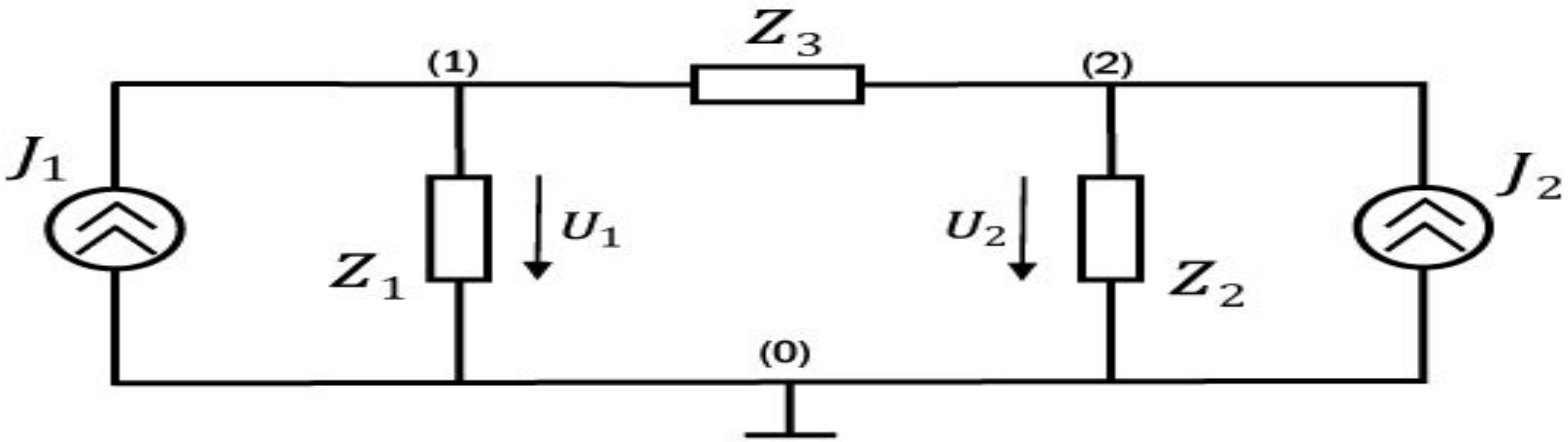


Рисунок 3. Пример схемы электрической цепи для иллюстрации метода узловых напряжений.

По первому закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot{J}_1 = \dot{U}_1 Y_1 + (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) Y_3 \\ \dot{J}_2 = \dot{U}_2 Y_2 + (\dot{U}_2 - \dot{U}_1) Y_3 \end{cases}, \begin{cases} \dot{J}_1 = (Y_1 + Y_3)\dot{U}_1 - Y_3 \dot{U}_2 \\ \dot{J}_2 = (Y_2 + Y_3)\dot{U}_2 - Y_3 \dot{U}_1 \end{cases}$$

В общем случае система составляется в матричной форме для q узлов, получаем $(q-1)$ уравнение.

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1q-1} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{q-11} & Y_{q-12} & \cdots & Y_{q-1q-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \cdots \\ \dot{U}_{q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \\ \cdots \\ \dot{J}_{q-1} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

1. – матрица узловых проводимостей.

Y_{ij} – собственная проводимость *i*-го узла, равная сумме проводимостей ветвей, подключенных к *i*-му узлу.

Y_{ij} (при $i \neq j$) – общая проводимость *i*-го и *j*-го узлов. Она равна сумме проводимостей ветвей, одновременно подключенных к *i*-му и *j*-му узлу.

1. – столбец узловых напряжений (неизвестные величины).

2. – столбец узловых токов.

Ji – это алгебраическая сумма токов, входящих в *i*-й узел. Если ток входит в узел, то ставится знак «+», если выходит – знак «–».

Система уравнений решается по правилу Крамера:

$$\dot{U}_i = \sum_{k=1}^{q-1} \dot{Y}_k \frac{\Delta_{ki}}{\Delta} \qquad (5)$$

где Δ – определитель матрицы узловых проводимостей, Δ_{li} – алгебраическое дополнение элемента Y_{ki}.

Данный метод рассчитан на то, что в цепи есть источники тока. Если есть источники ЭДС, то его нужно заменить на эквивалентные источники тока. Если источник ЭДС врожденный, то напряжение в узле считается известным и равным ЭДС источника.

Принцип наложения

Согласно формуле (3), ток в *k*-ом контуре $\dot{I}_K = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n} \dot{E}_i \Delta_{ik}$. На основе этого выражения можно сформулировать принцип наложения.

Ток в любом контуре электрической цепи может быть получен как алгебраическая сумма токов, вызываемых в этом контуре каждой из ЭДС в отдельности. Рассмотрим на примере применение этого принципа (рис. 4)

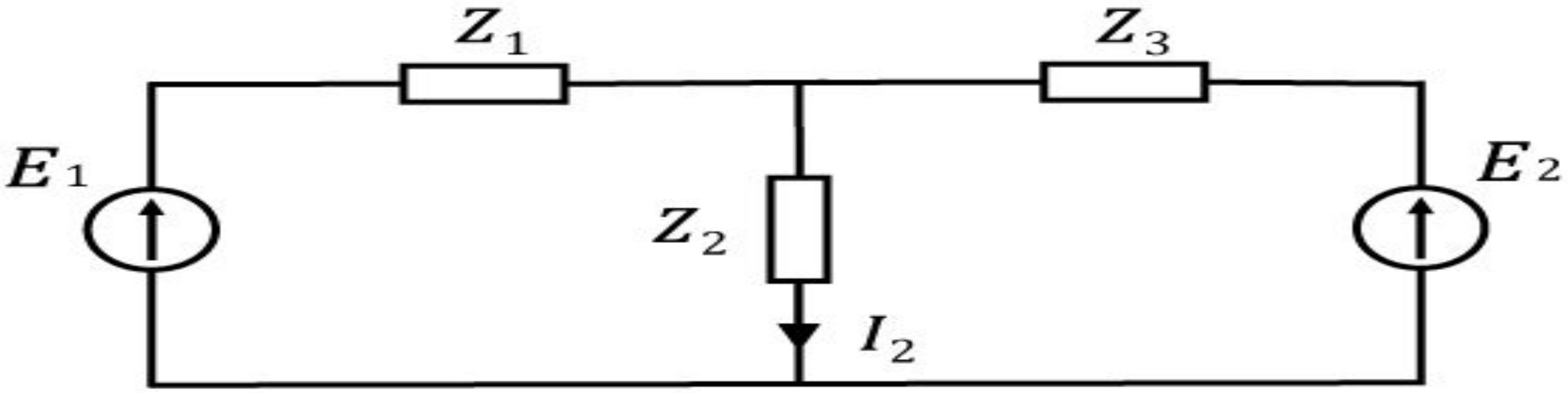


Рисунок 4. Электрическая схема для иллюстрации применения принципа наложения.

Пусть необходимо найти ток *I2*. По очереди устраняем источники ЭДС. Устранение источника ЭДС соответствует короткому замыканию ветви. Сначала устраняем источник ЭДС ($\dot{E}_1$), тогда $\dot{I}'_2 = f(\dot{E}_2)$ (см. рис. 5а). Затем устраняем источник ЭДС ($\dot{E}_2$), тогда $\dot{I}''_2 = f(\dot{E}_1)$ (см. рис. 5б).

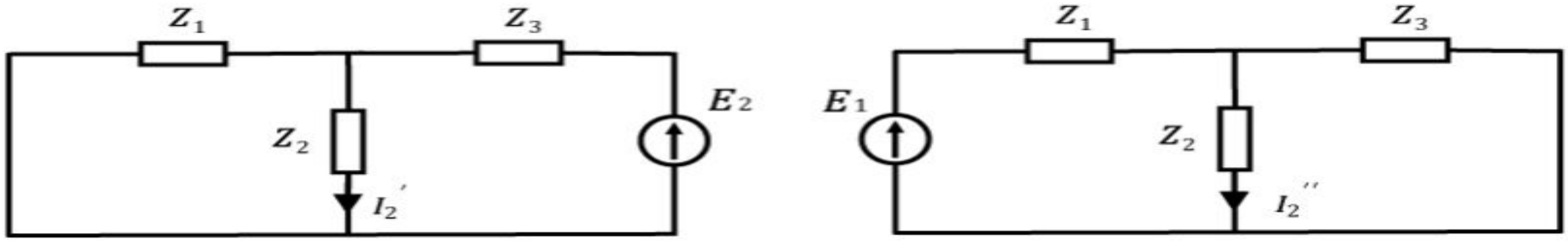


Рисунок 5. Первый (а) и второй (б) этапы решения задачи.

В итоге получаем, что

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_2'' + \dot{I}_2' \tag{6}$$

По аналогии можно сформулировать и для напряжения.

Узловое напряжение любого узла линейной электрической цепи может быть получено как алгебраическая сумма напряжений, вызываемых в этом узле каждым из токов в отдельности.

$$\dot{U}_k = \sum_{i=1}^{q-1} \dot{I}_i \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} \tag{7}$$

При устранении источника тока в цепи образуется разрыв.

Теорема обратимости (взаимности)

Теорема может быть сформулирована применительно к источникам ЭДС и источникам тока. Рассмотрим вариант с источником ЭДС. Пусть имеется электрическая цепь (рис. 6а).

Рисунок 6. Источник ЭДС находится в *i*-ом (а) и *k*-ом (б) контуре.

Будем считать, что в цепи присутствует только один источник ЭДС. По методу контурных токов $\dot{I}_k = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta}\dot{E}$. Перенесем источник ЭДС из *i*-го контура в *k*-й. Находим $\dot{I}_i = \frac{\Delta_{ki}}{\Delta}\dot{E}$. Тогда $\Delta_{ik} = \Delta_{ki}$, $\dot{I}_k = \dot{I}_i$.

Если некоторая ЭДС, находящаяся в каком-либо контуре (первом) электрической цепи, вызывает ток в другом контуре (втором) данной цепи, то та же ЭДС, будучи перенесенной во второй контур, вызовет в первом контуре ток той же величины и фазы

Теорема компенсации

Токи электрической цепи не изменятся, если любой участок цепи заменить ЭДС, равной по величине напряжению на данном участке и направленной навстречу току, проходящему по данному участку.

Рассмотрим доказательство данной теоремы на электрической цепи, приведенной на рис. 7а.

Рисунок 7. Пример электрической цепи до (а) и после (б) применения теоремы компенсации.

По второму закону Кирхгофа $\dot{E} = \dot{J}\,Z_1 + \dot{J}\,Z$. Заменим сопротивление *Z* источником ЭДС согласно теореме $\dot{E}' = \dot{J}\,Z$ (см. рис. 7б). Воспользуемся вторым законом Кирхгофа для цепи на рис. 7б.

$$\dot{E} - \dot{E}' = \dot{J}\,Z_1,\ \dot{E} = \dot{J}\,Z_1 + \dot{E}' = \dot{J}\,Z_1 + \dot{J}\,Z$$

Уравнение баланса напряжений осталось прежним, следовательно, теорема доказана.

Теорема об эквивалентном источнике напряжения или тока (Теорема об эквивалентном генераторе)

Ток в любой ветви *mn* линейной электрической цепи не изменится, если электрическую цепь, к которой подключена данная ветвь, заменить эквивалентным источником напряжения. ЭДС этого источника должна быть равна комплексному напряжению на зажимах разомкнутой ветви mn, а комплексное внутреннее сопротивление источника должно равняться комплексному входному сопротивлению пассивной электрической цепи со стороны зажимов *mил*при разомкнутой ветви *mn*.

Иллюстрация данной теоремы приведена на рис. 8.

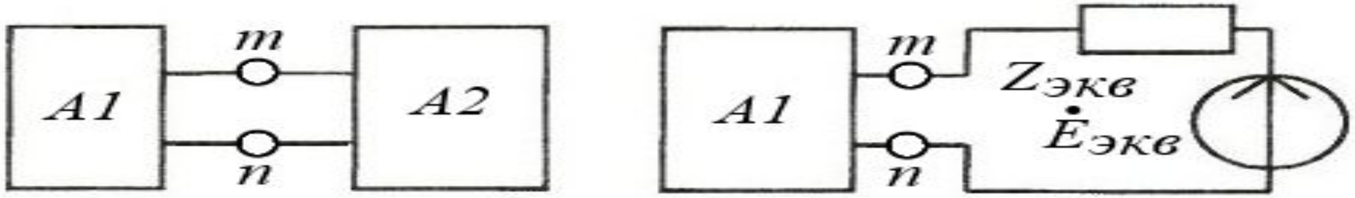


Рисунок 8. Замена участка электрической цепи эквивалентным источником ЭДС.

Рассмотрим доказательство. Пусть имеется следующая электрическая цепь (рис. 9). Здесь А – активный двухполюсник (внутри него имеется источник ЭДС). Введем два равных по величине и противоположных источника ЭДС U_{mn} и U_{nm}. Воспользуемся принципом наложения (рис. 9). Получаем, что $\dot{I} = \dot{I}'' + \dot{I}'$. Выберем такое значение U_{mn} чтобы $\dot{I}' = 0$ (режим холостого хода), тогда $\dot{I} = \dot{I}''$. При этом, пассивный двухполюсник (П) можно заменить на эквивалентное комплексное сопротивление $Z_{\text{экв}}$. Тогда получим окончательный вариант схемы, эквивалентный исходной.

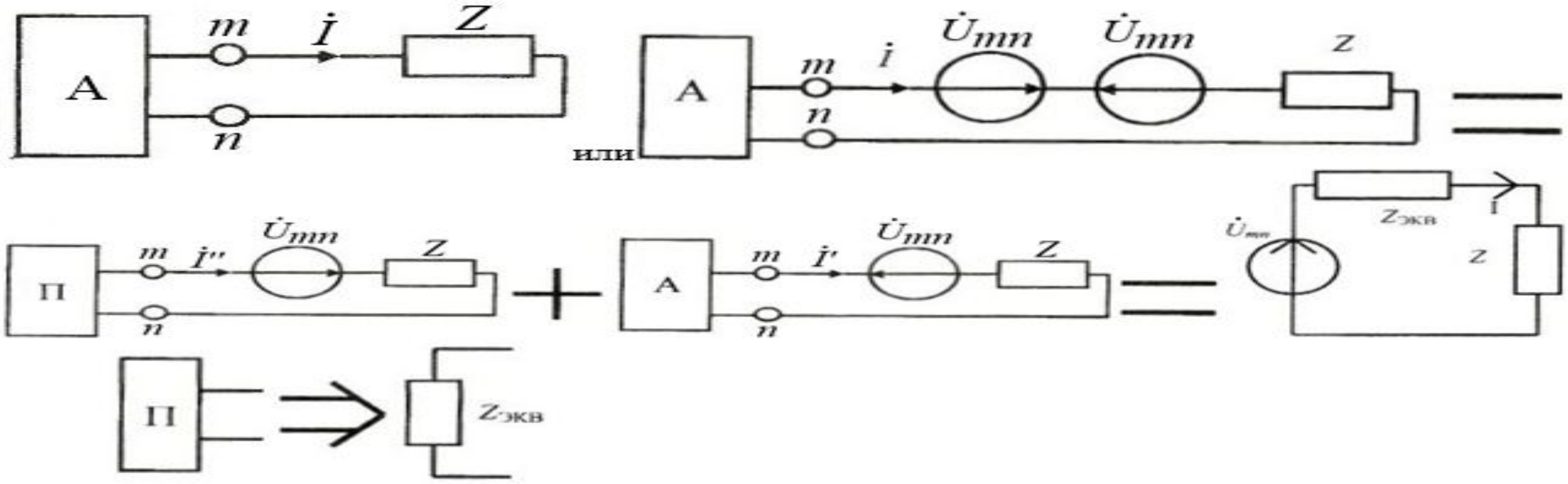


Рисунок 9. К доказательству теоремы об эквивалентном источнике.

Теорему об эквивалентном источнике можно сформулировать и для источника тока.

Пусть имеется некоторая цепь (рис. 10а). Эту цепь можно представить в виде эквивалентной схемы (рис. 10б). Параметр $Z_{\text{экв}}$ является входным комплексным сопротивлением определяется аналогично теореме об эквивалентном источнике ЭДС, а комплексный ток эквивалентного источника – как ток короткого замыкания $\dot{I}_{\text{КЗ}}$ (рис. 10в).

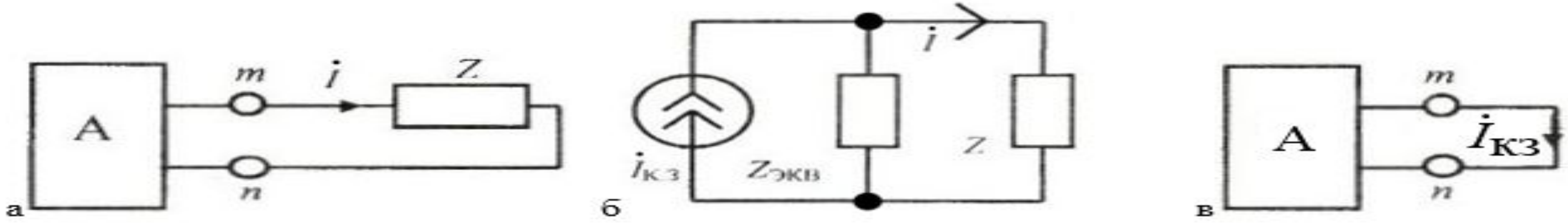


Рисунок 10. Замена участка электрической цепи эквивалентным источником тока.

ЗАДАНИЯ

Задание

4 возможных балла (оценивается)

В электрической цепи №2 все сопротивления равны **1 кОм**, а токи источников равны **100 мА**. По методу узловых напряжений составьте матрицу проводимостей для **(1)** и **(2)** узлов начиная с **(1)** узла. Результат запишите в мСм.

$$= \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

Отправить

Задание

2 возможных балла (оценивается)

В электрической цепи № 2 все сопротивления равны **1 кОм**, а токи источников равны **100 мА**. По методу узловых напряжений составьте матрицу узловых токов для **(1)** и **(2)** узлов начиная с **(1)** узла. Результат запишите в мА.

$$= \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$$

Задание

2 возможных балла (оцениваются)

В электрической цепи № 2 все сопротивления равны **1 кОм**, а токи источников равны **100 мА**. По методу узловых напряжений определите напряжения для **(1)** и **(2)** узлов начиная с **(1)** узла. Примите напряжение **(0)** узла равным нулю. Результат запишите в В.

$$= \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$$

Отправить

Схема электрической цепи № 1

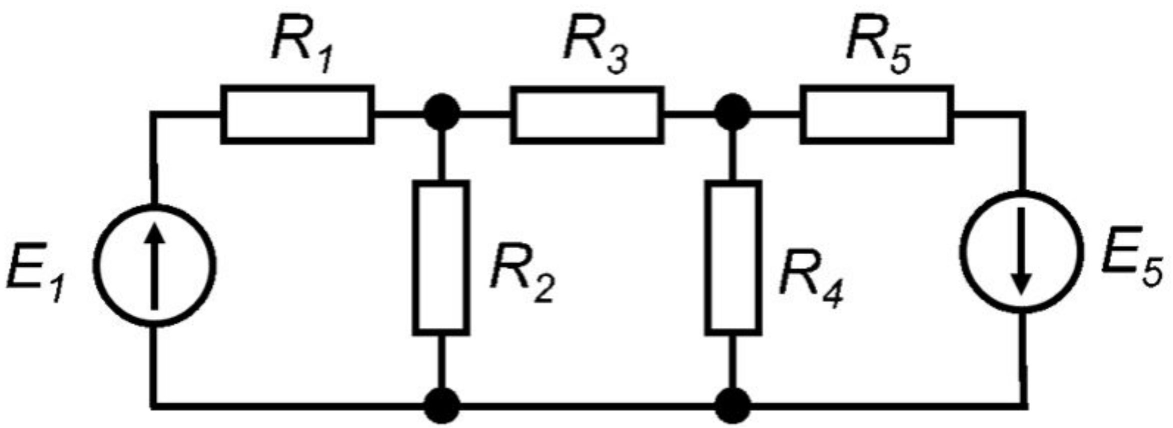
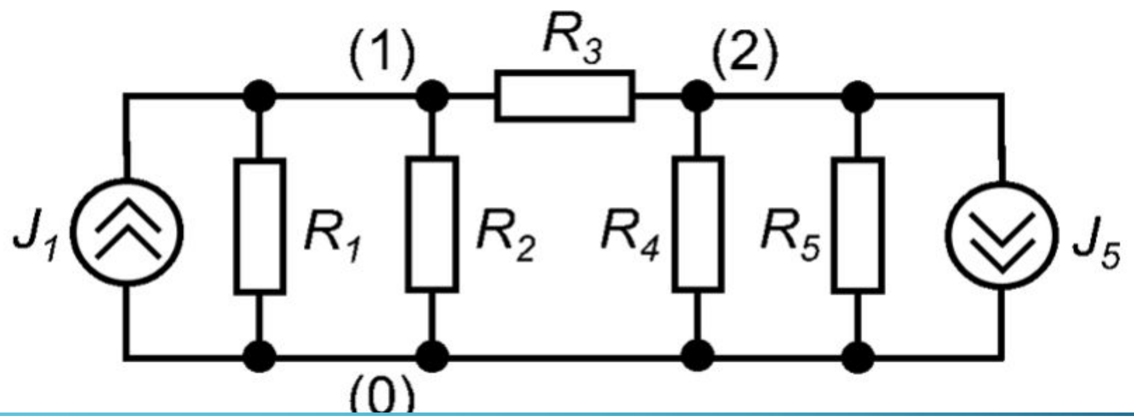


Схема электрической цепи № 2



Укажите число главных контуров для электрической цепи № 1

В электрической цепи № 2 все сопротивления равны 1 кОм, а токи источников равны 100 мА. Определите ЭДС эквивалентного источника напряжения относительно ветви с сопротивлением R_3. Результат запишите в В.

В электрической цепи № 2 все сопротивления равны 1 кОм, а токи источников равны 100 мА. Определите внутреннее сопротивление эквивалентного источника напряжения относительно ветви с сопротивлением R_3. Результат запишите в кОм.

В электрической цепи № 1 все сопротивления равны 1 кОм, а напряжения источников ЭДС равны 100 В. По принципу наложения определите величину тока в ветви с сопротивлением R3, вызываемого источником ЭДС E_1. Результат запишите в мА.

В электрической цепи № 1 все сопротивления равны 1 кОм, а напряжения источников ЭДС равны 100 В. По принципу наложения определите величину тока в ветви с сопротивлением R3, вызываемого источником ЭДС E_2. Результат запишите в мА.