4. Случайные погрешности

При повторных измерениях изменяются случайным образом измеряемая величина

$$X = x[X] \quad x_1 = \mu + \Delta x_1; \quad x_2 = \mu + \Delta x_2; \quad \ldots \quad x_N = \mu + \Delta x_N$$

μ – истинное значение измеряемой величины (его мы никогда не знаем),
Δ_{Xi} – случайная погрешность при i-м наблюдении

4.1. Случайные величины и закон распределения

4.1.1. Дискретные случайные величины

принимающие только отделенные друг от друга значения (например, возможное число выпавших очков при бросании в игре «Кости»)

Чтобы охарактеризовать дискретную случайную величину, необходимо знать все ее возможные значения и вероятность появления каждого значения.

Пример. Пусть при измерении напряжения при помощи вольтметра, позволяющего производить измерения с дискретностью отсчета в 1 В, были получены следующие 10 значений: 34, 36, 34, 38, 36, 33, 35, 37, 38, 34 В. Далее запишем полученные значения в порядке возрастания ($x_1 < x_2 < \ldots < x_k$) в таблицу и занесем в нее, сколько раз было получено каждое значение n_k ($k = 1, 2, \ldots, m$).

Причем . $$\sum_{k=1}^{m} n_k = N$$

Значение x_k,В	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**
Число реализаций n_k	1	3	1	2	1	2
Вероятность p_k (F_k)	0.1	0.3	0.1	0.2	0.1	0/2

Из полvченных значений можно вычислить среднее арифметическое:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{33 + 34 + 34 + \ldots + 38}{10} = 35.5$$

Среднее значение можно получить, используя средневзвешенную сумму, так как по своему смыслу n_k является весовым множителем для каждого x_k:

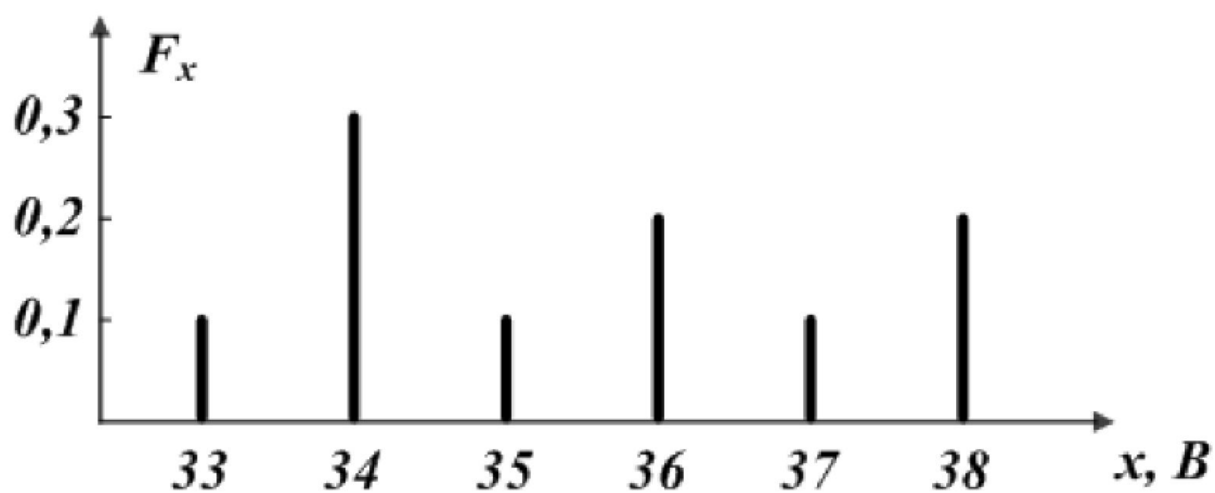
$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k n_k}{N} = \frac{33 \cdot 1 + 34 \cdot 3 + \ldots + 38 \cdot 1}{10} = 35.5$$

Далее вместо числа реализаций n_k можно ввести относительные частоты $F_k = n_k / N$ появления x_k.
Если N будет стремиться к бесконечности, то частоты будут стремиться к вероятностям p_k появления конкретных значений дискретной случайной величины. Заметим, что сумма всех вероятностей будет всегда равна единице

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$ - условие нормировки

Следовательно, можно установить связь между возможными
значениями дискретной случайной величины и соответствующими им вероятностями.
Это и будет закон распределения вероятности или просто **закон распределения**.

Закон распределения можно задать при помощи таблицы, в которую вносят все дискретные значения и их вероятности, или в графическом виде, где по оси абсцисс откладывают возможные дискретные значения, а по оси ординат – вероятности этих значений.



Кроме закона распределения для характеристики дискретных случайных величин используются такие параметры, как **математическое ожидание** и **дисперсия**.

В общем случае под **математическим ожиданием** случайной величины понимают сумму произведений всех ее возможных значений на вероятность этих значений:

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_N x_N}{N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i x_i}{N} = \sum_{i=1}^{N} p_i x_i = M$$

- <u>совпадает с средним.</u>

Дисперсия – математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания

$$D = M\left[x - M\right]^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\left[x_i - M\right]^2 p_i\right)$$

Дисперсия имеет размерность квадрата измеряемой случайной величины, поэтому вводят понятие **<u>среднего квадратического отклонения</u>** (СКО):

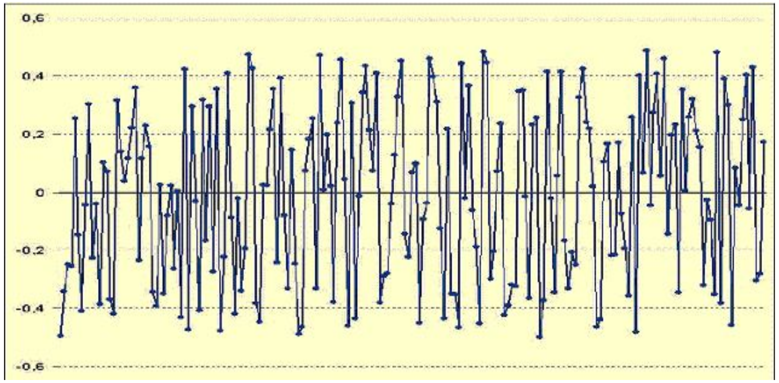
$$\sigma_x = \sqrt{D}$$

СКО будет иметь размерность самой измеряемой величины. Характеризуют **<u>степень разброса случайной величины от среднего значения</u>**

4.1.2. Непрерывные случайные величины

значения которых не отделены друг от друга и непрерывно заполняют некоторый промежуток

<u>Функция распределения вероятности слуайной величины</u>
(*интегральный закон распределения*)
- вероятность того, величина принимает значение от - $-\infty$ до x.



$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty, x)$$

- Вот ее общие свойства:
- 1. Функция распределения *F*(*x*) является неубывающей функцией: т.е. при x_1 < 2 *F*(*x1*) < *F*(*x2*).
- 2. При *x* = - ∞ *F*(- ∞) = 0: на минус бесконечности функция распределения равна нулю.
- 3. При *x* = + ∞ *F*(□+∞) = 1: на плюс бесконечности функция распределения равна единице.

Для непрерывной случайной величины с непрерывной и дифференцируемой функцией распределения вероятности $F(x)$ можно использовать **дифференциальный закон распределения вероятностей (**или **плотность распределения вероятности)**:

$$p(x) = F'(x);$$

Эта функция всегда неотрицательна и подчинена условию нормирования:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) = 1 -$$ нормировка

Математическое ожидание непрерывной случайной величины:

$$M = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

Дисперсия,
среднее квадратическое отклонение

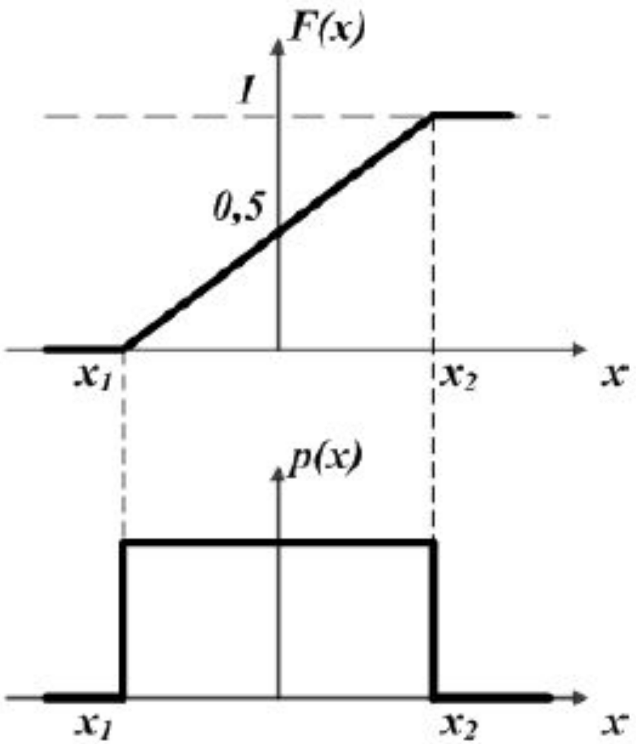
$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M)^2 p(x)dx; \quad \sigma = \sqrt{D}$$

В метрологии существует много законов распределения. Чаще всего в измерительной практике применяются два: равномерный и нормальный (распределение Гаусса).

4.1.3. Равномерный закон распределения

При **равномерном законе** возможные значения непрерывной случайной величины находятся в пределах некоторого конечного интервала и имеют одну и ту же плотность вероятности

$$\begin{cases} p(x) = \frac{1}{X_1 - X_2}\ ,\ \textit{если}\ X_1 < x < X_2 \\ p(x) = 0, \textit{если}\ x < X_1 \textit{и}\ x > X_2 \end{cases}$$



Функция распределения и
Плотность распределения

Математическое ожидание

$$M(X) = (x_1+x_2)/2$$

Дисперсия

$$D(X) = (b – a)^2/2$$

Примеры равномерно распределенных случайных величин.

Автомобиль подъезжает к перекрестку, регулируемому светофором, в некоторый момент времени. На светофоре – красный сигнал. Полное время «горения» красного сигнала – 30 секунд. Время Т, в течение которого водителю автомобиля придется ждать зеленого сигнала светофора, представляет собой случайную величину, равномерно распределенную на отрезке [0, 30].

встречается в измерительной практике при округлении отсчётов измерительных приборов до целых делений шкал

Шкала измерительного прибора проградуирована в некоторых единицах. Ошибку при округлении отсчета до ближайшего целого деления можно рассматривать как случайную величину, распределенную с постоянной плотностью между двумя соседними делениями.

4.1.4.. Нормальный закон распределения (гауссовское распределение)

Широко применяется в задачах практики

Аксиомы:

1)**Аксиома симметрии**: одинаковые по величине и разные по знаку отклонения величины от среднего значения встречаются одинаково часто;

2**) Аксиома монотонного убывания плотности Вероятности:** большие отклонения величины встречаются реже.

Формула нормального закона распределения имеет следующий вид:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

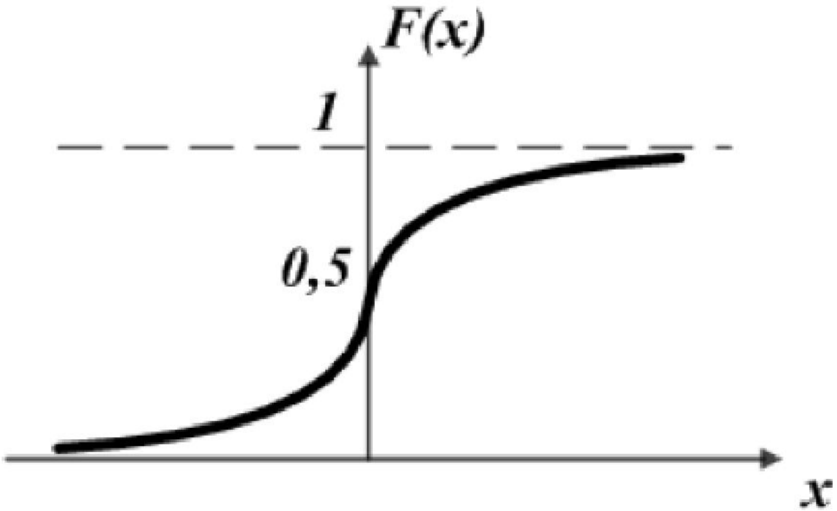
где x - среднее значение; σ- среднее квадратическое отклонение (СКО).

$$P(x_1, x_2) = \int_{x1}^{x2} xp(x)dx$$

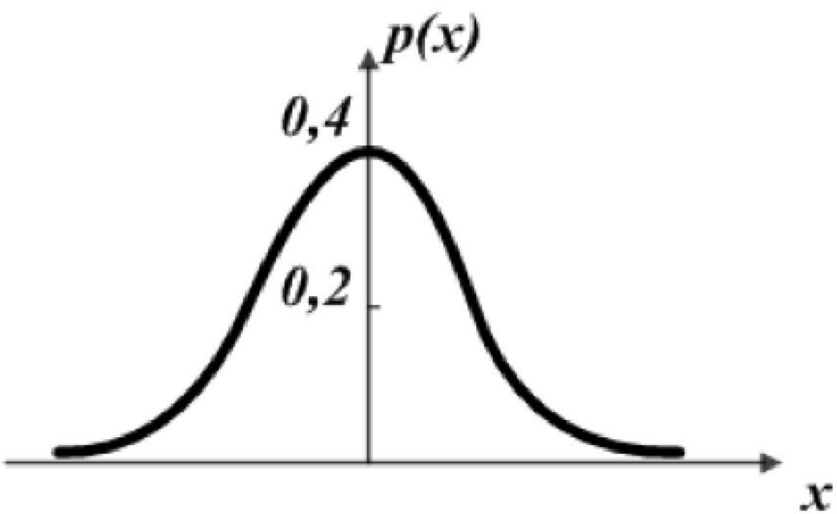
- вероятность того, что случайная величина лежит в интервале (x_1, x_2)

<u>Чем больше дисперсия (разброс, отклонение от среднего), тем ниже и шире кривая</u>

Общий вид дифференциальной и интегральной функций распределения для нормальных законов представлен на рисунке



-- функция распределения



-- плотность распределения

Как в случае дискретных величин, для оценки законов распределения используют математическое ожидание *M(x)* и дисперсию *D(x)*

Математическое ожидание – положение случайной величины на числовой оси (среднее значение), определяющее центр распределения, вокруг которого группируются значения случайной величины. Для расчета используется следующая формула:

$$M = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

Дисперсия (СКО в квадрате) служит для определения разброса получаемых результатов относительно среднего значения и определяется :

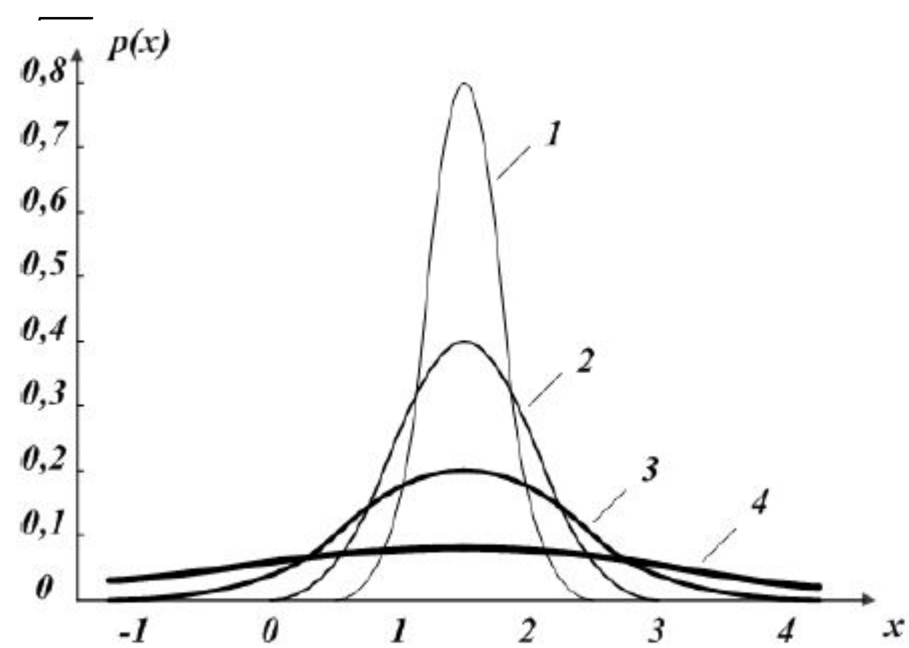
$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M)^2 p(x)dx;$$

$$\sigma =$$

Чем больше дисперсия, тем значительнее рассеяние результатов относительно среднего значения

<u>Чем больше дисперсия (разброс, отклонение от среднего), тем ниже и шире кривая</u>

Плотности распределения при мат. ожидании = 1.5 и СКО: 1 – 0.5; 2 – 1; 3 – 2; 4 – 5.



На практике все результаты измерений являются дискретными величинами, т. е. из всей генеральной совокупности (всех возможных значений) мы при измерении получаем некоторый ряд значений, который называется ***выборкой***.

Полученная выборка должна быть репрезентативной, т. е. достаточно хорошо представлять пропорции генеральной совокупности.

Далее встает задача нахождения точечных оценок, характеризующих распределение величин, входящих в данную выборку. Эти оценки должны быть:
****состоятельными* (при увеличении объема выборки должны стремиться к истинному значению величины),
****несмещенными* (математическое ожидание оценки равно оцениваемой числовой характеристике) и
****эффективными* (иметь как можно меньшую дисперсию).

4.2. Использование нормального закон распределения для представления результатов измерений

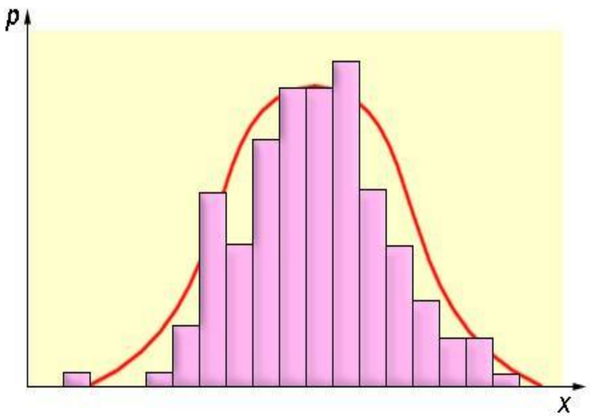
Закон распределения *p(x)* является наиболее полной характеристикой случайной величины, в частности, измеряемой физической величины

Числовая оценка характеристик нормального закона распределения

$$X = x[X] \quad x_1 = \mu + \Delta x_1; \quad \dots \quad x_N = \mu + \Delta x_N$$

μ – истинное значение измеряемой величины (его мы никогда не знаем),

Δ_{Xi} – случайная погрешность при i-м наблюдении



В статистике доказано, что если Δ_{Xi} подчиняется нормальному распределению, то $\bar{x}$ является наиболее полной оценкой истинного значения μ

Среднее значение (*т*очечная оценка математического ожидания результата измерений):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \mu + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i = 0$$

$$\bar{x} \to \mu$$

Среднее квадратическое отклонение наблюдений (СКО):

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

- характеризует разброс результатов наблюдений относительно $\bar{x}$

Полученные оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения являются случайными величинами. Это проявляется в том, при повторении несколько раз серий из n наблюдений каждый раз будут получаться различные оценки $\bar{x}$ и S_x. Рассеяние этих оценок принято оценивать <u>СКО среднего</u>:

Среднее квадратическое отклонение результата измерений (СКО среднего):

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

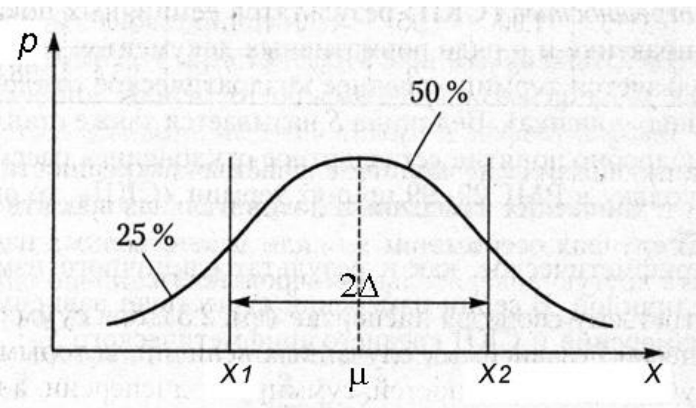
<u>- характеризует отклонение $\bar{x}$ относительно истинного значения μ</u>

Интервальная оценка нормального закона распределения (квантильная оценка)

Для практики важно на основе полученных точечных оценок определить доверительный интервал, в границах которого с доверительной вероятностью *P* находится истинное значение измеряемой физической величины.

В метрологиии спользуются *квантильные оценки доверительного интервала. Под 100.P-процентным квантилем x_p понимают абсциссу такой вертикальной линии, слева от которой площадь под кривой плотности распределения равна P %, т. е. квантиль – это значение случайной величины с заданной доверительной вероятностью P.*

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{x1}^{x2} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

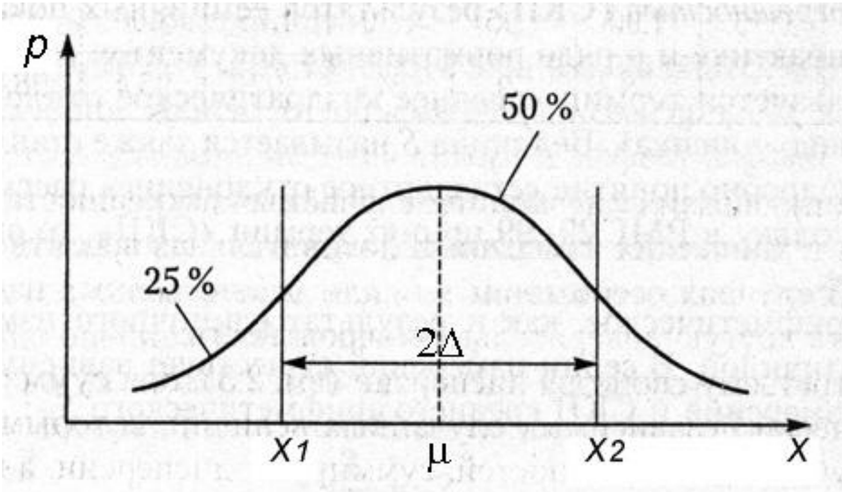


x_1, x_2- квантили;

(x_1, x_2) – доверительный интервал
P – доверительная вероятность

На рисунке – $x_1 = x_{0.25}$ – квантиль порядка 0.25; $x_2 = x_{1-0.25} = x_{0.75}$

Интервальная оценка нормального закона распределения (квантильная оценка)



На рисунке – $x_1 = x_{0.25}$ – квантиль порядка 0.25; $x_2 = x_{1-0.25} = x_{0.75}$

Математическое ожидание распределения является 50 %-ным квантилем $x_{0,5}$ *(справа и слева относительно него вероятности равны 50 %).*

Между 25 %- и 75 %-ными квантилями заключено 50 % всех возможных значений случайной величины, а остальные 50 % лежат вне его. На основании такого похода вводят понятие квантильных значений погрешности, т. е. значений погрешности с заданной доверительной вероятностью *P* – границ интервала $\pm\Delta = (x_p - x_{1-P})/2$: на его протяжении встречается *P* % значений случайной величины, а $q = 1 - P$ значений остаются за пределами их интервала.

Интервальная оценка нормального закона распределения (квантильная оценка)

Действия 1: провести *N* измерений, вычислить среднее арифметическое (принять за μ), вычислить СКО среднего арифметического (принять за σ), задаться доверительным интервалом Δ, рассчитать доверительную вероятность P

$$\bar{x} \pm \Delta; P$$

2. Результат измерений: среднее арифметическое с вероятностью *P* отклоняется от истинного значения не более чем на Δ

!!! Нормальный закон распределения – для выборки с большим количеством случайных величин.

N > 30

****

<u>При малом количестве наблюдений </u>(*n < 30) пользуются не нормальным законом распределения, а распределением Стьюдента. Оно описывает плотность распределения отношением:*

$$t = \frac{\overline{x} - x_u}{S_{\overline{x}}}$$

Стьюдент – псевдоним У.С. Госсета (1876-1937) – химика, работавшего в одной из пивоваренных фирм Великобритании. Он самостоятельно разработал статистику малых выборок. Поскольку в современной технике чаще всего исследуются небольшие по объему выборки (менее 30), то работа Стьюдента имеет большое практическое значение.

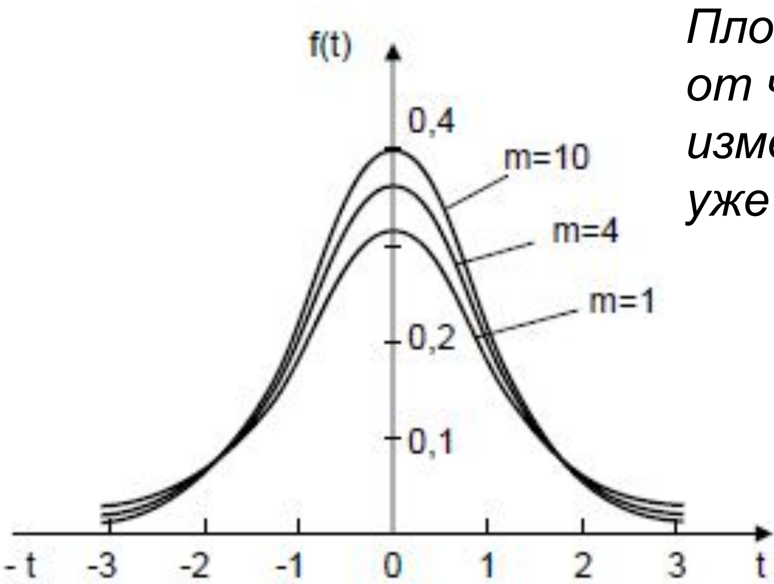
Вероятность того, что дробь Стьюдента в результате выполненных наблюдений примет некоторое значение в интервале от – tP до + tP можно рассчитать так:

$$P\{-t_p \langle \frac{\bar{x} - x_u}{S_{\bar{x}}} \langle -t_p\} = \int_{-t_p}^{+t_p} S(t,k)dt$$

где k – число степеней свободы (n – 1). Коэффициенты Стьюдента табулированы. Поэтому с помощью распределения Стьюдента можно найти вероятность того, что отклонение среднего арифметического от истинного значения измеряемой величины не превышает следующей величины:

$$\Delta = t\,S_{\bar{x}}$$

- случайная погрешность



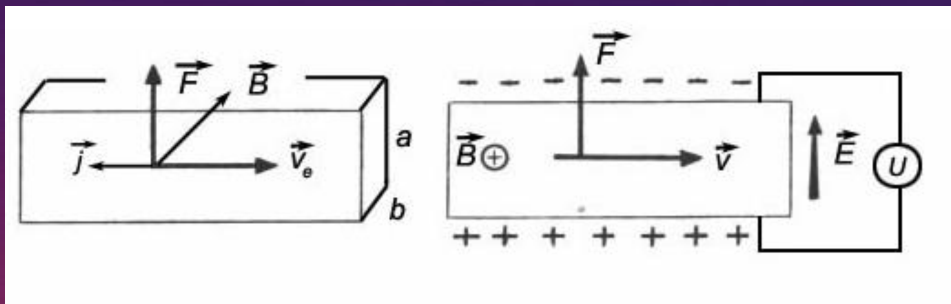
Плотность распределения Стьюдента зависит от числа степеней свободы (количества измерений) . Чем больше число измерений, тем уже кривая (меньше дисперсия)

Коэффициенты Стьюдента

N	*P*			*N*	*P*		
	0,9	0,95	0,99		0,9	0,95	0,99
2	6,31	12,71	63,66	13	1,78	2,18	3,05
3	2,92	4,30	9,92	14	1,77	2,16	3,01
4	2,35	3,18	5,94	15	1,76	2,14	2,98
5	2,13	2,78	4,60	20	1,73	2,09	2,86
6	2,02	2,57	4,03	25	1,71	2,06	2,80
7	1,94	2,45	3,71	30	1,70	2,04	2,76
8	1,90	2,36	3,50	40	1,69	2,02	2,71
9	1,86	2,31	3,35	50	1,69	2,01	2,68
10	1,83	2,26	3,25	100	1,66	1,98	2,63
11	1,81	2,23	3,17				
12	1,80	2,20	3,11	бескон.	1,645	1,960	2,576

Действия 2: провести *N* измерений, вычислить среднее арифметическое, вычислить СКО среднего арифметического, задаться доверительной вероятностью *P*, определить коэффициент Стьюдента, рассчитать доверительный интервал Δ $\overline{x} \pm \Delta; P$

Эффект Холла и квантовый эффект Холла

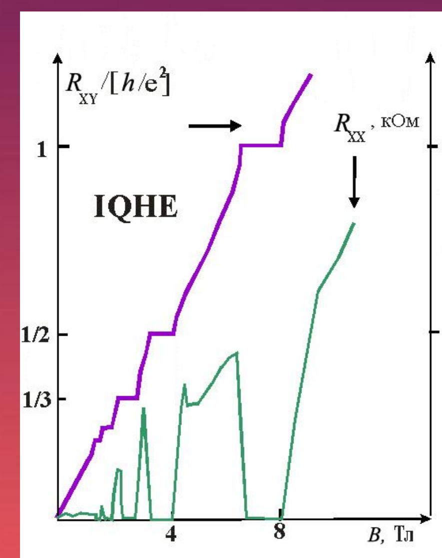


$$\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}]; \qquad R_{xy} = \frac{U_y}{I_x}$$

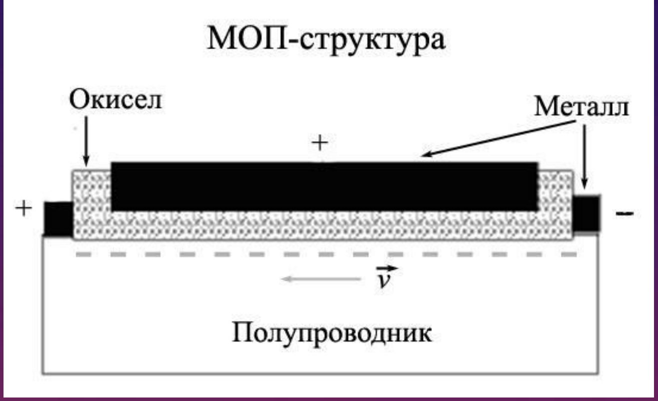
GaAs/AlGaAs

IQHE - Integer Quantum Hall Effect. Целый (нормальный) квантовый эффект Холла. Открыт в 1980 г. Ноб. премия 1985 г. (K.von Klitzing, G.Dorda, M.Pepper).

$$(R_{xy})_n = \frac{h}{ne^2};$$



$$(R_{xy})_1 = 25812{,}807 \quad \text{Îì}$$



QUANTΩ – автоматизированная, переносная система первичного сопротивления, которая представляет собой экономичное средство для точного переноса сопротивления устройства на основе квантового сопротивления Холла (I=2) на вторичные эталоны сопротивления. Переносит сопротивление устройства на основе квантового сопротивления Холла на стандартный резистор сопротивлением 1000Ω с точностью <0,02 ppm и повторением <0,01 ppm.