

Лекция 5

- **Безвихревое течение**
- **Потенциал скорости**
- **Потенциальное течение**
- **Потенциальное и безвихревое течения**
- **Уравнение Лапласа для потенциала скорости**
- **Функция тока**
- **Гидродинамический смысл функции тока**
- **Уравнение Лапласа для функции тока**

Уравнение неразрывности

Относительное изменение объёма по времени равно

$$\theta = \frac{1}{\Delta W} \frac{d(\Delta W)}{dt} = \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (4.31)$$

$$m = \text{const}$$

(4.32)

$$\frac{dm}{dt} = 0, \quad m = \rho \cdot W \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dt} = \frac{d(\rho \cdot W)}{dt} = W \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dW}{dt} = 0 \quad (4.33)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (4.34)$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \operatorname{div} \vec{V} = 0} \quad (4.35)$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla\rho), \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \underbrace{(\vec{V} \cdot \nabla\rho) + \rho \cdot \operatorname{div}\vec{V}}_{\operatorname{div}(\rho \cdot \vec{V})} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (4.37)$$

Уравнение неразрывности

Частные случаи уравнения неразрывности

1) Установившееся течение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (4.38)$$

$$\operatorname{div}(\rho \cdot \vec{V}) = \frac{\partial(\rho \cdot V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot V_z)}{\partial z}$$

2) Несжимаемое течение

$$\rho = \text{const} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{V} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (4.39)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (4.40)$$

Безвихревое течение

Определение. Безвихревое течение такое течение, при котором выполняется равенство

$$\operatorname{rot} \vec{V} = 0 \quad (5.)$$

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \quad (5.)$$

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right); \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right); \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad [(4.2.)$$

$$\operatorname{rot} \vec{V} = 2\vec{\omega} \quad \vee \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{V} \quad (5.)$$

Потенциал скорости

$$\operatorname{rot} \vec{V} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = 0; \quad \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) = 0; \quad \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = 0. \quad (5.4)$$

Введём скалярную функцию $\varphi(x, y, z)$ так, чтобы выполнялись равенства

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (5.5)$$

Подстановка (7.4) в (7.3) даёт тождества

$$\left[\frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)}{\partial z} \right] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \equiv 0; \quad \left[\frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)}{\partial x} \right] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \equiv 0;$$

$$\left[\frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)}{\partial y} \right] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \equiv 0. \quad (5.6)$$

Потенциальное течение

$$\vec{V} = \vec{i}V_x + \vec{j}V_y + \vec{k}V_z \quad (5.7)$$

Из (5.5) следует

$$\vec{V} = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (5.8)$$

$$\text{grad} = \nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (5.9)$$

Следовательно $\vec{V} = \text{grad} \varphi = \nabla \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$. (5.10)

Определение. Течение, для которого существует функция $\varphi(x, y, z)$ называется потенциальным течением.

Потенциальное и безвихревое течения

Безвихревое течение $\operatorname{rot} \vec{V} = 0$ (5.1)

Потенциальное течение $\vec{V} = \operatorname{grad} \varphi \equiv \nabla \varphi$ (5.1)

Определение. Любое безвихревое течение является потенциальным и наоборот, любое потенциальное течение является безвихревым.

Безвихревое течение эквивалентно потенциальному течению

Уравнение Лапласа

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = \Delta \varphi = 0 \quad (5.1)$$

Уравнение вида $\Delta \varphi = 0$ называется уравнением Лапласа

Поскольку $\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.1)$

Уравнение Лапласа $\Delta \varphi = 0$ — ДУЧП второго порядка

ГУ:

- 1) I-го рода (ГУ Дирихле);
- 2) II-го рода (ГУ Неймана);
- 3) III-го рода (ГУ Робина);

Функция тока

Уравнение неразрывности для несжимаемого потока:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad \text{div} \vec{V} = 0 \quad [(4.4)]$$

Рассмотрим для краткости 2D течение

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (5.15)$$

Введём скалярную функцию $\psi(x, y)$, так чтобы выполнялись условия

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = V_x; \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = V_y \quad (5.16)$$

Подстановка в уравнение неразрывности даёт тождество

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \equiv 0$$

Функция тока

Рассмотрим уравнение линии тока.

Дифференциальное уравнение линии тока:
$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} = \tau = const \quad [(4.1)$$

$$\frac{dx}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{dy}{-\frac{\partial \psi}{\partial x}} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \equiv d\psi = 0 \Rightarrow \psi = const \quad (5.1)$$

Вдоль линии тока функция $\psi(x, y) = const$. Функция $\psi(x, y)$ получила название **функции тока**.

Определение. Скалярная функция, сохраняющая постоянное значение вдоль линии тока называется функцией тока.

Трубка тока, струйка тока

Линии тока никогда не пересекаются. Каждую линию тока можно рассматривать как границу твердого тела.

Определение 1. *Линии тока пересекающие в пространстве замкнутую кривую образуют трубку тока*

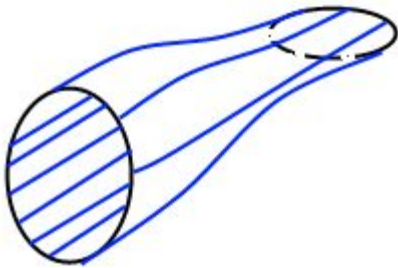


Рисунок 5.1 – Трубка тока

Определение 2. *Жидкость, протекающая по трубке тока называется струйкой.*

Определение 3. *Если поперечное сечение трубки тока бесконечно мало (dS), то такая трубка называется элементарной трубкой тока, а струйка - элементарной струйкой.*

Гидродинамический смысл функции тока

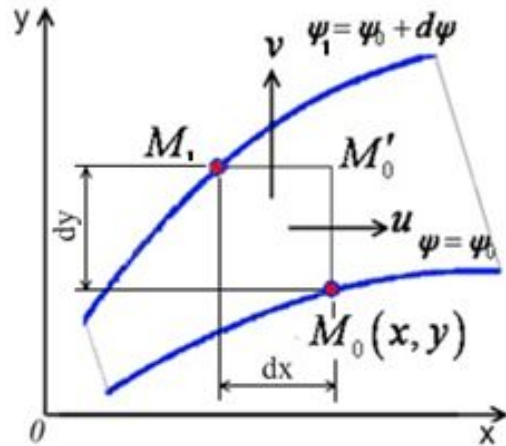


Рисунок 5.2 – К гидродинамическому смыслу функции тока

Вычислим секундный расход жидкости между двумя линиями тока

$$dQ = u dy - v dx = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi \quad (5.18)$$

$$Q = \int_{M_0}^{M_1} dQ = \int_{M_0}^{M_1} d\psi = \psi_1 - \psi_0 \quad (5.19)$$

Следовательно, разность значений функций тока в двух каких-нибудь точках потока равна *секундному объёмному расходу* жидкости сквозь сечение трубки тока, ограниченной линиями тока, проходящими через выбранные точки.

Уравнение Лапласа для функции тока

Воспользуемся условием безвихревого 2D течения

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad [(4.24)]$$

Функция тока определяется формулами

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad [(5.16)]$$

Подстановка (5.16) в (4.24) даёт

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \Delta \psi = 0 \quad (5.17)$$

Уравнение $\Delta \psi = 0$ - уравнение Лапласа для функции тока

Краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta \psi = 0$$

[(5.18)]

Граничные условия

$$\psi|_{x=-\infty} = Q(y), \quad \psi|_{x=+\infty} = Q(y), \quad \psi|_S = 0. \quad (5.19)$$

Последнее условие на поверхности тела называется условием *непротекания*.

Наложение потенциальных потоков

Пусть имеется n потенциальных течений с потенциалами скоростей

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z^2} = 0 \quad (1 \leq k \leq n) \quad (5.20)$$

Суммирование уравнений Лапласа (8.1) даёт

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{k=1}^n \varphi_k + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sum_{k=1}^n \varphi_k + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sum_{k=1}^n \varphi_k = 0 \quad (5.21)$$

Обозначение $\varphi = \sum_{k=1}^n \varphi_k$ приводит к уравнению Лапласа $\Delta \varphi = 0$

Любой потенциальный поток НИЖ можно представить как результат наложения друг на друга более простых потенциальных течений.

$$\vec{V} = \text{grad } \varphi = \text{grad} \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \right) = \sum_{k=1}^n (\text{grad } \varphi_k) = \sum_{k=1}^n \vec{V}_k \quad (5.22)$$

Условия Коши-Римана. Ортогональность линий

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad - \text{условия С-Р} \quad (5.24)$$

$$\mathit{grad} \varphi \cdot \mathit{grad} \psi \equiv 0 \quad - \text{ортогональность линий} \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \cdot (-v) + v \cdot u \equiv 0$$

Комплексный потенциал

Согласно теореме Римана условия Коши-Римана являются условиями существования аналитической функции

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad z = x + iy \quad i = \sqrt{-1} \quad (5.26)$$

Функция $w(z)$ называется комплексным потенциалом

$$\varphi(x, y) = \operatorname{Re}[w(z)], \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im}[w(z)]$$

$$\varphi(x, y) = C \quad - \text{эквипотенциали} \quad \psi(x, y) = C' \quad - \text{линии тока} \quad (5.27)$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dx} = \frac{d(\varphi + i\psi)}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv, \quad (5.28)$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d(iy)} = -\frac{id(\varphi + i\psi)}{dy} = \frac{d(\psi - i\varphi)}{dy} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = u - iv$$

$$u = \operatorname{Re}\left(\frac{dw}{dz}\right); \quad v = -\operatorname{Im}\left(\frac{dw}{dz}\right). \quad (5.29)$$

Сопряжённая комплексная скорость

$$V = u + iv = |V|(\cos \theta + i \sin \theta) = |V|e^{i\theta} - \text{комплексная скорость}$$

$$\bar{V} = u - iv = |V|(\cos \theta - i \sin \theta) = |V|e^{-i\theta} - \text{сопряжённая комплексная скорость}$$

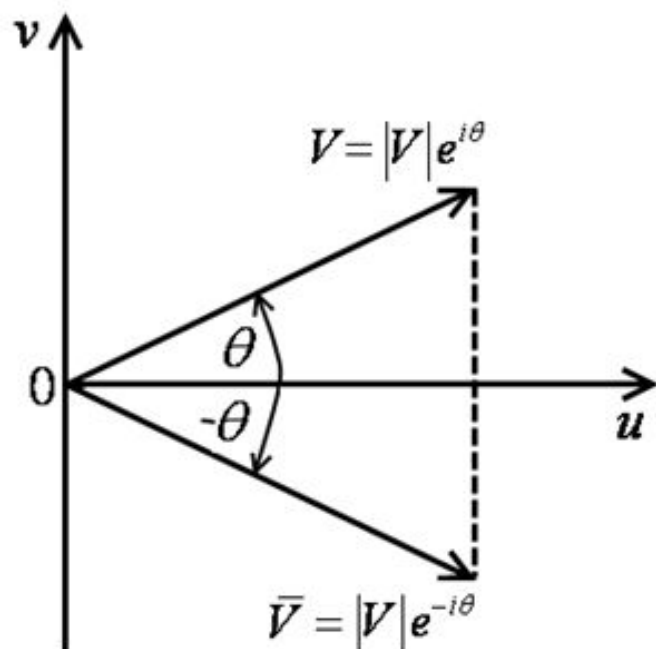


Рисунок 5.3 – Годограф скорости

$$\bar{V} = u - iv = \frac{dw}{dz} \quad (5.30)$$

$$|V| = |\bar{V}| = \left| \frac{dw}{dz} \right| \quad (5.31)$$

Плоскость xOy называют физической плоскостью или плоскостью течения. Совокупность значений комплексной скорости V образует плоскость годографа скорости, или просто плоскость годографа.

$$\operatorname{Re}\left(\oint \bar{V} dz\right) = \oint (u dx + v dy) = \oint d\varphi = \Gamma, \quad (5.32)$$

$$\operatorname{Im}\left(\oint \bar{V} dz\right) = \oint (u dy - v dx) = \oint d\psi = Q.$$