



Тема 6. Расчет стержневых конструкций по предельному равновесию

2015

6.1. Предельное равновесие многопролетных неразрезных балок

6.2. Характерные особенности расчета конструкций методом предельного равновесия

6.3. Примеры применения статической и кинематической теорем

6.4. Контрольные вопросы

6.1. Предельное равновесие многопролетных неразрезных балок

Методы приближенной оценки нагрузок, соответствующих *предельному состоянию* по схеме *идеального жесткопластического тела* (рис. 1.1, в), имеют большое практическое значение. В этих методах считается, что конструкция уже исчерпала свою *несущую способность*, если малое приращение внешней нагрузки способно вызвать непрекращающийся рост деформаций и последующее разрушение. Нагрузку, отвечающую моменту исчерпания несущей способности конструкции, называют *предельной*. Другими словами *предельной нагрузкой* называется такая нагрузка, которую конструкция может выдержать без разрушения ее основных элементов, т. е. она является мерой несущей способности конструкции.

Несущая способность конструкции изучается в разделе *теории пластичности*, называемом *теорией предельного равновесия*. Эта теория не позволяет проследить упругие и пластические деформации и напряжения от начала нагружения. Объектом изучения является лишь заключительный момент – исчерпание несущей способности сооружения. Напряженное состояние всех элементов конструкции в такой стадии называется *состоянием предельного равновесия*.

По современным строительным нормам и правилам определение несущей способности является *расчетом по первому предельному состоянию*.

Недостаток теории предельного равновесия состоит в полном игнорировании деформаций, которые играют существенную роль при оценке геометрических эффектов деформирования и исчерпания предельной деформативности.

6.1.1. Три основные теоремы предельного равновесия. В основе теории предельного равновесия лежат три теоремы [33].

1. *Предельная нагрузка* не может быть ниже той, которую может уравновесить статически допустимое распределение внутренних сил – *статическая теорема*.

2. *Предельная нагрузка* не может быть больше той, которая определена из рассмотрения кинематически допустимого распределения перемещений (кинематического механизма) – *кинематическая теорема*.

3. *Предельная нагрузка* является максимальной из всех нагрузок, которые могут быть уравновешены статически допустимым полем напряжений, вместе с тем предельная нагрузка является минимальной из нагрузок, соответствующих всем пластическим механизмам.

Статическая теорема определяет предельную нагрузку как наибольшую из всех внешних нагрузок, при которых рассматриваемая система находится в равновесии. Статическая теорема устанавливает приближение для предельной нагрузки снизу, т. е. $P_{СТ} \leq P^*$, где P^* – предельная нагрузка.

Кинематическая теорема определяет предельную нагрузку как наименьшую из всех нагрузок, обращающих прежде жесткую и геометрически неизменяемую конструкцию в механизм. Она дает верхнюю оценку истинной предельной нагрузки, т. е. $P^* \leq P_{КИН}$.

Обе теоремы сформулированы и доказаны для идеально пластических конструкций. Реальные конструкции отличаются от идеальных наличием физического и геометрического упрочнения, а также другими особенностями. Поэтому фактическая предельная нагрузка может не совпадать с разрушающей; обычно она несколько ниже разрушающей.

Третья теорема устанавливает, что если некоторое равновесное распределение внутренних усилий в необходимом числе точек образует пластические шарниры (см. п. 6.1.3), то нагрузки $P_{СТ}$ и $P_{КИН}$ равны предельной P^* . Для произвольных статически допустимых распределений внутренних сил и кинематических механизмов $P_{СТ} \leq P^* \leq P_{КИН}$. При применении *кинематического метода* (кинематическая теорема) получается верхняя оценка предельной нагрузки, а при *статическом* (статическая теорема) – нижняя оценка.

6.1.2. Кинематический и статический методы теории предельного равновесия. Применительно к задачам о несущей способности изгибаемых конструкций разработаны кинематический и статический методы теории предельного равновесия.

В кинематическом методе используется понятие о *пластических шарнирах*. Пластический шарнир, в отличие от идеального шарнира соединяющего отдельные элементы конструкции, имеет следующие особенности. Во-первых, он отличается от идеального шарнира тем, что в нем действует изгибающий момент постоянной величины $M_{пл}$, равный предельному моменту внутренних сил ($M_{пл} = \sigma_m W_{пл}$). Во-вторых, он является односторонним, так как раскрывается при нагрузке в сторону эпюры M и закрывается при разгрузке и при перемене знака изгибающего момента. В последнем случае стержень снова начинает работать как упругий.

Статический метод также применяется, однако получил меньшее распространение. Заметим, что наиболее полное представление о величине предельной нагрузки дает двухсторонняя оценка от одновременного применения статической и кинематической теорем.

Особенность теории предельного равновесия состоит в том, что для отыскания предельной нагрузки недостаточно располагать сведениями о размерах, физических свойствах материала конструкции и о типах нагрузок. Необходимо еще заранее знать вид механизма разрушения, если используется кинематический метод, или характер распределения внутренних усилий, если применяется статический.

Вместо механизма разрушения могут быть назначены поля кинематически допустимых перемещений оси. Такие перемещения должны соответствовать условиям закрепления конструкции и условиям совместности деформаций. Решение с использованием непрерывных кинематически допустимых полей перемещений требует привлечения условий текучести. Если рассматривается механизм разрушения, образованный пластическими шарнирами и жесткими дисками, условия текучести используются неявно.

Механизм разрушения может быть назначен на основании экспериментов; широко используются различные аналогии и привлекается инженерная интуиция. Обычно для того, чтобы n раз статически неопределимая система превратилась в механизм надо ввести $(n + 1)$ пластических шарниров. Пластические шарниры появляются, в первую очередь, в сечениях, где действуют наибольшие значения изгибающих моментов, а затем в сечениях, где моменты меньше по величине.

Предельным состоянием неразрезной балки является такое состояние, когда в пределах какого-нибудь одного пролета возникает три пластических шарнира, раскрывающихся последовательно в разные стороны. Обычно, два из них возникают на опорах, а третий в пролете (рис. 6.1).

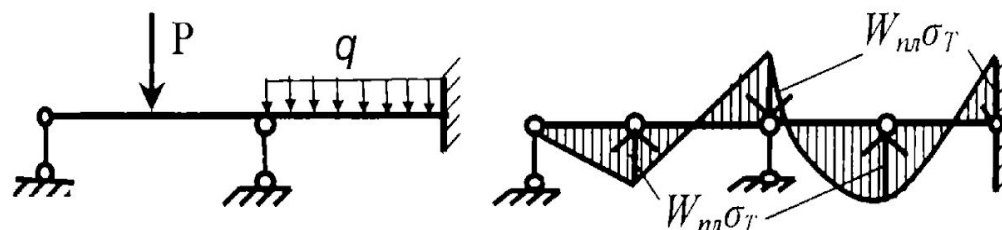


Рис. 6.1. Неразрезная балка: а – заданная система; б – механизм исчерпания несущей способности

6.1.3. Пластический момент сопротивления сечения. Если материал изгибаемой конструкции подчиняется диаграмме Прандтля, то в наиболее напряженных сечениях балки появляются области пластических деформаций (рис. 6.2). Распределение напряжений по длине балки представлено на рис. 6.3, где показано как линейная эпюра нормальных напряжений материала, работающего в упругой стадии (рис. 6.3, а), трансформируется во “флажковую” эпюру при достижении пластической стадии работы материала в наиболее напряженном сечении, что соответствует появлению пластического шарнира (рис. 6.3, в).

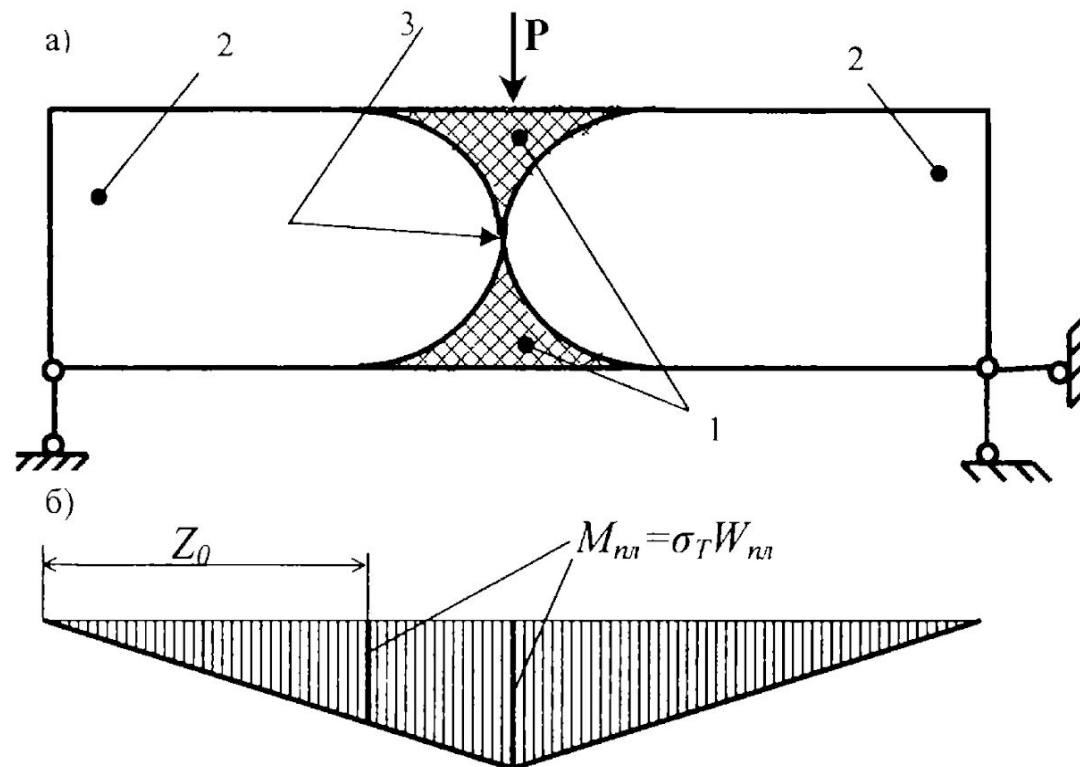


Рис. 6.2. К понятию «пластический шарнир»: а – области пластических и упругих деформаций; б - эпюра M ; 1 – область пластических деформаций; 2 – область упругих деформаций; 3 – пластический шарнир

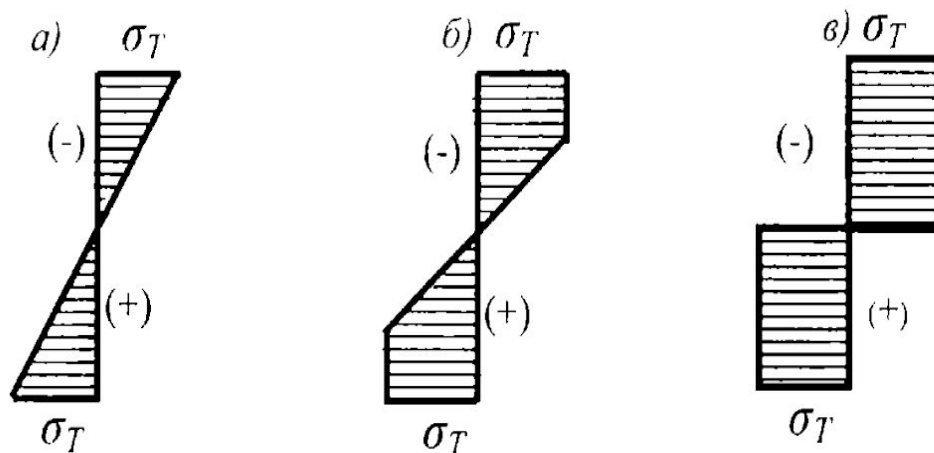


Рис. 6.3. Эпюры нормальных напряжений в поперечных сечениях балки:
 а – сечение на расстоянии Z_0 от левой опоры; б – сечение на участке между Z_0 и серединой пролета; в – сечение посередине пролета, где появляется пластический шарнир

При изгибе (рис. 6.4) пластический момент сопротивления сечения определяется по формуле [27]

$$W_{пл} = \psi S_{x_1}^{сж} + S_{x_1}^{раст}; \quad \psi = \sigma_m^{(-)} / \sigma_m^{(+)}, \quad (6.1)$$

где $S_{x_1}^{сж}$ – статический момент сжатой части сечения относительно нейтральной оси x_1 ; $S_{x_1}^{раст}$ – то же растянутой части сечения.

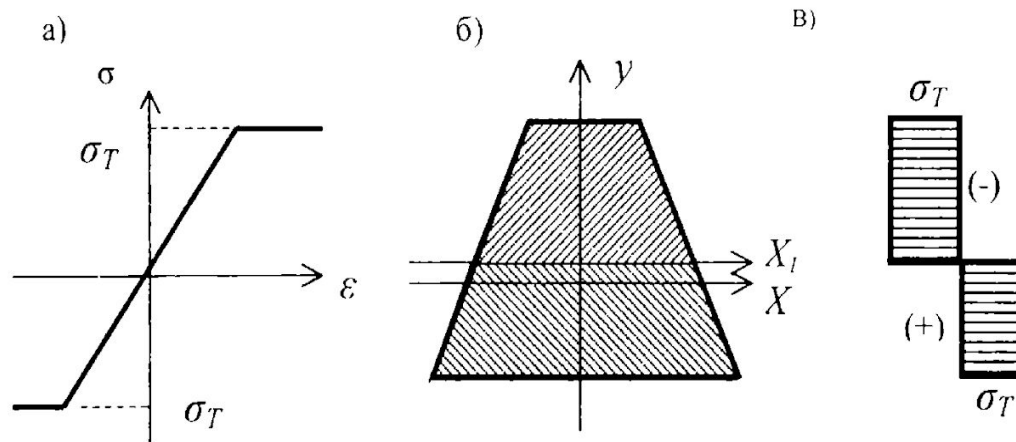







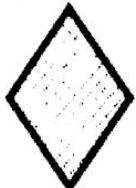
Рис. 6.4. Образование пластического шарнира: а – диаграмма Прандтля; б – положение нейтральной оси X_1 ; в – распределение напряжений в пластическом шарнире

Положение нейтральной оси x_1 сечения в пластическом шарнире определяется из условия равенства площадей $A_{сж} = A_{раст}$. Для сечений симметричных относительно нейтральной оси ось x_1 проходит через центр тяжести сечения. В прямоугольном поперечном сечении [26] пластический момент сопротивления при $\psi = 1$ равен

$$W_{nl} = bh^2 / 4 \quad (W_x = bh^2 / 6) \quad (6.2)$$

В табл. 6.1 приведены отношения W_{nl} / W_x для некоторых простых форм сечения при $\sigma_T^{(-)} = \sigma_T^{(+)}$; $\psi = 1$ [27]. Легко заметить, что это отношение тем больше, чем больше материала сконцентрировано вблизи середины высоты, т.е. чем менее выгодно распределение материала по сечению с точки зрения сопротивления материалов, работающих в упругой стадии.

Таблица 6.1
Соотношение между пластическим и упругим моментами
сопротивления

Форма сечения						
	Идеальный двутавр	Прокат	Трубчатое	Прямоугольное	Круглое	Ромбическое
$\frac{W_{пл}}{W_x}$	1,00	1,15...1,17	1,27	1,5	1,70	2,00

6.2. Характерные особенности расчета конструкций методом предельного равновесия

Метод предельного равновесия широко применяется при проектировании строительных конструкций и сооружений. На базе этого метода разработана методика расчета конструкций по несущей способности, которая используется в «Строительных нормах и правилах», нормирующих проектирование строительных конструкций и оснований. Прогрессивная роль метода предельного равновесия состоит в том, что он позволяет вскрыть резервы прочности, неиспользуемые при расчетах по допускаемым напряжениям. Расчет по предельному равновесию, как правило, дает возможность уменьшить вес конструкции.

Метод предельного равновесия вносит ряд характерных особенностей, которых нет при расчете статически неопределимых систем, работающих в упругой стадии. Так, на несущую способность конструкций, по методу предельного равновесия, не влияют жесткости отдельных элементов, т.е. отсутствует эффект перераспределения внутренних усилий, наблюдаемый обычно в упругих статически неопределимых системах. Величина предельной нагрузки не зависит от упругости и осадки опор, от температурных воздействий, монтажных напряжений, неточного изготовления элементов [28]. Это объясняется тем, что предельная нагрузка определяется из уравнений статики, в которые самоуравновешенные силы не входят, так как в состоянии предельного равновесия статически неопределимая система становится изменяемой. Поэтому для определения

предельной нагрузки нет необходимости раскрывать статическую неопределимость, что, в основном, и определяет практическую простоту использования этого метода.

При применении метода предельного равновесия нарушается известный *парадокс Эмерсона* [6], согласно которому *не всякое добавление материала к сечению целесообразно, то есть увеличивает осевой момент сопротивления W_x , так как момент сопротивления может и уменьшаться*. В теории же идеально пластического тела всякое добавление материала увеличивает несущую способность сечения.

Важной особенностью нагружения статически неопределимых систем за предел упругости является то, что остаточные деформации, как правило, сопровождаются остаточными напряжениями в сечениях стержней (см. так же гл. 7), и эпюра остаточных напряжений в сечениях не будет самоуравновешенной, как это наблюдается в статически неопределимых системах. Дело в том, что после разгрузки статически неопределимой системы, работающей за пределом упругости (рис. 6.5), как правило, возникают остаточные внутренние силы [28].

Для примера, представленного на рис. 6.5, остаточные напряжения в краевых точках этого сечения равны

$$\Delta\sigma = \pm \frac{M}{W_x} \pm \sigma_T = \sigma_T \left(1,22 \frac{W_{nl}}{W_x} - 1 \right).$$

При прямоугольном сечении $\Delta\sigma = \pm 0,83\sigma_T$;

при круглом сечении $\Delta\sigma = \pm 1,074\sigma_T$.

Сечение на опоре будет находиться в более благоприятных условиях. Следовательно, при прямоугольном сечении линейный закон разгрузки справедлив, а при круглом сечении – нет, так как $\Delta\sigma > \sigma_T$. Таким образом, при учете остаточных напряжений при разгрузке, линейный закон разгрузки справедлив только в том случае, когда остаточные напряжения меньше σ_T .

Метод предельного равновесия имеет и определенные недостатки [6]. Использование диаграммы Прандтля предполагает неопределенное нарастание пластической деформации без появления трещин. Однако даже металлы, например дюралюминий, имеют незначительное протяжение площадки текучести. Если не учесть реальную диаграмму (зоны упрочения), то это может повлечь при достижении σ_b появление трещин в растянутых волокнах сечения и раздробление либо выпучивание в сжатых. Наконец, пластический расчет не дает величины деформаций, поэтому не исключено получение больших прогибов даже при допускаемой нагрузке.

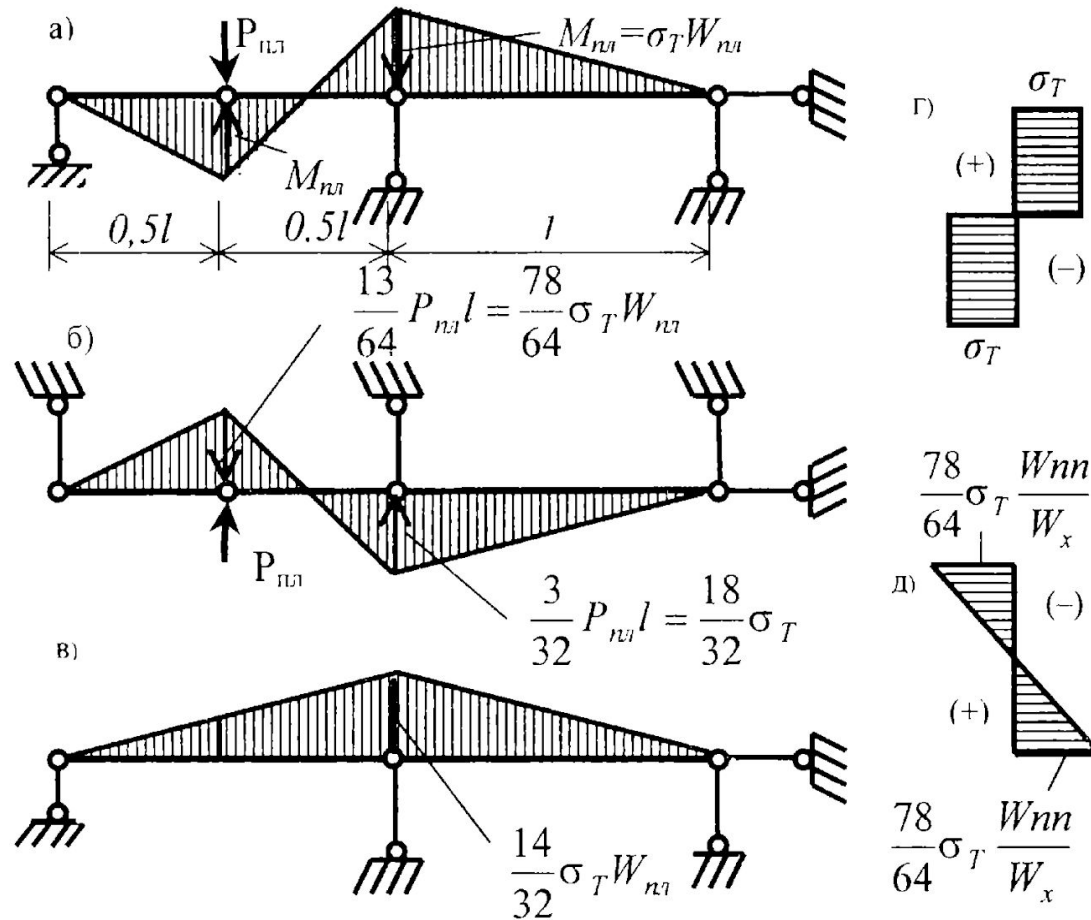


Рис. 6.5. Вычисление остаточных напряжений: а – эпюра M при нагрузке P_{nl} ; б – эпюра M_p при разгрузке силой P_{nl} ; в – остаточная эпюра M_0 ; г – эпюра напряжений в пластическом шарнире над промежуточной опорой; д – эпюра напряжений в сечении над промежуточной опорой при разгрузке

6.3. Примеры применения статической и кинематической

Пример 1. Рассмотрим балку, представленную на рис. 6.6, а [16].

Для один раз статически неопределимой балки исчерпание несущей способности наступает при появлении двух пластических шарниров. Один шарнир в заделке А, а другой где-то в пролете балки АВ.

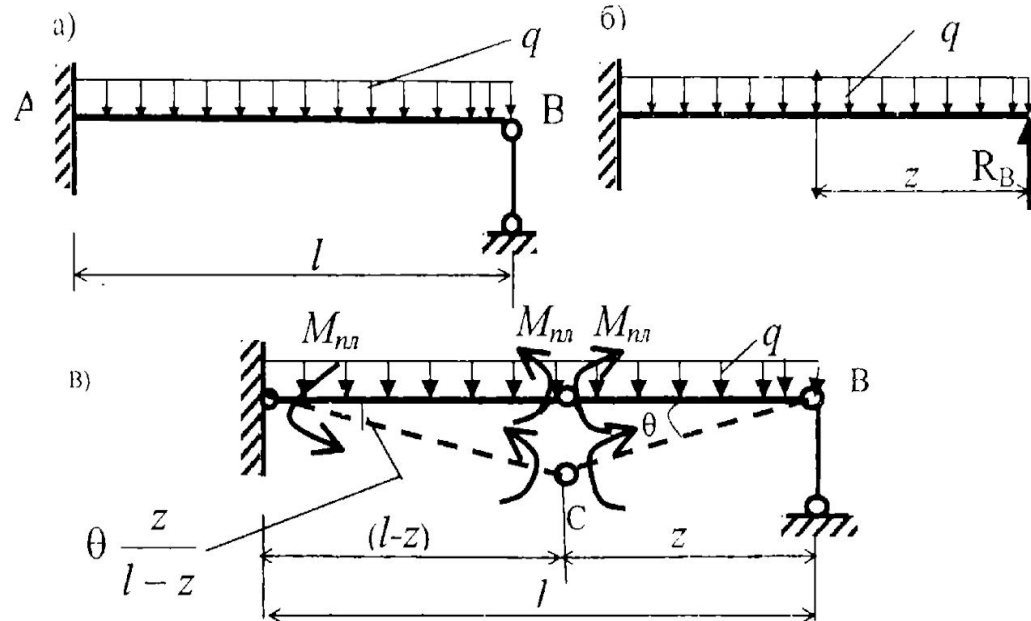


Рис. 6.6. Статически неопределимая балка: а – заданная система; б – эквивалентная система; в – механизм исчерпания несущей способности

Изменяя реакцию R_B (рис. 6.6, б), можно рассмотреть все статически возможные состояния балки. Изгибающий момент в сечении с координатой Z равен

$$M = R_B z - qz^2 / 2.$$

Максимальное значение момента при $Z_0 = R_B / q$ равно

$$M_{MAX} = R_B^2 / 2q.$$

Из условия, что величина этого момента не превышает предельного, $M_{MAX} \geq M_{пл}$, имеем

$$q \geq \frac{R_B^2}{2M_{пл}}. \quad (6.3)$$

Наибольшее значение момента в заделке

$$M_3 = R_B l - ql^2 / 2.$$

Из того же условия, что и в заделке (величина момента не превышает предельного $M_3 \leq M_{пл}$), имеем

$$q \leq 2M_{пл} / l^2 + 2R_B / l. \quad (6.4)$$

На рис. 6.7 область, в которой выполняются неравенства (6.3) и (6.4) заштрихована.

Согласно статической теореме предельная нагрузка больше всех нагрузок, определяемых точками заштрихованной области, то есть определяется точкой K пересечения линий OK и LK . Абсцисса ее

$$R_B = 4,82M_{пл} / l. \quad (6.5)$$

Этому значению R_B соответствует величина предельной нагрузки

$$q_{пр} = 11,6M_{пр} / l^2. \quad (6.6)$$

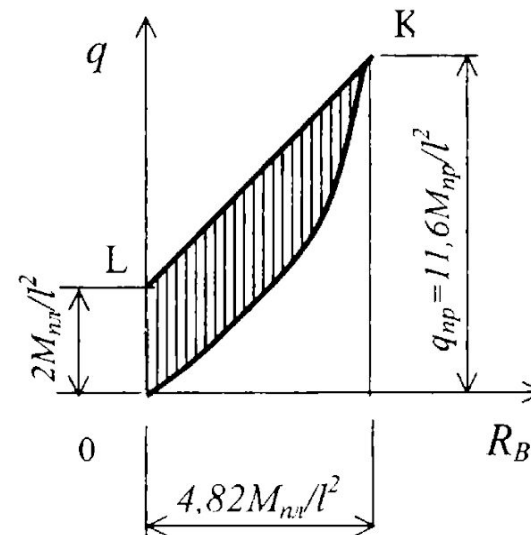


Рис. 6.7. К определению $q_{пл}$ (статическая теорема)

Из соотношений (6.3), (6.5) и (6.6) получаем $Z=0,414l$ (расстояние сечения B до сечения, в котором изгибающий момент в пределах упругости максимален составляет $0,375l$).

Определим теперь интенсивность предельной нагрузки кинематическим методом. На рис. 6.7 штриховой линией показана кинематически возможная система. Если обозначить угол поворота стержня BC - θ , то угол поворота стержня AC равен $\theta Z / (l - Z)$. Работа от равномерно распределенной нагрузки равна

$$q_{\text{пр}} (l - z) \frac{1}{2} \theta \frac{z}{(l - z)} (l - z) + q_{\text{пр}} z \frac{1}{2} \theta z = q_{\text{пр}} l z \theta / 2.$$

Эту работу можно так же подсчитать как произведение интенсивности равномерно распределенной нагрузки на площадь треугольника $A-C-B$ (рис. 6.6, в).

Работа предельных моментов равна

$$M_{\text{пл}}\theta + 2M_{\text{пл}}\theta z/(l - z).$$

На основании кинематической теоремы

$$q_{\text{пр}}lz\theta / 2 = M_{\text{пл}}\theta + M_{\text{пл}}\theta z/(l - z),$$

откуда получаем

$$q_{\text{пр}} = 2M_{\text{пл}}(l + z)/lz(l - z). \quad (6.7)$$

Таким образом, предельная интенсивность равномерно распределенной нагрузки зависит от координаты пластического шарнира z . Согласно кинематической теореме действительной предельной нагрузкой будет минимальная из всех нагрузок, определяемых формулой (6.7). Для вычисления ее, приравняем нулю первую производную от $q_{\text{пр}}$ по z . Тогда получим следующее квадратное уравнение:

$$z^2 + 2lz - l^2 = 0,$$

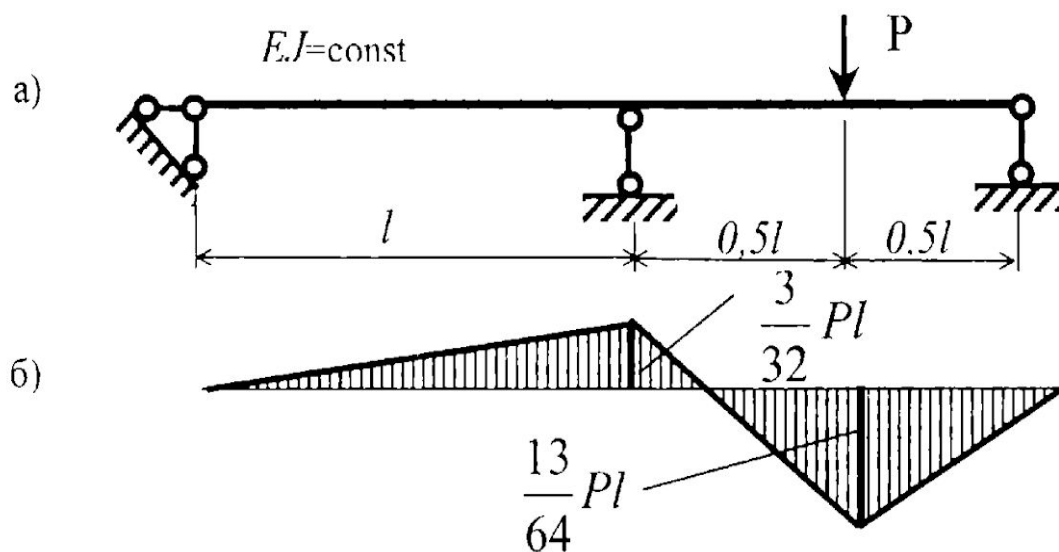
решая которое, устанавливаем, что $z = 0,414 l$.

Определение знака второй производной показывает, что при этом значении z функция (6.7) имеет минимум. Подстановка найденной величины z в выражение (6.7) приводит к соотношению (6.6). Таким образом, предельные нагрузки, определенные статическим и кинематическим методами, совпадают. Следовательно, проведенное решение является полным.

Пример 2. Рассмотрим (рис. 6.8) двухпролетную неразрезную балку [26]. Если балка загружена сосредоточенными силами, то эпюра изгибающих моментов всегда состоит из прямолинейных участков и количество, и места расположения пластических шарниров известны, поэтому отыскивать минимум нагрузки нет необходимости.

Эпюра моментов при упругой работе балки имеет вид, показанный на рис. 6.8, б. На рис. 6.8, в – 6.8, е показаны эпюры напряжений в опасных сечениях по мере роста прикладываемой нагрузки. Вначале текучесть материала появляется в крайних волокнах поперечного сечения, в наиболее напряженном месте балки (рис. 6.8, в). Дальнейшее увеличение силы P приводит к распространению пластических зон вглубь поперечного сечения (рис. 6.8, г) и появлению пластического шарнира в сечении под силой, где возникает

наибольший изгибающий момент. В этом случае неразрезная статически неопределимая балка превращается в статически определимую балку с промежуточным шарниром в правом пролете, к которому приложены моменты $M_{пл}$ и сила P . Таким образом, появление пластического шарнира не приводит к разрушению балки, а всего лишь снижает степень ее статической неопределимости на единицу.



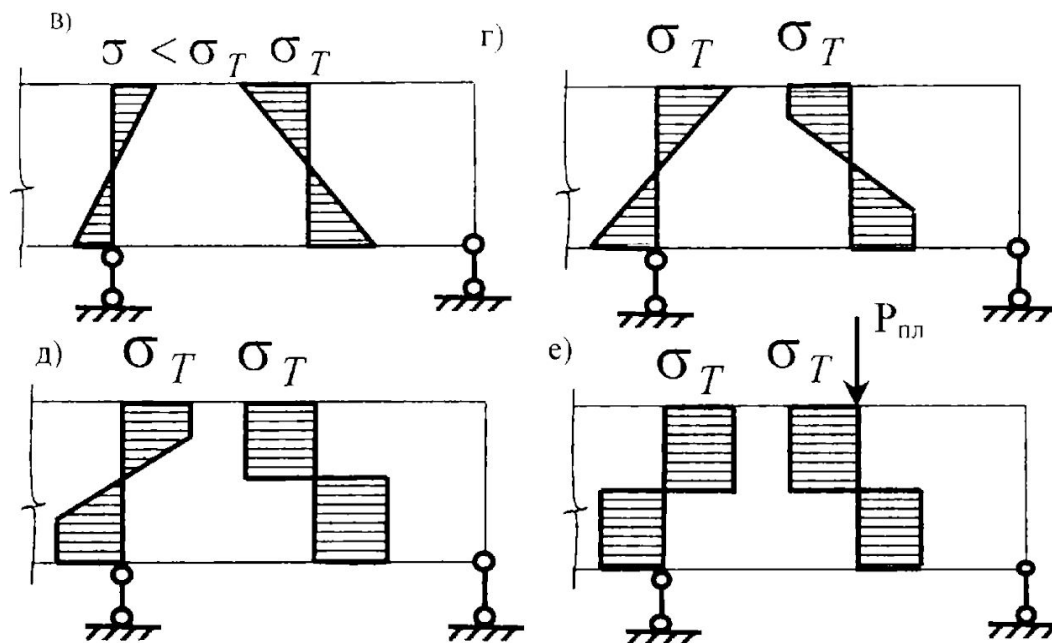


Рис. 6.8. Последовательность образования пластических шарниров: а – заданная схема; б – эпюра изгибающих моментов при работе материала в упругой стадии; в, г, д, е – эпюры напряжений в опасных сечениях при нагрузке P_1 , P_2 , P_3 и $P_{пл}$

При дальнейшем возрастании нагрузки будет увеличиваться изгибающий момент над средней опорой и при $P = P_{пл}$ в этом сечении также образуется пластический шарнир (рис. 6.8, е). Появление

второго пластического шарнира исчерпывает грузоподъемность балки, так как она превращается в геометрически изменяемую систему (при $n = 1$). Следовательно, разрушающая нагрузка должна быть подсчитана из условия появления двух пластических шарниров. Схема балки и эпюра изгибающих моментов в этом случае имеет вид, показанный на рис. 6.9.

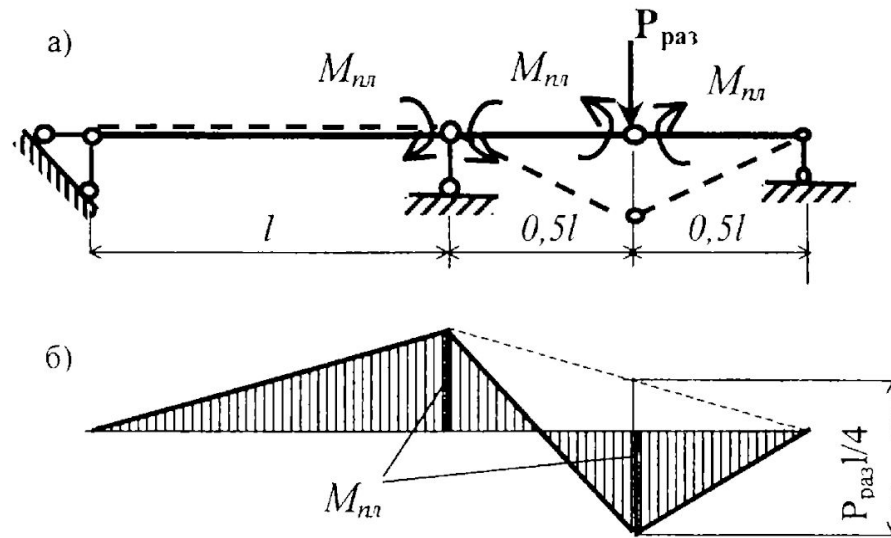


Рис. 6.9. К определению $P_{раз}$ в балке: а – схема балки исчерпавшей грузоподъемность; б – эпюра изгибающих моментов при появлении двух пластических шарниров

На рис. 6.10 приведен график прогибов сечения под сосредоточенной силой P в зависимости от величины этой силы.

Разрушающая нагрузка определяется из выражения

$$P_{РАЗ} l / 4 = 1,5 M_{ПЛ} = 1,5 \sigma_T W_{ПЛ}, \quad (6.8)$$

где $W_{ПЛ}$ – пластический момент сопротивления, определяемый по формуле (6.1).

$$\text{Из (6.8) имеем } P_{РАЗ} = 6 W_{ПЛ} \sigma_T / l.$$

Пример 3. Рассмотрим двухпролетную балку, представленную на рис. 6.11, а. На рис. 6.11 представлена эпюра изгибающих моментов при работе ее материала в упругой стадии, которая может быть построена в статически неопределимой системе как методом сил, так

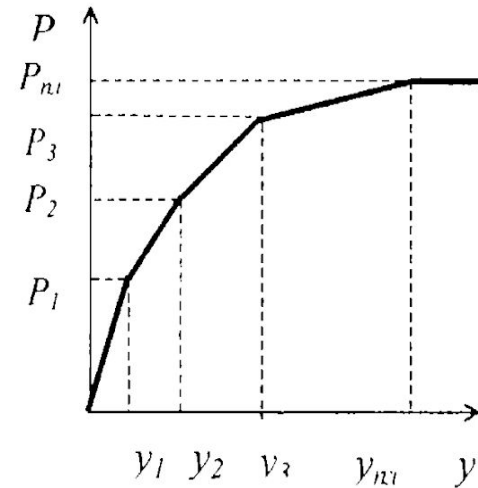
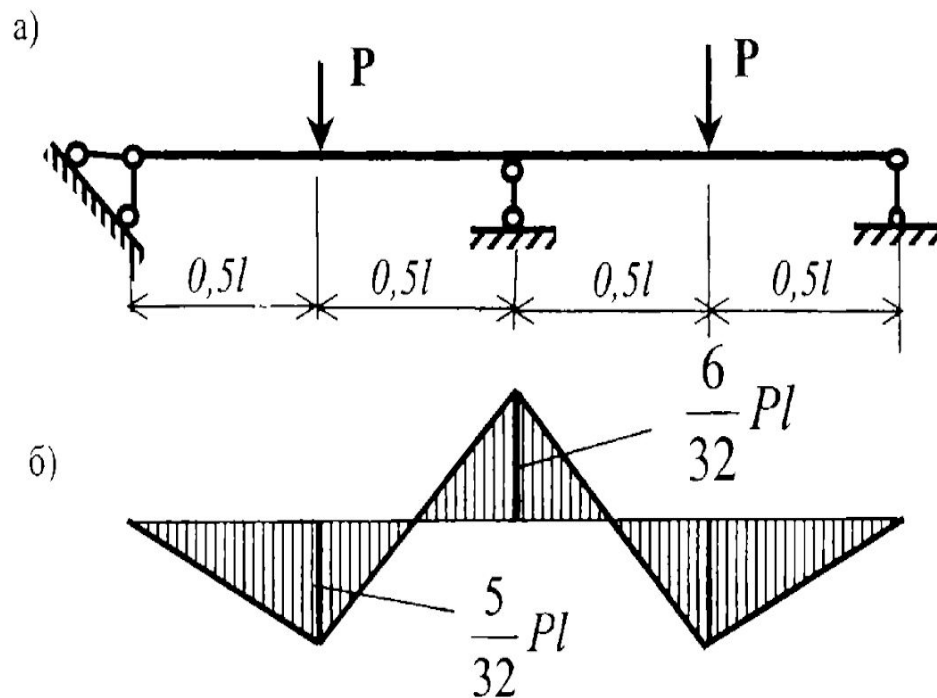


Рис. 6.10. График $P=f(y)$

и методом перемещений. В данном случае балка превращается в механизм при появлении трех пластических шарниров (рис. 6.11, е), так как $n + 1 = 2 + 1 = 3$. В предельном состоянии эпюра имеет вид, показанный на рис. 6.11, г.



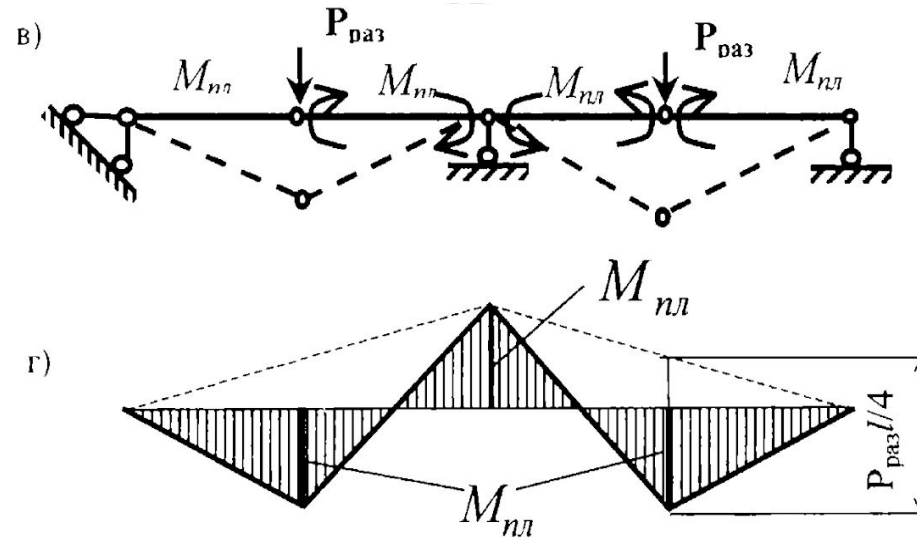


Рис. 6.11. К определению $P_{раз}$ в балке: а – заданная система; б – эпюра изгибающих моментов в упругой стадии; в – схема балки исчерпавшей грузоподъемность; г – эпюра изгибающих моментов при появлении трех пластических шарниров

Разрушающая нагрузка определяется из выражения (6.8), так как здесь ординаты эпюры M в предельном состоянии одинаковы, и она равна

$$P_{РАЗ} = 6W_{ПЛ}\sigma_T / l.$$

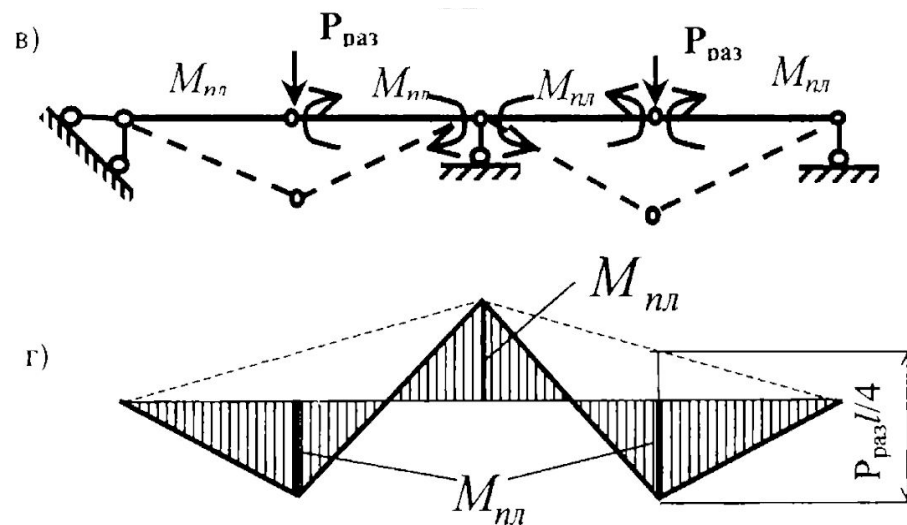


Рис. 6.11. К определению $P_{раз}$ в балке: а – заданная система; б – эпюра изгибающих моментов в упругой стадии; в – схема балки исчерпавшей грузоподъемность; г – эпюра изгибающих моментов при появлении трех пластических шарниров

Разрушающая нагрузка определяется из выражения (6.8), так как здесь ординаты эпюры M в предельном состоянии одинаковы, и она равна

$$P_{РАЗ} = 6W_{пл}\sigma_T / l.$$

Для сравнения: величина нагрузки при которой только в одном опасном сечении балки напряжения в крайних волокнах поперечного сечения достигнут σ_T равны (см. рис. 6.9, б)

$$M_{MAX} = \sigma_T W_X = 6Pl/32 .$$

Откуда имеем:

$$P = 5,33\sigma_T W_X / l.$$

6.4. Контрольные вопросы

1. Какую нагрузку в методе предельного равновесия называют предельной?
2. Какие теоремы лежат в основе теории предельного равновесия?
3. Как определяется предельная нагрузка в статической и кинематической теоремах?
4. Для каких материалов сформулированы и доказаны статическая и кинематическая теоремы?
5. В чем состоит кинематический метод теории предельного равновесия?
6. В чем состоит статический метод теории предельного равновесия?
7. Что такое пластический шарнир и как он определяется при изгибе?
8. Какие характерные особенности имеет расчет конструкций методом предельного равновесия?
9. В чем состоит парадокс Эмерсона?
10. Какие недостатки имеет метод предельного равновесия?
11. При каких обстоятельствах в статически неопределимых системах возникают остаточные деформации и напряжения?