Διδακτική Ενότητα Α: Συνδυαστική Ανάλυση

Ποσοτικές Μέθοδοι στην Οικονομία και Διοίκηση Ι

Εμμανουήλ Ζαχαριάδης
Επίκουρος Καθηγητής ΟΠΑ
email: ezach@aueb.gr

Ακαδημαϊκό Έτος 2018-2019

Εκτέλεση ενός Πειράματος Τύχης

- Εκτέλεση ενός Πειράματος
- Πολλαπλά Δυνατά Αποτελέσματα (Εκβάσεις) του Πειράματος

<u>Παραδείγματα:</u>

Ρίψη ζαριού: Σύνολο Αποτελεσμάτων $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ρίψη νομίσματος: $\{\mathrm{K}, \Gamma\}$

Επιλογή μιας τυχαίας κάρτας από ένα σύνολο τεσσάρων καρτών: $\{\mathrm{K}1, \mathrm{K}2, \mathrm{K}3, \mathrm{K}4\}$

Εκτέλεση ενός Πειράματος

Πλήθος Αποτελεσμάτων:

- Χρήσιμο μέγεθος στην επίλυση προβλημάτων πιθανοτήτων
- Δεν είναι πάντα εύκολα προσδιορίσιμο (όπως στα προηγούμενα παραδείγματα)

Συνδυαστική Ανάλυση

Μαθηματική θεωρία της μέτρησης

Βασική Αρχή Μέτρησης

- Εκτέλεση **δύο** πειράματων: $\Pi 1$ και $\Pi 2$

  Αν το $\Pi 1$ έχει n δυνατά αποτελέσματα και

  για κάθε δυνατό αποτέλεσμα του $\Pi 1$, μπορούμε να λάβουμε m δυνατά αποτελέσματα για το $\Pi 2$,

  τότε υπάρχουν $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}$ δυνατά αποτελέσματα και για τα δύο πειράματα .

Βασική Αρχή Μέτρησης

- ***Παράδειγμα 1.***

Π1: Ρίψη Ζαριού & Π2: Στρίψιμο Κέρματος

Βασική Αρχή Μέτρησης

- *Παράδειγμα 1 (συνέχεια).*

$\Pi 1$: Ρίψη Ζαριού & $\Pi 2$: Ρίψη Κέρματος

– Δυνατά Αποτελέσματα του $\Pi 1$: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Δυνατά Αποτελέσματα του $\Pi 2$: $\{K, \Gamma\}$

– Για κάθε αποτελέσματα του $\Pi 1$, μπορούμε να έχουμε οποιοδήποτε απο τα δυνατά αποτελέσματα του $\Pi 2$ δηλαδή οποιοδήποτε από $\{K, \Gamma\}$

– Συνολικά Αποτελέσματα των δύο Πειραμάτων

(σύνθετου πειράματος Π που συναποτελείται από $\Pi 1$ και $\Pi 2$):

$$\{(1, \mathrm{K}), (2, \mathrm{K}), (3, \mathrm{K}), (4, \mathrm{K}), (5, \mathrm{K}), (6, \mathrm{K}),$$
$$(1, \Gamma), (2, \Gamma), (3, \Gamma), (4, \Gamma), (5, \Gamma), (6, \Gamma)\}$$

→ 12 Αποτελέσματα

Βασική Αρχή Μέτρησης

<u>*Παράδειγμα 2.*</u>

- Π1: Άτομο 1 επιλέγει μεταξύ των {Κούπα, Καρώ, Σπαθί, Μπαστούνι}
- Π2: Άτομο 2 επιλέγει μεταξύ των {A, 2, 3, .., 10, B, N, P}

Βασική Αρχή Μέτρησης

Παράδειγμα 2 (συνέχεια).

- Π1: Άτομο 1 επιλέγει μεταξύ των

  {Κούπα, Καρώ, Σπαθί, Μπαστούνι} → 4 Αποτελέσματα
- Π2: Άτομο 2 επιλέγει μεταξύ των

  $\{A, 2, 3, .., 10, B, N, P\}$ → 13 αποτελέσματα
  - Για κάθε αποτέλεσμα του Π1 μπορούμε να έχουμε οποιοδήποτε απο τα δυνατά αποτελέσματα του Π2
  - Συνολικό πλήθος Αποτελεσμάτων των δύο Πειραμάτων (σύνθετο πείραμα Π3 που συναποτελείται από Π1 και Π2): 52 Αποτελέσματα
  - Άτομα 1 & 2 συναποφασίζουν ένα από τα 52 φύλλα της τράπουλας

Γενικευμένη Αρχή Μέτρησης

- Εκτέλεση $\boldsymbol{r}$ πειραμάτων: $\Pi 1, \Pi 2, \ldots, \Pi r$

  Αν για κάθε ένα από τα n_1 αποτέλεσματα του $\Pi 1$

  υπάρχουν n_2 αποτελέσματα του $\Pi 2$ και

  αν για κάθε ένα από τα δυνατά αποτελέσματα των $\Pi 1$ και $\Pi 2$ υπάρχουν n_3 αποτελέσματα του $\Pi 3$, κοκ.

  τότε υπάρχουν συνολικά $\boldsymbol{n_1} \times \boldsymbol{n_2} \times \ldots \boldsymbol{n_r}$ δυνατά αποτελέσματα για τα r πειράματα

Γενικευμένη Αρχή Μέτρησης

<u>Παράδειγμα 1.</u>

- Π1: Επιλογή Χρώματος Αυτοκινήτου $\{K, \Lambda, M\}$
- Π2: Επιλογή Κυβισμού Αυτοκινήτου $\{1000, 1200, 1400, 1800\}$
- Π3: Επιλογή Εξοπλισμού Αυτοκινήτου

  {Βασικός, Πλούσιος}

- Πόσες είναι οι συνολικές Διαμορφώσεις (Επιλογές) ενός πελάτη;

Γενικευμένη Αρχή Μέτρησης

Παράδειγμα 1 (συνέχεια).

- Π1: Επιλογή Χρώματος Αυτοκινήτου $\{K, \Lambda, M\}$
- Π2: Επιλογή Κυβισμού Αυτοκινήτου $\{1000, 1200, 1400, 1800\}$
- Π3: Επιλογή Εξοπλισμού Αυτοκινήτου {Βασικός, Πλούσιος}

  – Συνολικές Διαμορφώσεις (Επιλογές) ενός πελάτη:
  $$3 \times 4 \times 2 = 24$$

Γενικευμένη Αρχή Μέτρησης

Τροποποίηση παραδείγματος 1:

Δεν παράγεται κανένα αυτοκίνητο με 1000 κυβικά και πλούσιο εξοπλισμό.

Πόσες είναι τώρα οι δυνατές επιλογές;

Γενικευμένη Αρχή Μέτρησης

- *Τροποποίηση παραδείγματος 1 (συνέχεια):*

Δεν παράγεται κανένα αυτοκίνητο με 1000 κυβικά και πλούσιο εξοπλισμό.

Πόσες είναι τώρα οι δυνατές επιλογές;

- Μπορούμε να εντοπίσουμε πόσες επιλογές εμπλέκουν 1000 κυβικά και πλούσιο εξοπλισμό;
- 1 Αποτέλεσμα του $\Pi 3$ & 1 Αποτέλεσμα του $\Pi 2$ & 3 Αποτελέσματα του Π1: 3 διαμορφώσεις
- Τροποποιημένες Επιλογές: $24 - 3 = 21$.

Γενικευμένη Αρχή Μέτρησης

- *Παράδειγμα 2.*

Πινακίδες Αυτοκινήτων: 3 γράμματα και 4 αριθμοί

Πόσες είναι οι συνολικές διαφορετικές πινακίδες που μπορεί να τυπωθούν;

Γενικευμένη Αρχή Μέτρησης

Παράδειγμα 2 (συνέχεια).

Πινακίδες Αυτοκινήτων: 3 γράμματα και 4 αριθμοί

Πόσες είναι οι συνολικές διαφορετικές πινακίδες που μπορεί να τυπωθούν;

- Π1: Επιλογή 1ου γράμματος (24 επιλογές)
- Π2: Επιλογή 2ου γράμματος (24 επιλογές)
- Π3: Επιλογή 3ου γράμματος (24 επιλογές)
- Π4: Επιλογή 1ου αριθμού (10 επιλογές)
- Π5: Επιλογή 2ου αριθμού (10 επιλογές)
- Π6: Επιλογή 3ου αριθμού (10 επιλογές)
- Π7: Επιλογή 4ου αριθμού (10 επιλογές)
- Συνολικές Πινακίδες:

$$24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 24^3 \cdot 10^4$$

Γενικευμένη Αρχή Μέτρησης

<u>Τροποποίηση Παραδείγματος 2.</u>

Πόσες είναι οι συνολικές διαφορετικές πινακίδες που μπορεί να τυπωθούν αν οι αριθμοί και τα γράμματα δε μπορουν να χρησιμοποιηθουν πάνω από μία φορα;

Γενικευμένη Αρχή Μέτρησης

- *Τροποποίηση Παραδείγματος 2 (συνέχεια).*

Πόσες είναι οι συνολικές διαφορετικές πινακίδες που μπορεί να τυπωθούν αν οι αριθμοί και τα γράμματα δε μπορουν να χρησιμοποιηθουν πάνω από μία φορα;

- Π1: Επιλογή 1^{ου} γράμματος (24 επιλογές)
- Π2: Επιλογή 2^{ου} γράμματος (23 επιλογές)
- Π3: Επιλογή 3^{ου} γράμματος (22 επιλογές)
- Π4: Επιλογή 1^{ου} αριθμού (10 επιλογές)
- Π5: Επιλογή 2^{ου} αριθμού (9 επιλογές)
- Π6: Επιλογή 3^{ου} αριθμού (8 επιλογές)
- Π7: Επιλογή 4^{ου} αριθμού (7 επιλογές)
- Συνολικές Πινακίδες:

$$24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$

Μεταθέσεις

- Πόσες είναι οι διαφορετικές Μεταθέσεις των γραμμάτων Α, Β και Γ;
- Δηλαδή, με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε (να βάλουμε σε μία σειρά) τα γράμματα Α, Β και Γ;

Μεταθέσεις

- Πόσες είναι οι διαφορετικές Μεταθέσεις των γραμμάτων Α, Β και Γ;
- Μικρή Κλίμακα! → Εύκολη Απαρίθμηση:
  - ΑΒΓ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ, ΓΒΑ: 6 Μεταθέσεις
- Μεγάλη Κλίμακα: Η απαρίθμηση γίνεται αδύνατη!!!
- Χρήση της **γενικευμένης αρχής απαρίθμησης**

Μεταθέσεις

- Έστω οτι έχουμε n αντικείμενα και πρέπει να προσδιορίσουμε το πληθος των δυνατών τους διατάξεων.

Θεωρούμε n πειράματα Π1, Π2, ..., Πn

– Π1: Επιλογή $1^{ου}$ αντικειμένου στη μετάθεση

– Π2: Επιλογή $2^{ου}$ αντικειμένου στη μετάθεση

– ...

– Πn: Επιλογή του n-στου αντικειμένου στη μετάθεση

Μεταθέσεις

- – Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για το Π1;
  → n
  – Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για το Π2;
  → $n-1$
  – ...
  – Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για το Πn;
  → 1

  Επομένως το σύνθετο πείραμα Π που αφορά στη μετάθεση των n αντικειμένων έχει:

  Πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων για το Π =

$$\boldsymbol{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 1 \ = \ n!}$$

Μεταθέσεις

- Επαλήθευση για τις μεταθέσεις των Α, Β, Γ
  - $n = 3$
  - Πλήθος Μεταθέσεων = $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Μεταθέσεις

- *Παράδειγμα 1.*

Κούρσα 8 δρομέων

Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για αυτή την κούρσα (με δεδομένο οτι τερματίζουν όλοι);

Μεταθέσεις

- *Παράδειγμα 1 (συνέχεια).*

Κούρσα 8 δρομέων

Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για αυτή την κούρσα (με δεδομένο οτι τερματίζουν όλοι);

  – Όλες οι δυνατές σειρές τερματισμού, δηλαδή όλες οι δυνατές Μεταθέσεις των 8 δρομέων
  – $n! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40.320$

Μεταθέσεις

Παράδειγμα 2.

Μία ομάδα 10 ανθρώπων αποτελείται από 7 γυναίκες και 3 άνδρες

Πρόκειται να φτιαχτεί μία λίστα με την ηλικία τους σε αύξουσα σειρά (δεν υπάρχουν δίδυμοι!!!)

i. Πόσες οι δυνατές λίστες που μπορουν να φτιαχτούν αν η λίστα περιέχει όλα τα άτομα;

ii. Πόσες οι δυνατές συνολικές λίστες που μπορούν να κατασκευαστούν αν δημιουργηθούν διαφορετικές λίστες για τις γυναίκες και τους άνδρες;

Μεταθέσεις

- *Παράδειγμα 2 (συνέχεια).*

Απ. i: Όλες οι δυνατές Μεταθέσεις των 10 ατόμων

$10! = 3{,}628{,}800$

Απ. ii: Εφόσον θα κατασκευαστούν ξεχωριστές λίστες, οι δυνατές λίστες με τις γυναίκες είναι $7! = 5.040$, και για τους άντρες είναι $3! = 6$,

Επομένως οι συνολικές διαφορετικές κατατάξεις θα είναι

$7! \cdot 3! = 30{,}240$

Διατάξεις

- Πολλές φορές ενδιαφερόμαστε για τις δυνατές τοποθετήσεις ενός υποσυνόλου k αντικειμένων από συνολικά n αντικείμενα.
- Αυτές καλούνται *διατάξεις* n ανά k
- Ο όρος *διάταξη* είναι ευρύτερος, οι *μεταθέσεις* n αντικειμένων μπορούν να ονομαστούν και διατάξεις n ανα n

Θεωρούμε k πειράματα Π1, Π2, ..., Πk

- Π1: Επιλογή 1ου αντικειμένου στη διάταξη
- Π2: Επιλογή 2ου αντικειμένου στη διάταξη
- ...
- Πk: Επιλογή του k-στου αντικειμένου στη διάταξη

Διατάξεις

- Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για το Π1; $\rightarrow n$
- Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για το Π2; $\rightarrow n-1$
- Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για το Π3; $\rightarrow n-2$
- …
- Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για το Πk; $\rightarrow$ $n-(k-1)=n-k+1$

- Επομένως το σύνθετο πείραμα ΠΔ που αφορά στη διάταξη των n αντικειμένων έχει:

Πλήθος Δυνατών αποτελεσμάτων για το ΠΔ =

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1\,) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-k) \cdot (n-k+1) \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Διατάξεις

Παράδειγμα 1.

Κούρσα 8 δρομέων

Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για τη σειρά τερματισμού των τριών πρώτων;

Διατάξεις

- *Παράδειγμα 1 (συνέχεια).*

Κούρσα 8 δρομέων

Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για τη σειρά τερματισμού των τριών πρώτων;

- Επιλογές 1^{ου}: 8
- Επιλογές 2^{ου}: 7
- Επιλογές 3^{ου}: 6

Συνολικές Μεταθέσεις:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 336$$

Διατάξεις

- *Παράδειγμα 2.*

Δοχείο περιέχει 5 μπλε και 4 κόκκινες *αριθμημένες* σφαίρες

Εξάγουμε διαδοχικά όλες τις σφαίρες

Πόσες οι συνολικές Μεταθέσεις *όλων των σφαιρών* που έχουν στις τρεις πρώτες θέσεις τους μπλε σφαίρες;

Διατάξεις

Παράδειγμα 2 (συνέχεια).

- Μπορούμε να δουμε ξεχωριστά τις δυνατές Μεταθέσεις των πρώτων 3 και των επόμενων 6 σφαιρών.
- Δυνατές Μεταθέσεις των τριών πρώτων:

  Οι 3 πρώτες σφαίρες πρέπει να είναι μπλε.

  Επομένως, μπορούμε να έχουμε $\frac{5!}{(5-3)!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = \mathbf{60}$ Διατάξεις

- Για τις επόμενες 6 μπάλες (2 μπλε και 4 κόκκινες) οι συνολικές Μεταθέσεις είναι: $\mathbf{6}!$
- Επομένως, οι συνολικές Μεταθέσεις είναι:

$$\mathbf{60} \cdot \mathbf{6}! = \mathbf{43.200} \text{ Μεταθέσεις}$$

Διατάξεις

- *Παράδειγμα 3.*

Πόσες διαφορετικές λέξεις μπορώ να τυπώσω με τα γράμματα N, A, A, N;

Διατάξεις

- *Παράδειγμα 3 (συνέχεια).*

Πόσες διαφορετικές λέξεις μπορώ να τυπώσω με τα γράμματα N, A, A, N;

- Αρχικά, μπορούμε να σκεφτούμε πως μπορούμε να τυπώσουμε όσες λέξεις είναι οι δυνατές Μεταθέσεις των 4 γραμμάτων
- Έχουμε επανάληψη κάποιων λέξεων;

  A2, N1, N4, A3: ANNA

  A3, N1, N4, A2: ANNA
- Πόσες είναι αυτές οι επαναλήψεις;
- Για κάθε μία από τις $n!$ μεταθέσεις μπορούμε να αντιμεταθέσουμε όλα τα όμοια στοιχεία χωρις να αλλάξει η λέξη

Διατάξεις

- *Παράδειγμα 3 (συνέχεια).*

Π.χ. ΑΝΝΑ

– Επιλογές: Όλες οι Μεταθέσεις των Α1 και Α2, Όλες οι Μεταθέσεις των Ν1 και Ν2: $2! \cdot 2! = 4$.

– Επομένως στο σύνολο των $n!$ μεταθέσεων κάθε λέξη εμφανίζεται 4 $(= 2! \cdot 2!)$ φορές.

– Επομένως ο συνολικός αριθμός λέξεων είναι

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4!}{4} = 3! = 6$$

Διατάξεις

<u>Παράδειγμα 4.</u>

i) Πόσες λέξεις μπορούμε να σχηματίσουμε με τα γράμματα της λέξης PARALLEL;

ii) Πόσες από αυτές τις λέξεις έχουν το γράμμα R αριστερά από το γράμμα P;

iii) Σε πόσες λέξεις εμφανίζεται η ακολουθία “PR”?

iv) Σε πόσες λέξεις τα γράμματα P και R βρίσκονται σε γειτονικές θέσεις

Διατάξεις

- ***Παράδειγμα 4.***

  Απ.i. Έχουμε συνολικά $8!$ Μεταθέσεις των 8 γραμμάτων.

  Στο σύνολο των $8!$ μεταθέσεων επαναλαμβάνονται οι ίδιες λέξεις.

  Για κάθε μετάθεση μπορουμε να αντιμεταθέσουμε τα 3 L και τα 2 A, χωρίς να μεταβληθεί η σχηματιζόμενη λέξη.

  Επομένως, στο σύνολο των $8!$ Μεταθέσεων κάθε λέξη εμφανίζεται $3! \cdot 2!$ φορές.

  Άρα, ο συνολικός αριθμός λέξεων είναι

$$\frac{8!}{3! \cdot 2!} = 3360$$

Διατάξεις

- *Παράδειγμα 4 (συνέχεια).*

  Απ.ii. Από τις 3360 λέξεις, είναι προφανές πως στις μισές θα εμφανίζεται το P πριν το R και στις άλλες μισές το P θα έπεται του R.

  Επομένως, ο συνολικός αριθμός λέξεων με το P αριστερά του R είναι

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2} = 1680$$

Διατάξεις

- ***Παράδειγμα 4 (συνέχεια).***

  Απ.iii. Μπορούμε να προσεγγίσουμε το ερώτημα ως εξής: Θεωρούμε πως το “PR” είναι ένα γράμμα. Έτσι τα συνολικά μας γράμματα είναι πλέον 7 με 2 A και 3 L. Επομένως, οι συνολικές λέξεις που περιέχουν την ακολουθία “PR” είναι:

$$\frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$$

Διατάξεις

- *Παράδειγμα 4 (συνέχεια).*

Απ.iv. Μπορούμε να προσεγγίσουμε το ερώτημα ως εξής: Εξαιρώντας τα P και R, τα συνολικά μας γράμματα είναι πλέον 6 με 2 A και 3 L. Επομένως, οι συνολικές λέξεις που μπορούν να σχηματισθούν είναι:

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$$

Πλέον υπάρχουν 7 διαθέσιμες θέσεις για τα γράμματα P και R και δύο επιλογές για τη σειρά τους (PR ή RP). Επομένως, οι συνολικές λέξεις με P και R σε γειτονικές θέσεις είναι:

$$60 \cdot 7 \cdot 2 = 840$$

Διατάξεις

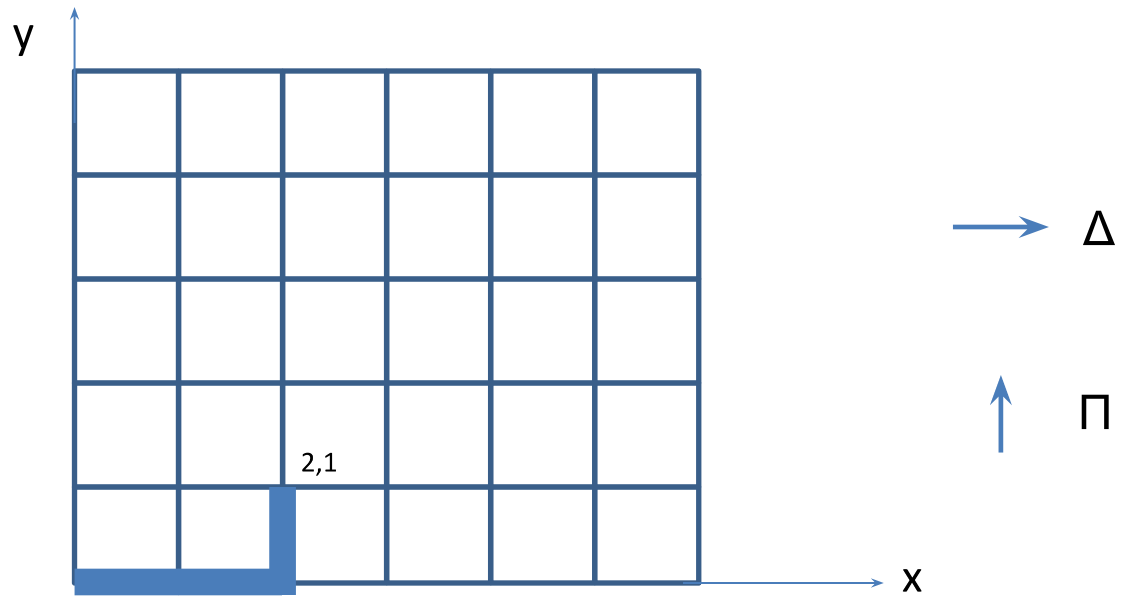
<u>Παράδειγμα 5.</u>

- Έχουμε ένα ρομποτάκι που μπορεί να κάνει δύο ειδών βήματα:
  1. Βήμα Πάνω καλύπτωντας μία μονάδα μήκους (άξονας y)
  2. Βήμα Δεξιά καλύπτοντας μία μονάδα μήκους (άξονας x)

i) Πόσα διαφορετικά μονοπάτια στο επίπεδο των δύο διαστάσεων μπορεί να έχει καλύψει μετά από 8 βήματα;

ii) Πόσα διαφορετικά μονοπάτια μπορούν να το οδηγήσουν στο σημείο $(x, y) = (5, 3)$;

Διατάξεις



- Κάθε μονοπάτι που έχει διανυθεί μετά από n βήματα μπορεί να συμβολιστεί με μία λέξη n γραμμάτων κάθε ένα από τα οποία είναι Δ ή Π
- Π.χ. ΔΔΠ μας οδηγεί στο σημείο (2, 1)

Διατάξεις

<u>*Παράδειγμα 5.*</u>

Απ.i. Τα συνολικά μονοπάτια είναι όλες οι δυνατές λέξεις που μπορούν να σχηματιστούν με 8 επιλογές μεταξύ των Δ και Π:

$$2^8 = 256 \text{ διαφορετικά μονοπάτια}$$

Απ.ii. Για να κατάλήξουμε στο σημείο $(5, 3)$ πρέπει να έχουν συμβεί τα εξής:

Πρέπει να έχουμε κάνει 8 βήματα, με τα 3 από αυτά να είναι Π και τα 5 από αυτά να είναι Δ.

Επόμένως, ο αριθμός των μονοπατιών μπορεί πλέον να εκφραστεί ως οι συνολικές διαφορετικές λέξεις που μπορούν να γραφούν με 3 Π και 5 Δ:

$$\frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56 \text{ διαφορετικά μονοπάτια μας οδηγούν στο}$$

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 1.

- Επιλογή τριών γραμμάτων από τα Α, Β, Γ, Δ, Ε
- Ποιο είναι το πλήθος των δυνατών συνδυασμών 3 από τα παραπάνω 5 γράμματα

Σημείωση: Μας είναι αδιάφορη η σειρά εμφάνισης των τριών επιλεγμένων γραμμάτων

Συνδυασμοί

- Πολλές φορές μας ενδιαφέρει η επιλογή κάποιων αντικειμένων από ένα ευρύτερο σύνολο που τα περιέχει, αδιαφορώντας για τη θέση επιλογής τους.
- Κάθε επιλογή ενός υποσυνόλου k στοιχείων από ένα σύνολο n στοιχείων καλείται συνδυασμός n ανά k

Συνδυασμοί

- *Παράδειγμα 1 (συνέχεια).*

Επιλογή τριών γραμμάτων από τα Α, Β, Γ, Δ, Ε

Ποιο είναι το πλήθος των δυνατών συνδυασμών 3 από τα παραπάνω 5 γράμματα;

  - Χρήση του πλήθους των διατάξεων
  - Επιλογη 1: 5 δυνατές επιλογές,
  - Επιλογή 2: 4 δυνατές επιλογές,
  - Επιλογή 3: 3 δυνατές επιλογές

Συνδυασμοί

- *Παράδειγμα 1 (συνέχεια).*
  - Επομένως υπάρχουν $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ δυνατές επιλογές, οι οποίες όμως αντιστοιχούν σε ισάριθμες Διατάξεις
  - Μέσα σε αυτές τις 60 δυνατές επιλογές υπάρχουν π.χ. οι 3άδες (Α, Β, Γ), (Γ, Α, Β), ..., οι οποίες αντιστοιχούν στον ίδιο συνδυασμό γραμμάτων.
  - Για το συνδυασμό γραμμάτων Α, Β, Γ υπάρχουν 3! Μεταθέσεις.
  - Δηλαδή στον πληθυσμό των διατάξεων, κάθε τριάδα γραμμάτων επαναλαμβάνεται 3! φορές
  - Επομένως, για να οδηγηθουμε από το πλήθος των 60 δυνατών διατάξεων, στο πλήθος δυνατών επιλογών πρέπει να διαιρέσουμε με 3!
  - Δηλαδή, υπάρχουν $\frac{60}{3!} = 10$ δυνατοί συνδυασμοι

Συνδυασμοί

- Ορισμός Πλήθους Συνδυασμών
  - Ορίζουμε το πλήθος των δυνατών συνδυασμών n ανα k με $(k \le n)$:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!\,\boldsymbol{k}!}$$

  - Περιγράφει το σύνολο των δυνατών ομάδων αντικειμένων μεγέθους r που μπορούν να επιλεγούν από ένα σύνολο n αντικειμένων.

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 2.

Από μία τάξη 50 φοιτητών θα επιλεγούν 3 άτομα ως εκπρόσωποι της τάξης.

Ποιο είναι το πλήθος των δυνατών τριμελών επιτροπών;

Συνδυασμοί

- *Παράδειγμα 2 (συνέχεια).*

Από μία τάξη 50 φοιτητών θα επιλεγούν 3 άτομα ως εκπρόσωποι της τάξης.

Ποιο είναι το πλήθος των δυνατών τριμελών επιτροπών;

- Ζητούνται οι δυνατοί συνδυασμοί n ανά k, με $n = 50$ και $k = 3$
- Επομένως,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{50!}{47!3!} = 39200$$

Συνδυασμοί

- *Παράδειγμα 3.*

Πρέπει να οριστούν ομάδες τριών ατόμων από ένα σύνολο 10 εργαζομένων για τις νυχτερινές βάρδιες.

i. Πόσες δυνατές ομάδες μπορούν να οριστούν;

ii. Αν δύο άτομα είναι τσακωμένα και δεν πρέπει να βρισκονται ποτέ στο ίδιο γκρουπ, πόσες είναι οι δυνατές ομάδες;

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 3 (συνέχεια).

Πρέπει να οριστούν ομάδες τριών ατόμων από ένα σύνολο 10 εργαζομένων για τις νυχτερινές βάρδιες.

i. Πόσες δυνατές ομάδες μπορούν να οριστούν;

ii. Αν δύο άτομα είναι τσακωμένα και δεν πρέπει να βρισκονται ποτέ στο ίδιο γκρουπ, πόσες είναι οι δυνατές ομάδες;

Απ. i.: Με άμεση εφαρμογή του τύπου

$$\binom{n}{k} = \frac{10!}{(10-3)!\,3!} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120$$

Συνδυασμοί

- ***Παράδειγμα 3 (συνέχεια).***

  Απ. ii:

  - Πόσες ομάδες περιέχουν τα δύο τσακωμένα άτομα;

  $$\binom{2}{2} \times \binom{8}{1} = 8$$

  - Επομένως από τις 120 ομάδες πρέπει να αφαιρέσουμε τις 8
  - Συνολικά $120 - 8 = 112$ ομάδες

Συνδυασμοί

- *Παράδειγμα 3 (συνέχεια).*

  Εναλλακτική προσέγγιση Απ. ii:

  – Για να κατασκευάσουμε τα γκρουπ πρώτα θα επιλέγουμε έναν από τους δύο τσακωμένους και μετά δύο από τους υπόλοιπους 8.

  – Θα προσθέσουμε και όλα τα γκρουπ που δεν τους περιέχουν

$$\binom{2}{1} \times \binom{8}{2} + \binom{8}{3} = 2 \times \frac{8!}{6! \times 2!} + \frac{8!}{5! \times 3!} = 112$$

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 4.

Πόσα διαφορετικά φουλ μπορούμε να έχουμε χρησιμοποιώντας μία τράπουλα 52 φύλλων;

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 4 (συνέχεια).

- Ας συμβολίσουμε κάθε τύπο φουλ ως (i, j) με $1 \leq i, j \leq 13$
- Η σειρά των i και j έχει σημασία καθώς το i συμβολίζει τον τύπο του φύλλου με τα 3 φύλλα και j τον τύπο του φύλλου με 2 φύλλα.
- Επομένως, έχουμε $13 \times 12 = 156$ τύπους φουλ
- Για κάθε τύπο φουλ, η πεντάδα μπορεί να σχηματιστεί ως εξής: Από τα 4 φύλλα του τύπου i, επιλέγω 3 και από τα 4 φύλλα του τύπου j επιλέγω 2. Άρα για κάθε τύπο φουλ έχω:

$$\binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = 4 \times 6 = 24 \text{ δυνατές πεντάδες φύλλων}$$

- Επομένως, οι συνολικές πεντάδες φύλλων που αντιστοιχούν σε φουλ είναι: $156 \times 24 = 3744$

Συνδυασμοί

<u>Παράδειγμα 5.</u>

Έχουμε ένα ρομποτάκι που μπορεί να κάνει δύο ειδών βήματα:

1. Βήμα Πάνω καλύπτοντας μία μονάδα μήκους (άξονας y)
2. Βήμα Δεξιά καλύπτοντας μία μονάδα μήκους (άξονας x)

i) Πόσα διαφορετικά μονοπάτια στο επίπεδο των δύο διαστάσεων μπορεί να έχει καλύψει μετά από 8 βήματα;

ii) Πόσα διαφορετικά μονοπάτια μπορούν να το οδηγήσουν στο σημείο $(x, y) = (5, 3)$;

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 5 (συνέχεια).

- Έχουμε ήδη ανιμετωπίσει το πρόβλημα με χρήση μεταθέσεων
- Ας το δούμε από τη σκοπιά των συνδυασμών.

Απ.i. Τα συνολικά μονοπάτια είναι όλες οι δυνατές λέξεις που μπορούν να σχηματιστούν με 8 επιλογές μεταξύ των Δ και Π:

$$2^8 = 256 \text{ διαφορετικά μονοπάτια}$$

Συνδυασμοί

<u>*Παράδειγμα 5* (συνέχεια).</u>

Απ.ii. Για να καταλήξουμε στο σημείο (5, 3) πρέπει να έχουν συμβεί τα εξής:

Πρέπει να έχουμε κάνει 8 βήματα, με τα 3 από αυτά να είναι Π και τα 5 από αυτά να είναι Δ.

Επομένως, ο αριθμός των μονοπατιών μπορεί πλέον να εκφραστεί ως ο αριθμός των λέξεων που μπορούν να γραφούν με 3 Π και 5 Δ:

Θεωρούμε 8 θέσεις αριθμημένες από το 1 ως το 8: _ _ _ _ _ _ _ _

Οι συνολικές λέξεις σχηματίζονται επιλέγοντας 3 από τις 8 θέσεις για τα γράμματα Π ή ισοδύναμα 5 από τις 8 θέσεις για τα γράμματα Δ, επομένως ο αριθμός τους είναι:

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = \frac{8!}{3! \times 5!} = 56 \text{ διαφορετικά μονοπάτια}$$

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 6.

Πόσοι είναι οι συνδυασμοί με τους οποίους μπορούμε να μοιράσουμε

i) μία τράπουλα σε 4 άτομα;

ii) μία τράπουλα σε 4 άτομα, έτσι ώστε καθένα από αυτά να έχει ένα άσσο στην κατοχή του;

Συνδυασμοί

- *Παράδειγμα 6 (συνέχεια).*

Απ.i:

- Μπορούμε να σκεφτούμε τους συνδυασμούς σαν ένα σύνολο τεσσάρων συνόλων. Το πρώτο στοιχείο θα είναι τα 13 φύλλα του παίκτη Α, το 2ο στοιχείο θα είναι τα 13 φύλλα του 2ου παίκτη κ.ο.κ.
- {{1, 2, ..., 13}, {14, 15, ...26}, {27, 28...,39}, {40, 41..., 52}}
- Επόμένως οι δυνατοί τρόποι είναι:

$$\binom{52}{13} \times \binom{39}{13} \times \binom{26}{13} \times \binom{13}{13} =$$

$$\frac{52!}{13!\,39!} \times \frac{39!}{13!\,26!} \times \frac{26!}{13!\,13!} \times \frac{13!}{13!\,0!} = \frac{52!}{(13!)^4}$$

Συνδυασμοί

- *Παράδειγμα 6 (συνέχεια).*
  - Σημείωση: Στους συνολικούς συνδυασμούς λαμβάνουμε υπόψιν την ταυτότητα του παίκτη. Έστω π.χ. {Α, Β, Γ, Δ} ένα από τους συνδυασμούς που μετρήσαμε (Α, Β, Γ, Δ είναι δεκατριάδες φύλλων). Έχουμε επίσης μετρήσει και τον {Α, Β, Δ, Γ}, {Β, Δ, Γ, Α} κ.ο.κ.
  - Τι θα έπρεπε να κάνουμε αν δε μας ενδιέφερε η ταυτότητα των παικτών, αλλά μόνο με πόσους τρόπους μπορεί να μοιραστεί η τραπουλα? ($\div$ $4!$).

Συνδυασμοί

- ***Παράδειγμα 6 (συνέχεια).***

  Απ. ii:

  – Επιλογές 1^{ου} παίκτη:$\binom{4}{1} \times \binom{48}{12}$ (οι επιλογές για τον άσσο κ οι επιλογές για 12 από τα υπόλοιπα φύλλα εξαιρώντας τους άσσους)

  – Επιλογές 2^{ου} παίκτη:$\binom{3}{1} \times \binom{36}{12}$ (οι επιλογές για τον άσσο κ οι επιλογές για 12 από τα υπόλοιπα φύλλα εξαιρώντας τους άσσους)

  – Επιλογές 3^{ου} παίκτη:$\binom{2}{1} \times \binom{24}{12}$ (οι επιλογές για τον άσσο κ οι επιλογές για 12 από τα υπόλοιπα φύλλα εξαιρώντας τους άσσους)

  – Επιλογές 4^{ου} παίκτη:$\binom{1}{1} \times \binom{12}{12}$ (οι επιλογές για τον άσσο κ οι επιλογές για 12 από τα υπόλοιπα φύλλα εξαιρώντας τους άσσους)

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 6 (συνέχεια).

– Επόμένως οι δυνατοί τρόποι είναι:

$$\binom{4}{1}\binom{48}{12} \times \binom{3}{1}\binom{36}{12} \times \binom{2}{1}\binom{24}{12} \times \binom{1}{1}\binom{12}{12} =$$

$$\frac{4!}{1!\,3!}\,\frac{48!}{12!\,36!} \times \frac{3!}{1!\,2!}\,\frac{36!}{12!\,24!} \times \frac{2!}{1!\,1!}\,\frac{24!}{12!\,12!} \times \frac{1!}{1!\,0!}\,\frac{12!}{12!\,0!} =$$

$$4! \times \frac{48!}{12!\,12!\,12!\,12!}$$

– Σημείωση: Και πάλι λαμβάνουμε υπόψιν την ταυτότητα του παίκτη. Λόγω της συμμετρίας των 13άδων (ενας άσσος – 12 άλλα φύλλα), για κάθε τέσσερα σύνολα 13άδων (Α, Β, Γ, Δ) έχουμε μετρήσει όλες τις Μεταθέσεις τους.

Το Διωνυμικό Θεώρημα

- Οι τιμές $\binom{n}{k}$ αναφέρονται ως διωνυμικοί συντελεστές λόγω της σημασίας που έχουν στο διωνυμικό θεώρημα.

Διωνυμικό Θεώρημα:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Το Διωνυμικό Θεώρημα

- Για $n = 2$, (η ιδιαίτερα γνώριμη ταυτότητα…)

$$(x+y)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} x^k y^{2-k} =$$

$$\binom{2}{0} x^0 y^2 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{0} x^2 y^0 = x^2 + 2xy + y^2$$

Το Διωνυμικό Θεώρημα

- Επιστροφή στο παράδειγμα με το ρομποτάκι
- Υπολογίσαμε πως μπορεί να κάνει 2^8 διαφορετικά μονοπάτια
- Ας δούμε τη σχέση του συγκεκριμένου αποτελέσματος με το Διωνυμικό Θεώρημα
- <u>Ερώτηση</u>: Στα 8 βήματα, πόσα είναι τα δυνατά «μείγματα» βημάτων (8Δ, 0Π), (7Δ, 1Π),…, (0Δ, 8Π);
- <u>Απάντηση:</u> Είναι $8 + 1$ όσες οι δυνατές τιμές των συνολικών βημάτων Δ (ή αριστερά)

Το Διωνυμικό Θεώρημα

- Έστω k ο αριθμός των Δεξιών βημάτων
- Το k θα λαμβάνει τιμές από 0 έως $n = 8$
- Πόσα μονοπάτια υπάρχουν με k δεξιά βήματα;
  - Όσοι οι συνδυασμοί θέσεων για την τοποθέτηση των k δεξιών βημάτων
  - Επομένως, έχουμε $\binom{n}{k}$ μονοπάτια
- Άρα τα συνολικά μονοπάτια για όλες τις τιμές του k, είναι

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

Διαμερίσεις

- Πρέπει να χωρίσουμε n αντικείμενα σε k ομάδες
- Το μέγεθος κάθε μίας από τις k ομάδες είναι $n_1, n_2, \ldots, n_k$.
- Πόσες είναι οι συνολικές διαμερίσεις;
- Χρήση της **γενικευμένης βασικής αρχής μέτρησης** και του **πλήθους συνδυασμών**.

Διαμερίσεις

- Καταγραφή των επιλογών για την κατασκευή των ομάδων

  1η Ομάδα: $\binom{n}{n_1}$

  2η Ομάδα: $\binom{n-n_1}{n_2}$

  kη Ομάδα: $\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$

Διαμερίσεις

- Επομένως με χρήση της γενικευμένης βασικής αρχής μέτρησης:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\dots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_k}=$$

$$=\frac{n!}{(n-n_1)!\,n_1!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!\,n_2!}\cdot\dots\cdot\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{0!\,n_k!}=$$

$$=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}$$

Δυνατές Διαμερίσεις: $\boldsymbol{\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}}$

Διαμερίσεις

• *Παράδειγμα 1.*

Μία ομάδα 10 φοιτητών θα χωριστεί σε τρία γκρουπ για τη διοργάνωση ενός Συνεδρίου

1) Μία τριμελής ομάδα θα αναλάβει την προώθηση του Συνεδρίου
2) Μία πενταμελής ομάδα θα αναλάβει την επιστημονική οργάνωση
3) Μία διμελής ομάδα θα αναλάβει την καλή λειτουργεία των εγκαταστάσεων του συνεδριακού χώρου

Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η διαμέριση των φοιτητών σε ομάδες;

Διαμερίσεις

- ***Παράδειγμα 1 (συνέχεια).***
  - Έχουμε $n = 10$, και $n_1 = 3, n_2 = 5, n_3 = 2$
  - Επομένως, οι δυνατές διαμερίσεις είναι

$$\frac{10!}{3! \times 5! \times 2!} = 2.520$$

Διαμερίσεις

- *Παράδειγμα 2.*

Μία ομάδα 10 παιδιών θα χωριστούν σε δύο ομάδες των 5 ατόμων (Κόκκινοι & Πράσινοι) για ένα παιχνίδι μπάσκετ

Με πόσους τρόπους μπορουν να σχηματιστούν αυτές οι δύο ομάδες;

Διαμερίσεις

- *Παράδειγμα 2 (συνέχεια).*
  - Έχουμε $n = 10$, και $n_1 = 5$, $n_2 = 5$
  - Επομένως, οι δυνατές διαμερίσεις είναι

$$\frac{10!}{5! \times 5!} = 252$$

  - Δηλαδή υπάρχουν 252 διαφορετικοί τρόποι για να σχηματιστουν οι ομάδες Πράσινοι και Κόκκινοι

Διαμερίσεις

<u>*Τροποποίηση παραδείγματος 2.*</u>

- Μία ομάδα 10 παιδιών θα χωριστούν σε δύο ομάδες των 5 ατόμων για ένα παιχνίδι μπάσκετ
- Με πόσους τρόπους μπορουν να σχηματιστούν οι συνθέσεις των ομάδων;

Διαμερίσεις

- *Τροποποίηση παραδείγματος 2 (συνέχεια).*

Μία ομάδα 10 παιδιών θα χωριστούν σε δύο ομάδες των 5 ατόμων για ένα παιχνίδι μπάσκετ

Με πόσους τρόπους μπορουν να σχηματιστούν οι συνθέσεις των ομάδων;

- Το πρόβλημα μοιάζει με το προηγούμενο, αλλά δεν είναι ακριβώς το ίδιο: Οι ομάδες δεν έχουν ταυτότητα!
- Πλέον η διαμέριση $\Pi: \{1,2,3,4,5\}$ & $K: \{6,7,8,9,10\}$ δε διαφέρει από τη $K: \{1,2,3,4,5\}$ & $\Pi: \{6,7,8,9,10\}$, καθώς δεν υπάρχει η έννοια των Κ & Π!
- Επομένως, οι δυνατές συνθέσεις των ομάδων που θα παίξουν στο παιχνίδι είναι $252/2 = 126$.

Πλήθος Ακέραιων Θετικών Λύσεων μιας Εξίσωσης

- Έστω η εξίσωση

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_r = n$$

- Ποιό είναι το συνολικό πλήθος των <u>*θετικών*</u> ακέραιων λύσεων;
- Λύση εδώ ονομάζεται ένα διάνυσμα της μορφής $\boldsymbol{(x_{1,} x_2, \ldots, x_k)}$ **με** $\boldsymbol{x_i > 0, i = 1, \ldots, k}$**.**

<u>*Παράδειγμα 1.*</u>

Για $n = 5$ και $k = 3$ ($x_1 + x_2 + x_3 = 5$):

τα $(3, 1, 1)$, $(2, 2, 1)$, ..., $(1, 3, 1)$ αποτελούν λύσεις

Πλήθος Ακέραιων Θετικών Λύσεων μιας Εξίσωσης

- *Παράδειγμα 1 (συνέχεια).*
  - Πλήθος *θετικών* ακεραίων λύσεων της

    $x_1 + x_2 + x_3 = 5$
  - Θα χρησιμοποιήσουμε μία προσέγγιση γνωστή ως ***“stars and bars”***…

1		**1**		**1**		**1**		**1**
	a		b		c		d	

  - Τοποθετούνται n ($n = 5$) άσσοι σε μία σειρά
  - Ορίζονται $n - 1$ ($n - 1 = 4$) θέσεις αναμεσά τους (*a*, *b*, *c*, *d*)
  - Πρέπει να τοποθετηθούν $k - 1$ $(= 3 - 1 = 2)$ διαχωριστικά σε ένα υποσύνολο των θέσεων αυτών

Πλήθος Ακέραιων Θετικών Λύσεων μιας Εξίσωσης

- *Παράδειγμα 1 (συνέχεια).*
  - Κάθε τοποθέτηση δύο διαχωριστικών σε δύο από τις θέσεις $\{a, b, c, d\}$ ορίζουν μία λύση

1	**|**	**1**		**1**		**1**	**|**	**1**
	a		b		c		**d**	
1	**,**	1	**+**	1	**+**	1	**,**	1

  - Στις επιλεγμένες θέσεις διαχωρίζουμε τους άσσους με ένα κόμμα, ενώ στις μη επιλεγμένες εισάγουμε το (+)
  - Στο παράδειγμα μας, η επιλογή των θέσεων a και d ορίζει τη λύση $(x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 1)$ ή $(1,3,1)$

Πλήθος Ακέραιων Θετικών Λύσεων μιας Εξίσωσης

- Επομένως το συνολικό πλήθος τως λύσεων στη γενική περίπτωση, είναι όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των $(n-1)$ θέσεων για τα $(k-1)$ διαχωριστικά!

Συνολικές λύσεις (διανύσματα)

$$\boldsymbol{\binom{n-1}{k-1}}$$

Πλήθος Ακέραιων Μη-Αρνητικών Λύσεων μιας Εξίσωσης

- Έστω η εξίσωση

  $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$

- Ποιό ειναι το συνολικό πλήθος των μη-αρνητικών ακέραιων λύσεων;
- Λύση εδώ ονομάζεται ένα διάνυσμα της μορφής $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ με $x_i \geq 0, i = 1, \ldots, k$.

<u>*Παράδειγμα 1.*</u>

- Για $n = 5$ και $k = 3$ ($x_1 + x_2 + x_3 = 5$):

  τα $(3, 2, 0)$, $(0, 0, 5)$, ..., $(1, 3, 1)$ αποτελούν λύσεις

Πλήθος Ακέραιων Μη-Αρνητικών Λύσεων μιας Εξίσωσης

- *Παράδειγμα 1 (συνέχεια).*
  - Θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση “stars and bars” τροποποιημένη για την αντιμετώπιση του νέου προβλήματος
  - Τα διαχωριστικά μπορούν πλεόν να τοποθετηθούν σε συνεχόμενες θέσεις ($x_i \geq 0, i = 1, \ldots, k$)
  - Κωδικοποίηση των δυνατών λύσεων, έστω $n = 5$ και $k = 3$
  - Πίνακας με $n + k - 1$ στήλες

1	2	3	4	5	6	7

Πλήθος Ακέραιων Μη-Αρνητικών Λύσεων μιας Εξίσωσης

- *Παράδειγμα 1 (συνέχεια).*
  - Επιλέγω τις θέσεις για τα $k-1$ διαχωριστικά

1	2	3	4	5	6	7
I		I				

  - Οι υπόλοιπες θέσεις αυτόματα γεμίζονται με άσσους (καμία επιλογή με δεδομένες τις θέσεις των διαχωριστικών)

1	2	3	4	5	6	7
I	1	I	1	1	1	1

Πλήθος Ακέραιων Μη-Αρνητικών Λύσεων μιας Εξίσωσης

- *Παράδειγμα 1 (συνέχεια).*
  - Ο Πίνακας που παράγεται

1	2	3	4	5	6	7
l	1	l	1	1	1	1

αντιστοιχεί στη λύση ($x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 4$) ή $(0,1,4)$

  - Ομοίως, ο Πίνακας

1	2	3	4	5	6	7
1	1	l	1	l	1	1

αντιστοιχεί στη λύση ($x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2$) ή $(2,1,2)$

Πλήθος Ακέραιων Μη-Αρνητικών Λύσεων μιας Εξίσωσης

- Επομένως, το συνολικό πλήθος μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

είναι όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των $(n+k-1)$ θέσεων για τα $(k-1)$ διαχωριστικά!

Συνολικό Πλήθος Λύσεων (διανυσμάτων) :

$$\binom{\boldsymbol{n+k-1}}{\boldsymbol{k-1}} = \binom{\boldsymbol{n+k-1}}{\boldsymbol{n}}$$

Συνδυασμοί με Επανάληψη

- Υπάρχουν n ομάδες αντικειμένων (χωρίς περιορισμό στον αριθμό των αντικειμένων)
- Πρέπει να επιλέξω k αντικείμενα από τις n ομάδες
- Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω τα k αντικείμενα;
- Το πλήθος των τρόπων επιλογής των k αντικειμένων είναι ίσο με το πλήθος ακεραίων θετικών λύσεων της $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$

- Σχόλιο: Ακριβώς όπως προσδιορίζαμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

Απλά έχουμε εναλλάξει τους συμβολισμούς n και k

Συνδυασμοί με Επανάληψη

- *Παράδειγμα.*

3 τύποι φρούτων {Μήλα, Αχλάδια, Ακτινίδια}, ($n = 3$)

Σακούλα που χωράει 10 φρουτα ($k = 10$)

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να γεμίσω τη σακούλα;

Συνδυασμοί με Επανάληψη

Παράδειγμα (συνέχεια).

- Έστω x_1 πλήθος μήλων, x_2 πλήθος αχλαδιών, x_3 πλήθος ακτινιδίων
- Κάθε δυνατή διαμόρφωση των περιεχομένων της σακούλας είναι μία τριάδα τιμών (x_1, x_2, x_3) έτσι ώστε $x_1 + x_2 + x_3 = 10$.
- Πρόσοχή! (Ανταλλαγή των ρόλων k και n σε σχέση με το πλήθος ακέραιων ριζών)
- Εδώ n έχουμε ονομάσει τους τύπους (σύμβαση για τους συνδυασμούς με επανάληψη),
- k: Τα συνολικά επιλεγμένα στοιχεία
- Επομένως πρέπει να επιλέξουμε τις θέσεις για τα $n - 1$ διαχωριστικά.

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10} = \frac{12!}{2! \times 10!} = 66$$