



Διδακτική Ενότητα Α: Συνδυαστική Ανάλυση

Ποσοτικές Μέθοδοι στην Οικονομία και Διοίκηση Ι

Εμμανουήλ Ζαχαριάδης

Επίκουρος Καθηγητής ΟΠΑ

email: ezach@aueb.gr

Ακαδημαϊκό Έτος 2018-2019

Εκτέλεση ενός Πειράματος Τύχης

- Εκτέλεση ενός Πειράματος
- Πολλαπλά Δυνατά Αποτελέσματα (Εκβάσεις) του Πειράματος

Παραδείγματα:

Ρίψη ζαριού: Σύνολο Αποτελεσμάτων $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ρίψη νομίσματος: $\{Κ, Γ\}$

Επιλογή μιας τυχαίας κάρτας από ένα σύνολο τεσσάρων καρτών: $\{Κ1, Κ2, Κ3, Κ4\}$

Εκτέλεση ενός Πειράματος

Πλήθος Αποτελεσμάτων:

- Χρήσιμο μέγεθος στην επίλυση προβλημάτων πιθανοτήτων
- Δεν είναι πάντα εύκολα προσδιορίσιμο (όπως στα προηγούμενα παραδείγματα)

Συνδυαστική Ανάλυση

Μαθηματική θεωρία της μέτρησης

Βασική Αρχή Μέτρησης

Εκτέλεση **δύο** πειράματων: Π1 και Π2

Αν το Π1 έχει n δυνατά αποτελέσματα και για κάθε δυνατό αποτέλεσμα του Π1, μπορούμε να λάβουμε m δυνατά αποτελέσματα για το Π2, τότε υπάρχουν $n \times m$ δυνατά αποτελέσματα και για τα δύο πειράματα .

Βασική Αρχή Μέτρησης

Παράδειγμα 1.

Π1: Ρίψη Ζαριού & Π2: Στρίψιμο Κέρματος

Βασική Αρχή Μέτρησης

Παράδειγμα 1 (συνέχεια).

Π1: Ρίψη Ζαριού & Π2: Ρίψη Κέρματος

– Δυνατά Αποτελέσματα του Π1: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Δυνατά Αποτελέσματα του Π2: $\{K, Γ\}$

– Για κάθε αποτελέσματα του Π1, μπορούμε να έχουμε οποιοδήποτε απο τα δυνατά αποτελέσματα του Π2 δηλαδή οποιοδήποτε από $\{K, Γ\}$

– Συνολικά Αποτελέσματα των δύο Πειραμάτων

(σύνθετου πειράματος Π που συναποτελείται από Π1 και Π2):

$\{(1, K), (2, K), (3, K), (4, K), (5, K), (6, K),$
 $(1, Γ), (2, Γ), (3, Γ), (4, Γ), (5, Γ), (6, Γ)\}$

→ 12 Αποτελέσματα

Βασική Αρχή Μέτρησης

Παράδειγμα 2.

- Π1: Άτομο 1 επιλέγει μεταξύ των {Κούπα, Καρώ, Σπαθί, Μπαστούνι}
- Π2: Άτομο 2 επιλέγει μεταξύ των {A, 2, 3, .., 10, B, N, P}

Βασική Αρχή Μέτρησης

Παράδειγμα 2 (συνέχεια).

- Π1: Άτομο 1 επιλέγει μεταξύ των
{Κούπα, Καρώ, Σπαθί, Μπαστούνι} → 4 Αποτελέσματα
- Π2: Άτομο 2 επιλέγει μεταξύ των
{A, 2, 3, ..., 10, B, N, P} → 13 αποτελέσματα
 - Για κάθε αποτέλεσμα του Π1 μπορούμε να έχουμε οποιοδήποτε απο τα δυνατά αποτελέσματα του Π2
 - Συνολικό πλήθος Αποτελεσμάτων των δύο Πειραμάτων (σύνθετο πείραμα Π3 που συναποτελείται από Π1 και Π2):
52 Αποτελέσματα
 - Άτομα 1 & 2 συναποφασίζουν ένα από τα 52 φύλλα της τράπουλας

Γενικευμένη Αρχή Μέτρησης

Εκτέλεση r πειραμάτων: Π1, Π2, ..., Π r

Αν για κάθε ένα από τα n_1 αποτελέσματα του Π1 υπάρχουν n_2 αποτελέσματα του Π2 και αν για κάθε ένα από τα δυνατά αποτελέσματα των Π1 και Π2 υπάρχουν n_3 αποτελέσματα του Π3, κοκ. τότε υπάρχουν συνολικά $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_r$ δυνατά αποτελέσματα για τα r πειράματα

Γενικευμένη Αρχή Μέτρησης

Παράδειγμα 1.

- Π1: Επιλογή Χρώματος Αυτοκινήτου
{ $K, Λ, Μ$ }
- Π2: Επιλογή Κυβισμού Αυτοκινήτου
{1000, 1200, 1400, 1800}
- Π3: Επιλογή Εξοπλισμού Αυτοκινήτου
{Βασικός, Πλούσιος}

- Πόσες είναι οι συνολικές Διαμορφώσεις (Επιλογές) ενός πελάτη;

Γενικευμένη Αρχή Μέτρησης

Παράδειγμα 1 (συνέχεια).

- Π1: Επιλογή Χρώματος Αυτοκινήτου
{ $K, Λ, Μ$ }
- Π2: Επιλογή Κυβισμού Αυτοκινήτου
{1000, 1200, 1400, 1800}
- Π3: Επιλογή Εξοπλισμού Αυτοκινήτου
{Βασικός, Πλούσιος}

– Συνολικές Διαμορφώσεις (Επιλογές) ενός πελάτη:

$$3 \times 4 \times 2 = 24$$

Γενικευμένη Αρχή Μέτρησης

Τροποποίηση παραδείγματος 1:

Δεν παράγεται κανένα αυτοκίνητο με 1000 κυβικά και πλούσιο εξοπλισμό.

Πόσες είναι τώρα οι δυνατές επιλογές;

Γενικευμένη Αρχή Μέτρησης

Τροποποίηση παραδείγματος 1 (συνέχεια):

Δεν παράγεται κανένα αυτοκίνητο με 1000 κυβικά και πλούσιο εξοπλισμό.

Πόσες είναι τώρα οι δυνατές επιλογές;

- Μπορούμε να εντοπίσουμε πόσες επιλογές εμπλέκουν 1000 κυβικά και πλούσιο εξοπλισμό;
- 1 Αποτέλεσμα του Π3 & 1 Αποτέλεσμα του Π2 & 3 Αποτελέσματα του Π1: 3 διαμορφώσεις
- Τροποποιημένες Επιλογές: $24 - 3 = 21$.

Γενικευμένη Αρχή Μέτρησης

Παράδειγμα 2.

Πινακίδες Αυτοκινήτων: 3 γράμματα και 4 αριθμοί

Πόσες είναι οι συνολικές διαφορετικές πινακίδες που μπορεί να τυπωθούν;

Γενικευμένη Αρχή Μέτρησης

Παράδειγμα 2 (συνέχεια).

Πινακίδες Αυτοκινήτων: 3 γράμματα και 4 αριθμοί

Πόσες είναι οι συνολικές διαφορετικές πινακίδες που μπορεί να τυπωθούν;

- Π1: Επιλογή 1^{ου} γράμματος (24 επιλογές)
- Π2: Επιλογή 2^{ου} γράμματος (24 επιλογές)
- Π3: Επιλογή 3^{ου} γράμματος (24 επιλογές)
- Π4: Επιλογή 1^{ου} αριθμού (10 επιλογές)
- Π5: Επιλογή 2^{ου} αριθμού (10 επιλογές)
- Π6: Επιλογή 3^{ου} αριθμού (10 επιλογές)
- Π7: Επιλογή 4^{ου} αριθμού (10 επιλογές)
- Συνολικές Πινακίδες:

$$24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 24^3 \cdot 10^4$$

Γενικευμένη Αρχή Μέτρησης

Τροποποίηση Παραδείγματος 2.

Πόσες είναι οι συνολικές διαφορετικές πινακίδες που μπορεί να τυπωθούν αν οι αριθμοί και τα γράμματα δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν πάνω από μία φορά;

Γενικευμένη Αρχή Μέτρησης

Τροποποίηση Παραδείγματος 2 (συνέχεια).

Πόσες είναι οι συνολικές διαφορετικές πινακίδες που μπορεί να τυπωθούν αν οι αριθμοί και τα γράμματα δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν πάνω από μία φορά;

- Π1: Επιλογή 1^{ου} γράμματος (24 επιλογές)
- Π2: Επιλογή 2^{ου} γράμματος (23 επιλογές)
- Π3: Επιλογή 3^{ου} γράμματος (22 επιλογές)
- Π4: Επιλογή 1^{ου} αριθμού (10 επιλογές)
- Π5: Επιλογή 2^{ου} αριθμού (9 επιλογές)
- Π6: Επιλογή 3^{ου} αριθμού (8 επιλογές)
- Π7: Επιλογή 4^{ου} αριθμού (7 επιλογές)
- Συνολικές Πινακίδες:

$$24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$

Μεταθέσεις

- Πόσες είναι οι διαφορετικές Μεταθέσεις των γραμμάτων A, B και Γ;
- Δηλαδή, με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε (να βάλουμε σε μία σειρά) τα γράμματα A, B και Γ;

Μεταθέσεις

- Πόσες είναι οι διαφορετικές Μεταθέσεις των γραμμάτων Α, Β και Γ;
- Μικρή Κλίμακα! → Εύκολη Απαρίθμηση:
 - ΑΒΓ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ, ΓΒΑ: 6 Μεταθέσεις
- Μεγάλη Κλίμακα: Η απαρίθμηση γίνεται αδύνατη!!!
- Χρήση της **γενικευμένης αρχής απαρίθμησης**

Μεταθέσεις

Έστω ότι έχουμε n αντικείμενα και πρέπει να προσδιορίσουμε το πλήθος των δυνατών τους διατάξεων.

Θεωρούμε n πειράματα $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$

- Π_1 : Επιλογή 1^{ου} αντικειμένου στη μετάθεση
- Π_2 : Επιλογή 2^{ου} αντικειμένου στη μετάθεση
- ...
- Π_n : Επιλογή του n -στου αντικειμένου στη μετάθεση

Μεταθέσεις

- – Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για το Π_1 ;
 $\rightarrow n$
- Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για το Π_2 ;
 $\rightarrow n - 1$
- ...
- Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για το Π_n ;
 $\rightarrow 1$

Επομένως το σύνθετο πείραμα Π που αφορά στη μετάθεση των n αντικειμένων έχει:

Πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων για το $\Pi =$

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

Μεταθέσεις

• Επαλήθευση για τις μεταθέσεις των Α, Β, Γ

– $n = 3$

– Πλήθος Μεταθέσεων = $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Μεταθέσεις

Παράδειγμα 1.

Κούρσα 8 δρομέων

Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για αυτή την κούρσα (με δεδομένο ότι τερματίζουν όλοι);

Μεταθέσεις

Παράδειγμα 1 (συνέχεια).

Κούρσα 8 δρομέων

Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για αυτή την κούρσα (με δεδομένο ότι τερματίζουν όλοι);

- Όλες οι δυνατές σειρές τερματισμού, δηλαδή όλες οι δυνατές Μεταθέσεις των 8 δρομέων
- $n! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40.320$

Μεταθέσεις

Παράδειγμα 2.

Μία ομάδα 10 ανθρώπων αποτελείται από 7 γυναίκες και 3 άνδρες

Πρόκειται να φτιαχτεί μία λίστα με την ηλικία τους σε αύξουσα σειρά (δεν υπάρχουν δίδυμοι!!!)

- i. Πόσες οι δυνατές λίστες που μπορούν να φτιαχτούν αν η λίστα περιέχει όλα τα άτομα;
- ii. Πόσες οι δυνατές συνολικές λίστες που μπορούν να κατασκευαστούν αν δημιουργηθούν διαφορετικές λίστες για τις γυναίκες και τους άνδρες;

Μεταθέσεις

Παράδειγμα 2 (συνέχεια).

Απ. i: Όλες οι δυνατές Μεταθέσεις των 10 ατόμων

$$10! = 3,628,800$$

Απ. ii: Εφόσον θα κατασκευαστούν ξεχωριστές λίστες, οι δυνατές λίστες με τις γυναίκες είναι $7! = 5.040$, και για τους άντρες είναι $3! = 6$,

Επομένως οι συνολικές διαφορετικές κατατάξεις θα είναι $7! \cdot 3! = 30,240$

Διατάξεις

- Πολλές φορές ενδιαφερόμαστε για τις δυνατές τοποθετήσεις ενός υποσυνόλου k αντικειμένων από συνολικά n αντικείμενα.
- Αυτές καλούνται *διατάξεις n ανά k*
- Ο όρος *διάταξη* είναι ευρύτερος, οι *μεταθέσεις n* αντικειμένων μπορούν να ονομαστούν και *διατάξεις n ανα n*

Θεωρούμε k πειράματα $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$

- Π_1 : Επιλογή 1ου αντικειμένου στη διάταξη
- Π_2 : Επιλογή 2ου αντικειμένου στη διάταξη
- ...
- Π_k : Επιλογή του k -στου αντικειμένου στη διάταξη

Διατάξεις

- Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για το Π1; $\rightarrow n$
- Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για το Π2; $\rightarrow n - 1$
- Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για το Π3; $\rightarrow n - 2$
- ...
- Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για το Π k ; $\rightarrow n - (k - 1) = n - k + 1$
- Επομένως το σύνθετο πείραμα ΠΔ που αφορά στη διάταξη των n αντικειμένων έχει:

$$\begin{aligned}
 & \text{Πλήθος Δυνατών αποτελεσμάτων για το ΠΔ} = \\
 & n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \\
 & \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - k) \cdot (n - k + 1) \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - k)} = \frac{n!}{(n - k)!}
 \end{aligned}$$

Διατάξεις

Παράδειγμα 1.

Κούρσα 8 δρομέων

Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για τη σειρά τερματισμού των τριών πρώτων;

Διατάξεις

Παράδειγμα 1 (συνέχεια).

Κούρσα 8 δρομέων

Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα για τη σειρά τερματισμού των τριών πρώτων;

– Επιλογές 1^{ου}: 8

– Επιλογές 2^{ου}: 7

– Επιλογές 3^{ου}: 6

Συνολικές Μεταθέσεις:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 336$$

Διατάξεις

Παράδειγμα 2.

Δοχείο περιέχει 5 μπλε και 4 κόκκινες αριθμημένες σφαίρες

Εξάγουμε διαδοχικά όλες τις σφαίρες

Πόσες οι συνολικές Μεταθέσεις όλων των σφαιρών που έχουν στις τρεις πρώτες θέσεις τους μπλε σφαίρες;

Διατάξεις

Παράδειγμα 2 (συνέχεια).

- Μπορούμε να δούμε ξεχωριστά τις δυνατές Μεταθέσεις των πρώτων 3 και των επόμενων 6 σφαιρών.
- Δυνατές Μεταθέσεις των τριών πρώτων:
Οι 3 πρώτες σφαίρες πρέπει να είναι μπλε.
Επομένως, μπορούμε να έχουμε $\frac{5!}{(5-3)!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = \mathbf{60}$ Διατάξεις
- Για τις επόμενες 6 μπάλες (2 μπλε και 4 κόκκινες) οι συνολικές Μεταθέσεις είναι: $\mathbf{6!}$
- Επομένως, οι συνολικές Μεταθέσεις είναι:
$$\mathbf{60 \cdot 6! = 43.200}$$
 Μεταθέσεις

Διατάξεις

Παράδειγμα 3.

Πόσες διαφορετικές λέξεις μπορώ να τυπώσω με τα γράμματα N, A, A, N ;

Διατάξεις

Παράδειγμα 3 (συνέχεια).

Πόσες διαφορετικές λέξεις μπορώ να τυπώσω με τα γράμματα N, A, A, N ;

- Αρχικά, μπορούμε να σκεφτούμε πως μπορούμε να τυπώσουμε όσες λέξεις είναι οι δυνατές Μεταθέσεις των 4 γραμμάτων
- Έχουμε επανάληψη κάποιων λέξεων;
 - A2, N1, N4, A3: ANNA
 - A3, N1, N4, A2: ANNA
- Πόσες είναι αυτές οι επαναλήψεις;
- Για κάθε μία από τις $n!$ μεταθέσεις μπορούμε να αντιμετωπίσουμε όλα τα όμοια στοιχεία χωρίς να αλλάξει η λέξη

Διατάξεις

Παράδειγμα 3 (συνέχεια).

Π.χ. ANNA

- Επιλογές: Όλες οι Μεταθέσεις των A1 και A2, Όλες οι Μεταθέσεις των N1 και N2: $2! \cdot 2! = 4$.
- Επομένως στο σύνολο των $n!$ μεταθέσεων κάθε λέξη εμφανίζεται 4 ($= 2! \cdot 2!$) φορές.
- Επομένως ο συνολικός αριθμός λέξεων είναι

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4!}{4} = 3! = 6$$

Διατάξεις

Παράδειγμα 4.

- i) Πόσες λέξεις μπορούμε να σχηματίσουμε με τα γράμματα της λέξης PARALLEL;
- ii) Πόσες από αυτές τις λέξεις έχουν το γράμμα R αριστερά από το γράμμα P;
- iii) Σε πόσες λέξεις εμφανίζεται η ακολουθία “PR”;
- iv) Σε πόσες λέξεις τα γράμματα P και R βρίσκονται σε γειτονικές θέσεις

Διατάξεις

Παράδειγμα 4.

Απ.ι. Έχουμε συνολικά 8! Μεταθέσεις των 8 γραμμάτων.

Στο σύνολο των 8! μεταθέσεων επαναλαμβάνονται οι ίδιες λέξεις.

Για κάθε μετάθεση μπορούμε να αντιμεταθέσουμε τα 3 L και τα 2 A, χωρίς να μεταβληθεί η σχηματιζόμενη λέξη.

Επομένως, στο σύνολο των 8! Μεταθέσεων κάθε λέξη εμφανίζεται $3! \cdot 2!$ φορές.

Άρα, ο συνολικός αριθμός λέξεων είναι

$$\frac{8!}{3! \cdot 2!} = 3360$$

Διατάξεις

Παράδειγμα 4 (συνέχεια).

Απ.ii. Από τις 3360 λέξεις, είναι προφανές πως στις μισές θα εμφανίζεται το P πριν το R και στις άλλες μισές το P θα έπεται του R.

Επομένως, ο συνολικός αριθμός λέξεων με το P αριστερά του R είναι

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2} = 1680$$

Διατάξεις

Παράδειγμα 4 (συνέχεια).

Απ.iii. Μπορούμε να προσεγγίσουμε το ερώτημα ως εξής: Θεωρούμε πως το “PR” είναι ένα γράμμα. Έτσι τα συνολικά μας γράμματα είναι πλέον 7 με 2 A και 3 L. Επομένως, οι συνολικές λέξεις που περιέχουν την ακολουθία “PR” είναι:

$$\frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$$

Διατάξεις

Παράδειγμα 4 (συνέχεια).

Απ.ιv. Μπορούμε να προσεγγίσουμε το ερώτημα ως εξής: Εξαιρώντας τα P και R, τα συνολικά μας γράμματα είναι πλέον 6 με 2 A και 3 L. Επομένως, οι συνολικές λέξεις που μπορούν να σχηματισθούν είναι:

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$$

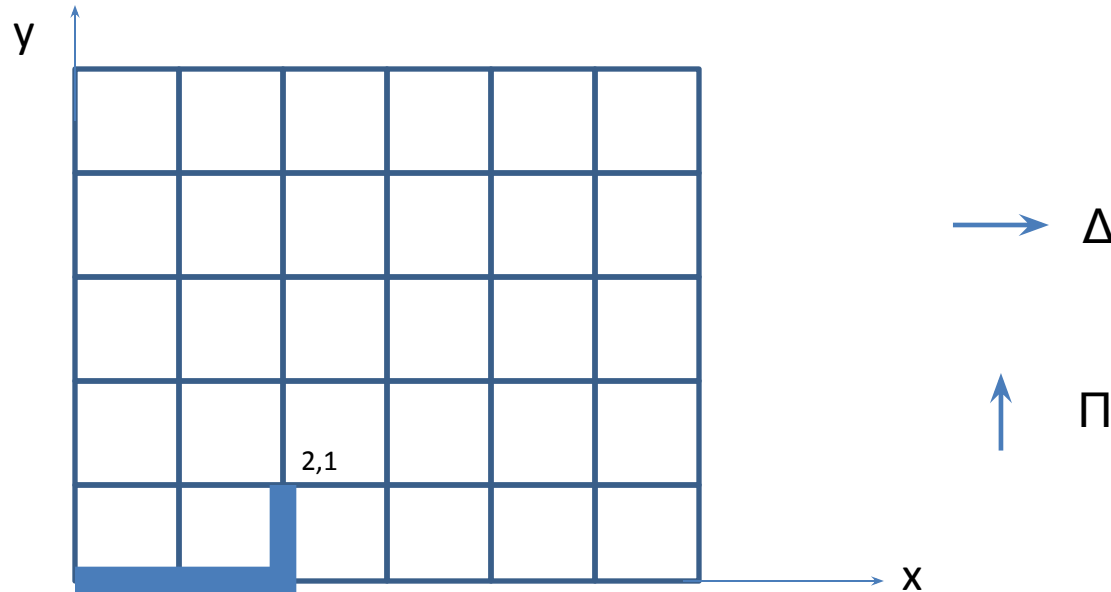
Πλέον υπάρχουν 7 διαθέσιμες θέσεις για τα γράμματα P και R και δύο επιλογές για τη σειρά τους (PR ή RP). Επομένως, οι συνολικές λέξεις με P και R σε γειτονικές θέσεις είναι:

$$60 \cdot 7 \cdot 2 = 840$$

Παράδειγμα 5.

- Έχουμε ένα ρομποτάκι που μπορεί να κάνει δύο ειδών βήματα:
 1. Βήμα Πάνω καλύπτοντας μία μονάδα μήκους (άξονας y)
 2. Βήμα Δεξιά καλύπτοντας μία μονάδα μήκους (άξονας x)
- i) Πόσα διαφορετικά μονοπάτια στο επίπεδο των δύο διαστάσεων μπορεί να έχει καλύψει μετά από 8 βήματα;
- ii) Πόσα διαφορετικά μονοπάτια μπορούν να το οδηγήσουν στο σημείο $(x, y) = (5, 3)$;

Διατάξεις



- Κάθε μονοπάτι που έχει διανυθεί μετά από n βήματα μπορεί να συμβολιστεί με μία λέξη η γραμμάτων κάθε ένα από τα οποία είναι Δ ή Π
- Π.χ. $\Delta\Delta\Pi$ μας οδηγεί στο σημείο $(2, 1)$

Διατάξεις

Παράδειγμα 5.

Απ.ι. Τα συνολικά μονοπάτια είναι όλες οι δυνατές λέξεις που μπορούν να σχηματιστούν με 8 επιλογές μεταξύ των Δ και Π:

$$2^8 = 256 \text{ διαφορετικά μονοπάτια}$$

Απ.ii. Για να κατάλήξουμε στο σημείο (5, 3) πρέπει να έχουν συμβεί τα εξής:

Πρέπει να έχουμε κάνει 8 βήματα, με τα 3 από αυτά να είναι Π και τα 5 από αυτά να είναι Δ.

Επόμενως, ο αριθμός των μονοπατιών μπορεί πλέον να εκφραστεί ως οι συνολικές διαφορετικές λέξεις που μπορούν να γραφούν με 3 Π και 5 Δ:

$$\frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56 \text{ διαφορετικά μονοπάτια μας οδηγούν στο}$$

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 1.

- Επιλογή τριών γραμμάτων από τα Α, Β, Γ, Δ, Ε
- Ποιο είναι το πλήθος των δυνατών συνδυασμών 3 από τα παραπάνω 5 γράμματα

Σημείωση: Μας είναι αδιάφορη η σειρά εμφάνισης των τριών επιλεγμένων γραμμάτων

Συνδυασμοί

- Πολλές φορές μας ενδιαφέρει η επιλογή κάποιων αντικειμένων από ένα ευρύτερο σύνολο που τα περιέχει, αδιαφορώντας για τη θέση επιλογής τους.
- Κάθε επιλογή ενός υποσυνόλου k στοιχείων από ένα σύνολο n στοιχείων καλείται συνδυασμός n ανά k

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 1 (συνέχεια).

Επιλογή τριών γραμμάτων από τα Α, Β, Γ, Δ, Ε

Ποιο είναι το πλήθος των δυνατών συνδυασμών 3 από τα παραπάνω 5 γράμματα;

- Χρήση του πλήθους των διατάξεων
- Επιλογή 1: 5 δυνατές επιλογές,
- Επιλογή 2: 4 δυνατές επιλογές,
- Επιλογή 3: 3 δυνατές επιλογές

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 1 (συνέχεια).

- Επομένως υπάρχουν $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ δυνατές επιλογές, οι οποίες όμως αντιστοιχούν σε ισάριθμες Διατάξεις
- Μέσα σε αυτές τις 60 δυνατές επιλογές υπάρχουν π.χ. οι 3άδες (A, B, Γ), (Γ, A, B), ..., οι οποίες αντιστοιχούν στον ίδιο συνδυασμό γραμμάτων.
- Για το συνδυασμό γραμμάτων A, B, Γ υπάρχουν 3! Μεταθέσεις.
- Δηλαδή στον πληθυσμό των διατάξεων, κάθε τριάδα γραμμάτων επαναλαμβάνεται 3! φορές
- Επομένως, για να οδηγηθούμε από το πλήθος των 60 δυνατών διατάξεων, στο πλήθος δυνατών επιλογών πρέπει να διαιρέσουμε με 3!
- Δηλαδή, υπάρχουν $\frac{60}{3!} = 10$ δυνατοί συνδυασμοί

Συνδυασμοί

● Ορισμός Πλήθους Συνδυασμών

- Ορίζουμε το πλήθος των δυνατών συνδυασμών n ανα k με ($k \leq n$):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

- Περιγράφει το σύνολο των δυνατών ομάδων αντικειμένων μεγέθους r που μπορούν να επιλεγούν από ένα σύνολο n αντικειμένων.

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 2.

Από μία τάξη 50 φοιτητών θα επιλεγούν 3 άτομα ως εκπρόσωποι της τάξης.

Ποιο είναι το πλήθος των δυνατών τριμελών επιτροπών;

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 2 (συνέχεια).

Από μία τάξη 50 φοιτητών θα επιλεγούν 3 άτομα ως εκπρόσωποι της τάξης.

Ποιο είναι το πλήθος των δυνατών τριμελών επιτροπών;

- Ζητούνται οι δυνατοί συνδυασμοί n ανά k , με $n = 50$ και $k = 3$
- Επομένως,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{50!}{47!3!} = 39200$$

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 3.

Πρέπει να οριστούν ομάδες τριών ατόμων από ένα σύνολο 10 εργαζομένων για τις νυχτερινές βάρδιες.

- i. Πόσες δυνατές ομάδες μπορούν να οριστούν;
- ii. Αν δύο άτομα είναι τσακωμένα και δεν πρέπει να βρισκονται ποτέ στο ίδιο γκρουπ, πόσες είναι οι δυνατές ομάδες;

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 3 (συνέχεια).

Πρέπει να οριστούν ομάδες τριών ατόμων από ένα σύνολο 10 εργαζομένων για τις νυχτερινές βάρδιες.

- i. Πόσες δυνατές ομάδες μπορούν να οριστούν;
- ii. Αν δύο άτομα είναι τσακωμένα και δεν πρέπει να βρισκονται ποτέ στο ίδιο γκρουπ, πόσες είναι οι δυνατές ομάδες;

Απ. i.: Με άμεση εφαρμογή του τύπου

$$\binom{n}{k} = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 3 (συνέχεια).

Απ. ii:

- Πόσες ομάδες περιέχουν τα δύο τσακωμένα άτομα;

$$\binom{2}{2} \times \binom{8}{1} = 8$$

- Επομένως από τις 120 ομάδες πρέπει να αφαιρέσουμε τις 8
- Συνολικά $120 - 8 = 112$ ομάδες

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 3 (συνέχεια).

Εναλλακτική προσέγγιση Απ. ii:

- Για να κατασκευάσουμε τα γκρουπ πρώτα θα επιλέγουμε έναν από τους δύο τσακωμένους και μετά δύο από τους υπόλοιπους 8.
- Θα προσθέσουμε και όλα τα γκρουπ που δεν τους περιέχουν

$$\binom{2}{1} \times \binom{8}{2} + \binom{8}{3} = 2 \times \frac{8!}{6! \times 2!} + \frac{8!}{5! \times 3!} = 112$$

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 4.

Πόσα διαφορετικά φουλ μπορούμε να έχουμε χρησιμοποιώντας μία τράπουλα 52 φύλλων;

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 4 (συνέχεια).

- Ας συμβολίσουμε κάθε τύπο φουλ ως (i, j) με $1 \leq i, j \leq 13$
- Η σειρά των i και j έχει σημασία καθώς το i συμβολίζει τον τύπο του φύλλου με τα 3 φύλλα και j τον τύπο του φύλλου με 2 φύλλα.
- Επομένως, έχουμε $13 \times 12 = 156$ τύπους φουλ
- Για κάθε τύπο φουλ, η πεντάδα μπορεί να σχηματιστεί ως εξής: Από τα 4 φύλλα του τύπου i , επιλέγω 3 και από τα 4 φύλλα του τύπου j επιλέγω 2. Άρα για κάθε τύπο φουλ έχω:

$$\binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = 4 \times 6 = 24 \text{ δυνατές πεντάδες φύλλων}$$

- Επομένως, οι συνολικές πεντάδες φύλλων που αντιστοιχούν σε φουλ είναι: $156 \times 24 = 3744$

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 5.

Έχουμε ένα ρομποτάκι που μπορεί να κάνει δύο ειδών βήματα:

1. Βήμα Πάνω καλύπτοντας μία μονάδα μήκους (άξονας y)
 2. Βήμα Δεξιά καλύπτοντας μία μονάδα μήκους (άξονας x)
-
- i) Πόσα διαφορετικά μονοπάτια στο επίπεδο των δύο διαστάσεων μπορεί να έχει καλύψει μετά από 8 βήματα;
 - ii) Πόσα διαφορετικά μονοπάτια μπορούν να το οδηγήσουν στο σημείο $(x, y) = (5, 3)$;

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 5 (συνέχεια).

- Έχουμε ήδη αντιμετωπίσει το πρόβλημα με χρήση μεταθέσεων
- Ας το δούμε από τη σκοπιά των συνδυασμών.

Απ.ι. Τα συνολικά μονοπάτια είναι όλες οι δυνατές λέξεις που μπορούν να σχηματιστούν με 8 επιλογές μεταξύ των Δ και Π:

$$2^8 = 256 \text{ διαφορετικά μονοπάτια}$$

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 5 (συνέχεια).

Απ.ii. Για να κατάλήξουμε στο σημείο (5, 3) πρέπει να έχουν συμβεί τα εξής: Πρέπει να έχουμε κάνει 8 βήματα, με τα 3 από αυτά να είναι Π και τα 5 από αυτά να είναι Δ.

Επομένως, ο αριθμός των μονοπατιών μπορεί πλέον να εκφραστεί ως ο αριθμός των λέξεων που μπορούν να γραφούν με 3 Π και 5 Δ:

Θεωρούμε 8 θέσεις αριθμημένες από το 1 ως το 8: _ _ _ _ _

Οι συνολικές λέξεις σχηματίζονται επιλέγοντας 3 από τις 8 θέσεις για τα γράμματα Π ή ισοδύναμα 5 από τις 8 θέσεις για τα γράμματα Δ, επομένως ο αριθμός τους είναι:

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = \frac{8!}{3! \times 5!} = 56 \text{ διαφορετικά μονοπάτια}$$

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 6.

Πόσοι είναι οι συνδυασμοί με τους οποίους μπορούμε να μοιράσουμε

- i) μία τράπουλα σε 4 άτομα;
- ii) μία τράπουλα σε 4 άτομα, έτσι ώστε καθένα από αυτά να έχει ένα άσσο στην κατοχή του;

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 6 (συνέχεια).

Απ.ι:

- Μπορούμε να σκεφτούμε τους συνδυασμούς σαν ένα σύνολο τεσσάρων συνόλων. Το πρώτο στοιχείο θα είναι τα 13 φύλλα του παίκτη Α, το 2^ο στοιχείο θα είναι τα 13 φύλλα του 2^{ου} παίκτη κ.ο.κ.
- {{1, 2, ..., 13}, {14, 15, ...26}, {27, 28...,39}, {40, 41..., 52}}
- Επόμενως οι δυνατοί τρόποι είναι:

$$\binom{52}{13} \times \binom{39}{13} \times \binom{26}{13} \times \binom{13}{13} =$$

$$\frac{52!}{13! 39!} \times \frac{39!}{13! 26!} \times \frac{26!}{13! 13!} \times \frac{13!}{13! 0!} = \frac{52!}{(13!)^4}$$

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 6 (συνέχεια).

- Σημείωση: Στους συνολικούς συνδυασμούς λαμβάνουμε υπόψιν την ταυτότητα του παίκτη. Έστω π.χ. $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$ ένα από τους συνδυασμούς που μετρήσαμε (A, B, Γ, Δ είναι δεκατριάδες φύλλων). Έχουμε επίσης μετρήσει και τον $\{A, B, \Delta, \Gamma\}$, $\{B, \Delta, \Gamma, A\}$ κ.ο.κ.
- Τι θα έπρεπε να κάνουμε αν δε μας ενδιέφερε η ταυτότητα των παικτών, αλλά μόνο με πόσους τρόπους μπορεί να μοιραστεί η τραπουλα? ($\div 4!$).

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 6 (συνέχεια).

Απ. ii:

- Επιλογές 1^{ου} παίκτη: $\binom{4}{1} \times \binom{48}{12}$ (οι επιλογές για τον άσο κ οι επιλογές για 12 από τα υπόλοιπα φύλλα εξαιρώντας τους άσσους)
- Επιλογές 2^{ου} παίκτη: $\binom{3}{1} \times \binom{36}{12}$ (οι επιλογές για τον άσο κ οι επιλογές για 12 από τα υπόλοιπα φύλλα εξαιρώντας τους άσσους)
- Επιλογές 3^{ου} παίκτη: $\binom{2}{1} \times \binom{24}{12}$ (οι επιλογές για τον άσο κ οι επιλογές για 12 από τα υπόλοιπα φύλλα εξαιρώντας τους άσσους)
- Επιλογές 4^{ου} παίκτη: $\binom{1}{1} \times \binom{12}{12}$ (οι επιλογές για τον άσο κ οι επιλογές για 12 από τα υπόλοιπα φύλλα εξαιρώντας τους άσσους)

Συνδυασμοί

Παράδειγμα 6 (συνέχεια).

- Επόμενως οι δυνατοί τρόποι είναι:

$$\binom{4}{1} \binom{48}{12} \times \binom{3}{1} \binom{36}{12} \times \binom{2}{1} \binom{24}{12} \times \binom{1}{1} \binom{12}{12} =$$

$$\frac{4!}{1! 3!} \frac{48!}{12! 36!} \times \frac{3!}{1! 2!} \frac{36!}{12! 24!} \times \frac{2!}{1! 1!} \frac{24!}{12! 12!} \times \frac{1!}{1! 0!} \frac{12!}{12! 0!} =$$

$$4! \times \frac{48!}{12! 12! 12! 12!}$$

- Σημείωση: Και πάλι λαμβάνουμε υπόψιν την ταυτότητα του παίκτη. Λόγω της συμμετρίας των 13άδων (ενας άσσος – 12 άλλα φύλλα), για κάθε τέσσερα σύνολα 13άδων (Α, Β, Γ, Δ) έχουμε μετρήσει όλες τις Μεταθέσεις τους.

Το Διωνυμικό Θεώρημα

Οι τιμές $\binom{n}{k}$ αναφέρονται ως διωνυμικοί συντελεστές λόγω της σημασίας που έχουν στο διωνυμικό θεώρημα.

Διωνυμικό Θεώρημα:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Το Διωνυμικό Θεώρημα

Για $n = 2$, (η ιδιαίτερα γνώριμη ταυτότητα...)

$$(x + y)^2 = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} x^k y^{2-k} =$$

$$\binom{2}{0}x^0y^2 + \binom{2}{1}x^1y^1 + \binom{2}{2}x^2y^0 = x^2 + 2xy + y^2$$

Το Διωνυμικό Θεώρημα

- Επιστροφή στο παράδειγμα με το ρομποτάκι
- Υπολογίσαμε πως μπορεί να κάνει 2^8 διαφορετικά μονοπάτια
- Ας δούμε τη σχέση του συγκεκριμένου αποτελέσματος με το Διωνυμικό Θεώρημα
- Ερώτηση: Στα 8 βήματα, πόσα είναι τα δυνατά «μείγματα» βημάτων $(8\Delta, 0\Gamma)$, $(7\Delta, 1\Gamma)$, ..., $(0\Delta, 8\Gamma)$;
- Απάντηση: Είναι $8 + 1$ όσες οι δυνατές τιμές των συνολικών βημάτων Δ (ή αριστερά)

Το Διωνυμικό Θεώρημα

- Έστω k ο αριθμός των Δεξιών βημάτων
- Το k θα λαμβάνει τιμές από 0 έως $n = 8$
- Πόσα μονοπάτια υπάρχουν με k δεξιά βήματα;
 - Όσοι οι συνδυασμοί θέσεων για την τοποθέτηση των k δεξιών βημάτων
 - Επομένως, έχουμε $\binom{n}{k}$ μονοπάτια
- Άρα τα συνολικά μονοπάτια για όλες τις τιμές του k , είναι

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1 + 1)^n = 2^n$$

Διαμερίσεις

- Πρέπει να χωρίσουμε n αντικείμενα σε k ομάδες
- Το μέγεθος κάθε μίας από τις k ομάδες είναι n_1, n_2, \dots, n_k .
- Πόσες είναι οι συνολικές διαμερίσεις;
- Χρήση της **γενικευμένης βασικής αρχής μέτρησης** και του **πλήθους συνδυασμών**.

Διαμερίσεις

Καταγραφή των επιλογών για την κατασκευή των ομάδων

$$1^{\text{η}} \text{ Ομάδα: } \binom{n}{n_1}$$

$$2^{\text{η}} \text{ Ομάδα: } \binom{n-n_1}{n_2}$$

$$k^{\text{η}} \text{ Ομάδα: } \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}{n_k}$$

Διαμερίσεις

- Επομένως με χρήση της γενικευμένης βασικής αρχής μέτρησης:

$$\binom{n}{n_1} \binom{n - n_1}{n_2} \cdots \binom{n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{r-1}}{n_k} =$$

$$= \frac{n!}{(n - n_1)! n_1!} \cdot \frac{(n - n_1)!}{(n - n_1 - n_2)! n_2!} \cdots \frac{(n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1})!}{0! n_k!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

Δυνατές Διαμερίσεις: $\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$

Διαμερίσεις

Παράδειγμα 1.

Μία ομάδα 10 φοιτητών θα χωριστεί σε τρία γκρουπ για τη διοργάνωση ενός Συνεδρίου

- 1) Μία τριμελής ομάδα θα αναλάβει την προώθηση του Συνεδρίου
- 2) Μία πενταμελής ομάδα θα αναλάβει την επιστημονική οργάνωση
- 3) Μία διμελής ομάδα θα αναλάβει την καλή λειτουργία των εγκαταστάσεων του συνεδριακού χώρου

Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η διαμέριση των φοιτητών σε ομάδες;

Διαμερίσεις

Παράδειγμα 1 (συνέχεια).

- Έχουμε $n = 10$, και $n_1 = 3$, $n_2 = 5$, $n_3 = 2$
- Επομένως, οι δυνατές διαμερίσεις είναι

$$\frac{10!}{3! \times 5! \times 2!} = 2.520$$

Διαμερίσεις

Παράδειγμα 2.

Μία ομάδα 10 παιδιών θα χωριστούν σε δύο ομάδες των 5 ατόμων (Κόκκινοι & Πράσινοι) για ένα παιχνίδι μπάσκετ

Με πόσους τρόπους μπορούν να σχηματιστούν αυτές οι δύο ομάδες;

Διαμερίσεις

Παράδειγμα 2 (συνέχεια).

- Έχουμε $n = 10$, και $n_1 = 5$, $n_2 = 5$
- Επομένως, οι δυνατές διαμερίσεις είναι

$$\frac{10!}{5! \times 5!} = 252$$

- Δηλαδή υπάρχουν 252 διαφορετικοί τρόποι για να σχηματιστούν οι ομάδες Πράσινοι και Κόκκινοι

Διαμερίσεις

Τροποποίηση παραδείγματος 2.

- Μία ομάδα 10 παιδιών θα χωριστούν σε δύο ομάδες των 5 ατόμων για ένα παιχνίδι μπάσκετ
- Με πόσους τρόπους μπορούν να σχηματιστούν οι συνθέσεις των ομάδων;

Διαμερίσεις

Τροποποίηση παραδείγματος 2 (συνέχεια).

Μία ομάδα 10 παιδιών θα χωριστούν σε δύο ομάδες των 5 ατόμων για ένα παιχνίδι μπάσκετ

Με πόσους τρόπους μπορούν να σχηματιστούν οι συνθέσεις των ομάδων;

- Το πρόβλημα μοιάζει με το προηγούμενο, αλλά δεν είναι ακριβώς το ίδιο: Οι ομάδες δεν έχουν ταυτότητα!
- Πλέον η διαμέριση $\Pi: \{1,2,3,4,5\}$ & $K: \{6,7,8,9,10\}$ δε διαφέρει από τη $K: \{1,2,3,4,5\}$ & $\Pi: \{6,7,8,9,10\}$, καθώς δεν υπάρχει η έννοια των K & Π !
- Επομένως, οι δυνατές συνθέσεις των ομάδων που θα παίξουν στο παιχνίδι είναι $252/2 = 126$.

Πλήθος Ακέραιων Θετικών Λύσεων μιας Εξίσωσης

- Έστω η εξίσωση

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$$

- Ποιό είναι το συνολικό πλήθος των θετικών ακέραιων λύσεων;
- Λύση εδώ ονομάζεται ένα διάνυσμα της μορφής (x_1, x_2, \dots, x_k) με $x_i > 0, i = 1, \dots, k$.

Παράδειγμα 1.

Για $n = 5$ και $k = 3$ ($x_1 + x_2 + x_3 = 5$):

τα $(3, 1, 1), (2, 2, 1), \dots, (1, 3, 1)$ αποτελούν λύσεις

Πλήθος Ακέραιων Θετικών Λύσεων μιας Εξίσωσης

Παράδειγμα 1 (συνέχεια).

- Πλήθος θετικών ακεραίων λύσεων της

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

- Θα χρησιμοποιήσουμε μία προσέγγιση γνωστή ως “*stars and bars*”...

1		1		1		1		1
	a		b		c		d	

- Τοποθετούνται n ($n = 5$) άσσοι σε μία σειρά
- Ορίζονται $n - 1$ ($n - 1 = 4$) θέσεις ανάμεσά τους (a, b, c, d)
- Πρέπει να τοποθετηθούν $k - 1$ ($= 3 - 1 = 2$) διαχωριστικά σε ένα υποσύνολο των θέσεων αυτών

Πλήθος Ακέραιων Θετικών Λύσεων μιας Εξίσωσης

Παράδειγμα 1 (συνέχεια).

- Κάθε τοποθέτηση δύο διαχωριστικών σε δύο από τις θέσεις $\{a, b, c, d\}$ ορίζουν μία λύση

1		1		1		1		1
	a		b		c		d	
1	,	1	+	1	+	1	,	1

- Στις επιλεγμένες θέσεις διαχωρίζουμε τους άσσους με ένα κόμμα, ενώ στις μη επιλεγμένες εισάγουμε το (+)
- Στο παράδειγμα μας, η επιλογή των θέσεων a και d ορίζει τη λύση $(x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 1)$ ή $(1,3,1)$

Πλήθος Ακέραιων Θετικών Λύσεων μιας Εξίσωσης

Επομένως το συνολικό πλήθος των λύσεων στη γενική περίπτωση, είναι όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των $(n - 1)$ θέσεων για τα $(k - 1)$ διαχωριστικά!

Συνολικές λύσεις (διανύσματα)

$$\binom{n - 1}{k - 1}$$

Πλήθος Ακέραιων Μη-Αρνητικών Λύσεων μιας Εξίσωσης

- Έστω η εξίσωση

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

- Ποιό είναι το συνολικό πλήθος των μη-αρνητικών ακέραιων λύσεων;
- Λύση εδώ ονομάζεται ένα διάνυσμα της μορφής (x_1, x_2, \dots, x_k) με $x_i \geq 0, i = 1, \dots, k$.

Παράδειγμα 1.

- Για $n = 5$ και $k = 3$ ($x_1 + x_2 + x_3 = 5$):
τα $(3, 2, 0), (0, 0, 5), \dots, (1, 3, 1)$ αποτελούν λύσεις

Πλήθος Ακέραιων Μη-Αρνητικών Λύσεων μιας Εξίσωσης

Παράδειγμα 1 (συνέχεια).

- Θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση “stars and bars” τροποποιημένη για την αντιμετώπιση του νέου προβλήματος
- Τα διαχωριστικά μπορούν πλέον να τοποθετηθούν σε συνεχόμενες θέσεις ($x_i \geq 0, i = 1, \dots, k$)
- Κωδικοποίηση των δυνατών λύσεων, έστω $n = 5$ και $k = 3$
- Πίνακας με $n + k - 1$ στήλες

1	2	3	4	5	6	7

Πλήθος Ακέραιων Μη-Αρνητικών Λύσεων μιας Εξίσωσης

Παράδειγμα 1 (συνέχεια).

- Επιλέγω τις θέσεις για τα $k - 1$ διαχωριστικά

1	2	3	4	5	6	7

- Οι υπόλοιπες θέσεις αυτόματα γεμίζονται με άσσους (καμία επιλογή με δεδομένες τις θέσεις των διαχωριστικών)

1	2	3	4	5	6	7
	1		1	1	1	1

Πλήθος Ακέραιων Μη-Αρνητικών Λύσεων μιας Εξίσωσης

Παράδειγμα 1 (συνέχεια).

– Ο Πίνακας που παράγεται

1	2	3	4	5	6	7
	1		1	1	1	1

αντιστοιχεί στη λύση ($x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 4$) ή $(0, 1, 4)$

– Ομοίως, ο Πίνακας

1	2	3	4	5	6	7
1	1		1		1	1

αντιστοιχεί στη λύση ($x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2$) ή $(2, 1, 2)$

Πλήθος Ακέραιων Μη-Αρνητικών Λύσεων μιας Εξίσωσης

Επομένως, το συνολικό πλήθος μη αρνητικών
ακέραιων λύσεων της

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

είναι όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των $(n + k - 1)$
θέσεων για τα $(k - 1)$ διαχωριστικά!

Συνολικό Πλήθος Λύσεων (διανυσμάτων) :

$$\binom{n + k - 1}{k - 1} = \binom{n + k - 1}{n}$$

Συνδυασμοί με Επανάληψη

- Υπάρχουν n ομάδες αντικειμένων (χωρίς περιορισμό στον αριθμό των αντικειμένων)
- Πρέπει να επιλέξω k αντικείμενα από τις n ομάδες
- Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω τα k αντικείμενα;
- Το πλήθος των τρόπων επιλογής των k αντικειμένων είναι ίσο με το πλήθος ακεραίων θετικών λύσεων της $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$
- Σχόλιο: Ακριβώς όπως προσδιορίζαμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

Απλά έχουμε εναλλάξει τους συμβολισμούς n και k

Συνδυασμοί με Επανάληψη

Παράδειγμα.

3 τύποι φρούτων {Μήλα, Αχλάδια, Ακτινίδια}, ($n = 3$)

Σακούλα που χωράει 10 φρούτα ($k = 10$)

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να γεμίσω τη σακούλα;

Συνδυασμοί με Επανάληψη

Παράδειγμα (συνέχεια).

- Έστω x_1 πλήθος μήλων, x_2 πλήθος αχλαδιών, x_3 πλήθος ακτινιδίων
- Κάθε δυνατή διαμόρφωση των περιεχομένων της σακούλας είναι μία τριάδα τιμών (x_1, x_2, x_3) έτσι ώστε $x_1 + x_2 + x_3 = 10$.
- Πρόσοχή! (Ανταλλαγή των ρόλων k και n σε σχέση με το πλήθος ακέραιων ριζών)
- Εδώ n έχουμε ονομάσει τους τύπους (σύμβαση για τους συνδυασμούς με επανάληψη),
- k : Τα συνολικά επιλεγμένα στοιχεία
- Επομένως πρέπει να επιλέξουμε τις θέσεις για τα $n - 1$ διαχωριστικά.

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10} = \frac{12!}{2! \times 10!} = 66$$