Лекция 5

- **Безвихревое течение**
- **Потенциал скорости**
- **Потенциальное течение**
- **Потенциальное и безвихревое течения**
- **Уравнение Лапласа для потенциала скорости**
- **Функция тока**
- **Гидродинамический смысл функции тока**
- **Уравнение Лапласа для функции тока**

Уравнение неразрывности

Относительное изменение объёма по времени равно

$$\theta = \frac{1}{\Delta W}\frac{d(\Delta W)}{dt} = div\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad (4.31)$$

$$m = const \qquad (4.32)$$

$$\frac{dm}{dt} = 0, \quad m = \rho \cdot W \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dt} = \frac{d(\rho \cdot W)}{dt} = W\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{dW}{dt} = 0 \qquad (4.33)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{W}\frac{dW}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + div\vec{V} = 0 \qquad (4.34)$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot div\vec{V} = 0} \qquad (4.35)$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \left(\vec{V}\cdot\nabla\rho\right), \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \underbrace{\left(\vec{V}\cdot\nabla\rho\right) + \rho\cdot div\vec{V}}_{div\left(\rho\cdot\vec{V}\right)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + div\left(\rho\cdot\vec{V}\right) = 0$$

(4.36)

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\left(\rho\cdot\vec{V}\right) = 0}$$

(4.37)

Уравнение неразрывности

Частные случаи уравнения неразрывности

1) **Установившиеся течение**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow div\left(\rho \cdot \vec{V}\right) = 0$$

(4.38)

$$div\left(\rho \cdot \vec{V}\right) = \frac{\partial\left(\rho \cdot V_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho \cdot V_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\rho \cdot V_z\right)}{\partial z}$$

2) **Несжимаемое течение**

$$\rho = const \quad \Rightarrow \quad div\vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad div\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \qquad (4.39)$$

$$div\vec{V} = 0 \qquad (4.40)$$

Безвихревое течение

Определение. Безвихревое течение такое течение, при котором выполняется равенство

$$rot\vec{V} = 0 \qquad (5.$$

$$rot\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) \qquad (5.$$

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right); \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right); \quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \ [(4.24$$

$$rot\vec{V} = 2\vec{\omega} \quad \vee \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\vec{V} \qquad (5.$$

Потенциал скорости

$$rot\vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) = 0; \quad \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) = 0; \quad \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) = 0. \qquad (5.4$$

Введём скалярную функцию $\varphi(x, y, z)$ так, чтобы выполнялись равенства

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \qquad (5.5$$

Подстановка (7.4) в (7.3) даёт тождества

$$\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \equiv 0; \quad \left[\frac{\partial\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial z} - \frac{\partial\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \equiv 0$$

$$\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial y}\right] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \equiv 0. \qquad (5.6$$

Потенциальное течение

$$\vec{V} = \vec{i}V_x + \vec{j}V_y + \vec{k}V_z$$ (5.7

Из (5.5) следует

$$\vec{V} = \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$ (5.8

$$grad = \nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$ (5.9

Следовательно $$\vec{V} = grad\,\varphi = \nabla\,\varphi = \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$ (5.1

Определение. *Течение, для которого существует функция $\varphi(x,y,z)$ называется потенциальным течением.*

Потенциальное и безвихревое течения

Безвихревое течение $$rot\vec{V} = 0$$ (5.1

Потенциальное течение $$\vec{V} = grad\varphi \equiv \nabla\varphi$$ (5.1

Определение. *Любое безвихревое течение является потенциальным и наоборот, любое потенциальное течение является безвихревым.*

Безвихревое течение эквивалентно потенциальному течению

Уравнение Лапласа

$$rot\vec{V} = rot\left(grad\varphi\right) = \Delta\varphi = 0 \qquad (5.1$$

Уравнение вида $\Delta\varphi = 0$ Называется уравнением Лапласа

Поскольку $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$ (5.1

Уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$ ДУЧП второго порядка

ГУ:

1) I-го рода (ГУ Дирихле);
2) II-го рода (ГУ Неймана);
3) III-го рода (ГУ Робина);

Функция тока

Уравнение неразрывности для несжимаемого потока:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0 \qquad div\vec{V}=0 \qquad [(4.4$$

Рассмотрим для краткости 2D течение

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0 \qquad (5.15$$

Введём скалярную функцию $\psi(x,y)$, так чтобы выполнялись условия

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}=V_x; \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x}=V_y \qquad (5.16$$

Подстановка в уравнение неразрывности даёт тождество

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\equiv 0$$

Функция тока

Рассмотрим уравнение линии тока.

Дифференциальное уравнение линии тока: $$\boxed{\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} = \tau = const}$$ [(4.1

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial\psi}{\partial y}} = \frac{dy}{-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}} \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy \equiv d\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = const$$ (5.1

Вдоль линии тока функция *ψ(x, y)=const*. Функция *ψ(x, y)* получила название **функции тока**.

Определение. ***Скалярная функция, сохраняющая постоянное значение вдоль линии тока называется функцией тока.***

Трубка тока, струйка тока

Линии тока никогда не пересекаются. Каждую линию тока можно рассматривать как границу твердого тела.

Определение 1. Линии тока пересекающие в пространстве замкнутую кривую образуют трубку тока

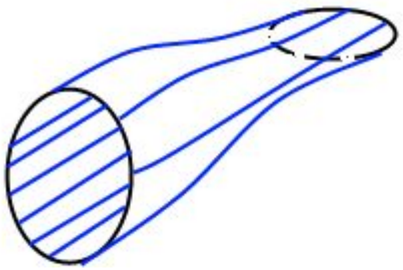

Рисунок 5.1 – Трубка тока

Определение 2. Жидкость, протекающая по трубке тока называется струйкой.

Определение 3. Если поперечное сечение трубки тока бесконечно мало (dS), то такая трубка называется элементарной трубкой тока, а струйка - элементарной струйкой.

Гидродинамический смысл функции тока

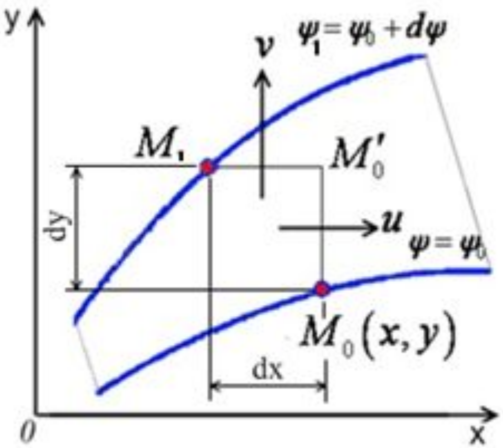

Рисунок 5.2 – К гидродинамическому смыслу функции тока

Вычислим секундный расход жидкости между двумя линиями тока

$$dQ = udy - vdx = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi \qquad (5.18)$$

$$Q = \int_{M_0}^{M_1} dQ = \int_{M_0}^{M_1} d\psi = \psi_1 - \psi_0 \qquad (5.19)$$

Следовательно, разность значений функций тока в двух каких-нибудь точках потока равна секундному объёмному расходу жидкости сквозь сечение трубки тока, ограниченной линиями тока, проходящими через выбранные точки.

Уравнение Лапласа для функции тока

Воспользуемся условием безвихревого 2D течения

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad [(4.24)]$$

Функция тока определяется формулами

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad [(5.16)]$$

Подстановка (5.16) в (4.24) даёт

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\Delta\psi=0 \qquad (5.17)$$

Уравнение $\Delta\psi=0$ - уравнение Лапласа для функции тока

Краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta\psi = 0 \qquad [(5.18)]$$

Граничные условия

$$\psi_{|x=-\infty} = Q(\mathrm{y}), \quad \psi_{|x=+\infty} = Q(\mathrm{y}), \quad \psi_{|S} = 0. \qquad (5.19)$$

Последнее условие на поверхности тела называется условием ***непротекания.***

Наложение потенциальных потоков

Пусть имеется n потенциальных течений с потенциалами скоростей

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z^2} = 0 \quad \left(1 \le k \le n\right) \qquad (5.20)$$

Суммирование уравнений Лапласа (8.1) даёт

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{k=1}^{n} \varphi_k + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sum_{k=1}^{n} \varphi_k + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sum_{k=1}^{n} \varphi_k = 0 \qquad (5.21)$$

Обозначение $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$ приводит к уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$

Любой потенциальный поток НИЖ можно представить как результат наложения друг на друга более простых потенциальных течений.

$$\vec{V} = grad\,\varphi = grad\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(grad\,\varphi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \vec{V}_k \qquad (5.22)$$

Условия Коши-Римана. Ортогональность линий

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (5.23)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{- условия C-R} \qquad (5.24)$$

$$grad\varphi \cdot grad\psi \equiv 0$$ *- ортогональность линий* (5.25)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \cdot (-v) + v \cdot u \equiv 0$$

Комплексный потенциал

Согласно теореме Римана условия Коши-Римана являются условиями существования аналитической функции

$$w(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y) \quad z=x+iy \quad i=\sqrt{-1} \tag{5.26}$$

Функция w(z) называется ***комплексным потенциалом***

$$\varphi(x,y)=\operatorname{Re}\left[w(z)\right], \quad \psi(x,y)=\operatorname{Im}\left[w(z)\right]$$

$\varphi(x,y)=C$ - **эквипотенциали** $\psi(x,y)=C'$ - **линии тока** (5.27)

$$\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{dx}=\frac{d(\varphi+i\psi)}{dx}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=u-iv,$$
$$\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{d(iy)}=-\frac{id(\varphi+i\psi)}{dy}=\frac{d(\psi-i\varphi)}{dy}=\frac{\partial\psi}{\partial y}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}=u-iv \tag{5.28}$$

$$u=\operatorname{Re}\left(\frac{dw}{dz}\right); \quad v=-\operatorname{Im}\left(\frac{dw}{dz}\right). \tag{5.29}$$

Сопряжённная комплексная скорость

$V = u + iv = |V|(\cos\theta + i\sin\theta) = |V|e^{i\theta}$ - **комплексная скорость**

$\bar{V} = u - iv = |V|(\cos\theta - i\sin\theta) = |V|e^{-i\theta}$ - **сопряжённая комплексная скорость**

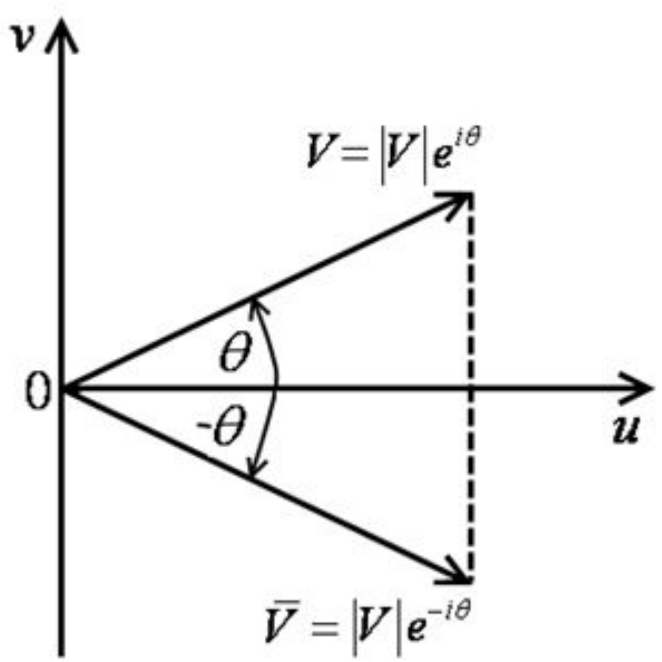

Рисунок 5.3 – Годограф скорости

$$\bar{V} = u - iv = \frac{dw}{dz}. \qquad (5.30)$$

$$|V| = |\bar{V}| = \left|\frac{dw}{dz}\right|. \qquad (5.31)$$

Плоскость xOy называют ***физической плоскостью или плоскостью течения.*** Совокупность значений комплексной скорости V образует ***плоскость годографа скорости, или просто плоскость годографа.***

$$\mathrm{Re}\left(\oint \bar{V}dz\right) = \oint(udx + vdy) = \oint d\varphi = \Gamma,$$
$$\mathrm{Im}\left(\oint \bar{V}dz\right) = \oint(udy - vdx) = \oint d\psi = Q. \qquad (5.32)$$