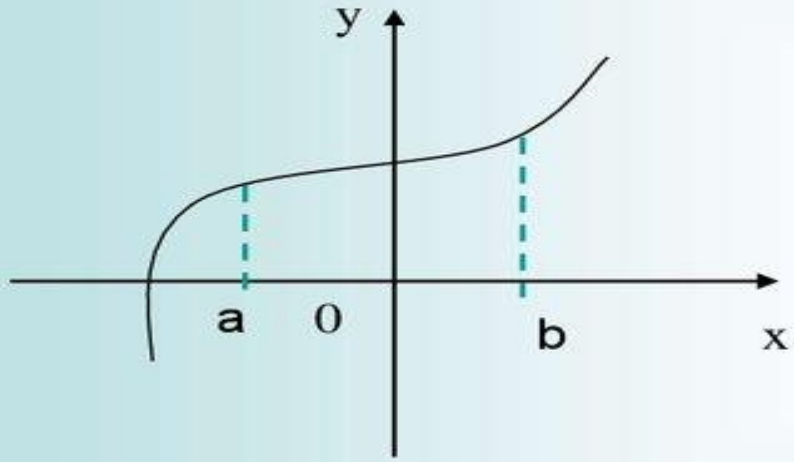
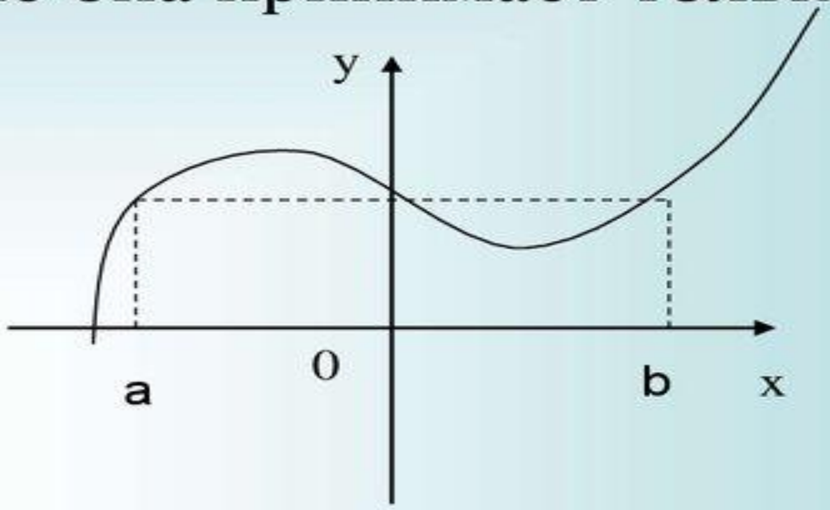
Обратные тригонометрические функции

Основные понятия

I. Понятие обратной функции

Функция $y = f(x)$, определенная на промежутке X, называется ***обратимой***, если любое свое значение она принимает только в одной точке промежутка X.





Функция $y = f(x)$ не обратима на $[a; b]$

Функция $y = f(x)$ обратима на $[a; b]$

Теорема. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на промежутке X, то она обратима на этом промежутке.

Доказательство.

Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на X, тогда по определению возрастающей функции

$$\forall\ x_1, x_2\ : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

т.о. различным значениям аргумента соответствуют различные значения функции, т.е. функция обратима.

Пусть обратимая функция $y = f(x)$ определена на промежутке X, а областью значений ее является промежуток Y. Поставим в соответствие каждому $y \in Y$ то единственное значение $x \in X$, при котором $y = f(x)$
Тогда получим функцию, которая обозначается

$$x = f^{-1}(y)$$

и называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$.

Обычно для обратной функции делают переход к привычным обозначениям, т.е. аргумент обозначают буквой x, а значение функции y.

Поэтому вместо $x = f^{-1}(y)$ пишут $y = f^{-1}(x)$

Замечание. Графики взаимообратных функций симметричны относительно прямой $y = x$

Практический приём нахождения формулы функции, обратной к функции y=f(x)

- Алгоритм

1. **Выяснить, будет ли функция $y = f(x)$ обратимой на всей области определения:** для этого достаточно выяснить, имеет ли уравнение $y = f(x)$ единственный корень относительно переменной x.
   Если нет, то попытаться выделить промежуток, где существует обратная функция (например, это может быть промежуток, где функция $y = f(x)$ возрастает или убывает).
2. **Из равенства $y = f(x)$ выразить x через y.**
3. **В полученной формуле ввести традиционные обозначения: аргумент обозначить через x, а функцию — через y.**

- Пример

Найдите функцию, обратную к функции $y = 2x + 4$.

▶ **Из равенства $y = 2x + 4$ можно** однозначно выразить x через y:

$$x = \frac{1}{2}y - 2.$$

Эта формула задает обратную функцию, но в ней аргумент обозначен через y, а функция — через x.

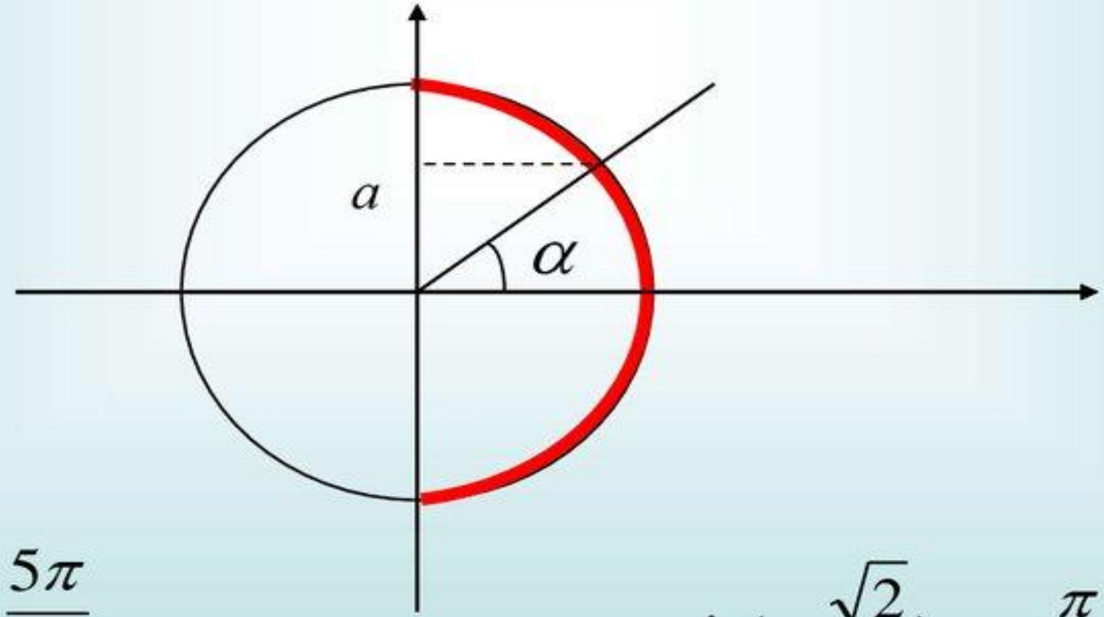
Обозначим в полученной формуле аргумент через x, а функцию — через y.

Получаем функцию $y = \frac{1}{2}x - 2$, обратную к функции $y = 2x + 4$. ◁

Смысловые значения записей arcsin a, arccos a, arctg a, arcctg a

arcsin a – это угол из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

$$\arcsin\ a=\alpha,\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \sin\ \alpha=a$$



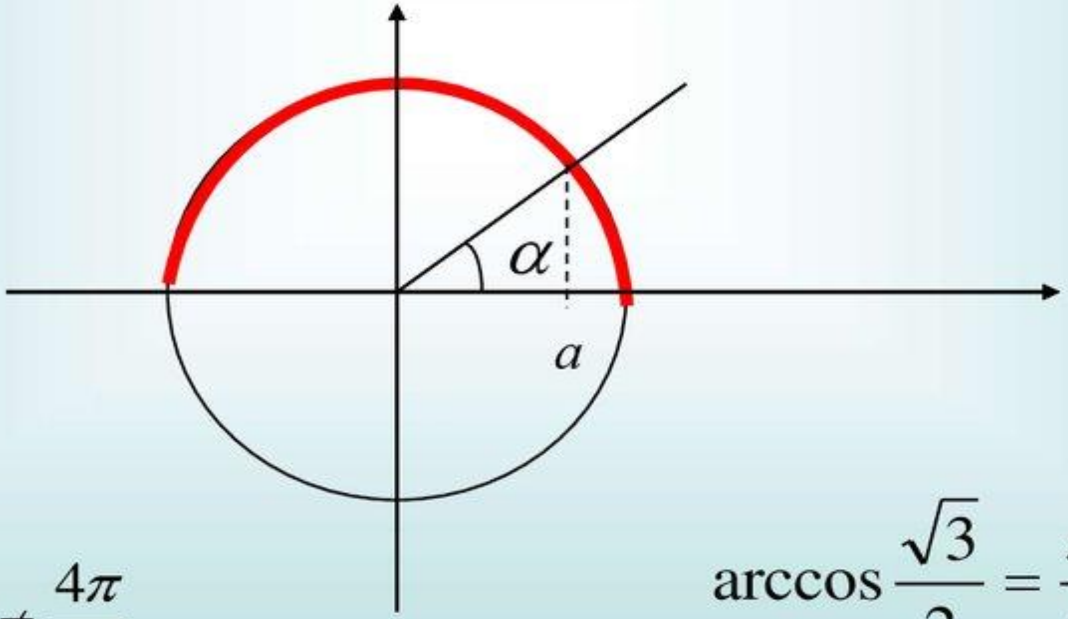
$$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}\neq\frac{5\pi}{6}$$

$$\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{\pi}{4}\neq-\frac{3\pi}{4}\neq\frac{5\pi}{4}$$

Смысловые значения записей arcsin a, arccos a, arctg a, arcctg a

arccos a – это угол из промежутка $[0;\pi]$, косинус которого равен a.

$$\arccos a = \alpha,\ \alpha \in [0;\pi] \Rightarrow \cos\alpha = a$$



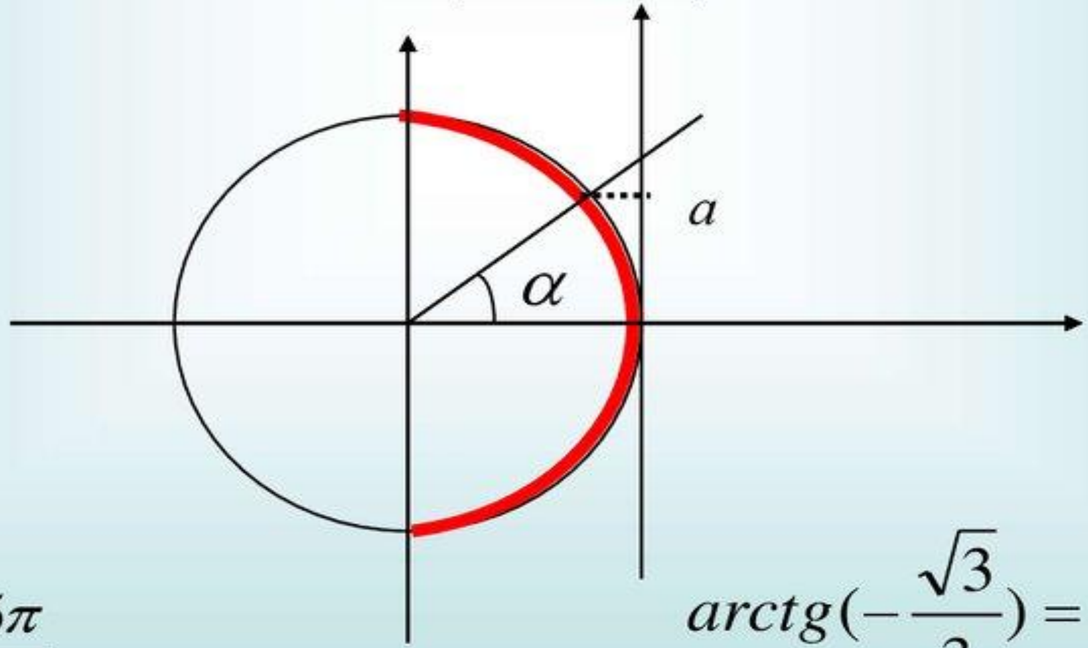
$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \neq \frac{4\pi}{3}$$

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \neq -\frac{\pi}{6}$$

Смысловые значения записей arcsin a, arccos a, arctg a, arcctg a

arctg a – это угол из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

$$arctg\ a=\alpha,\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow tg\alpha=a$$



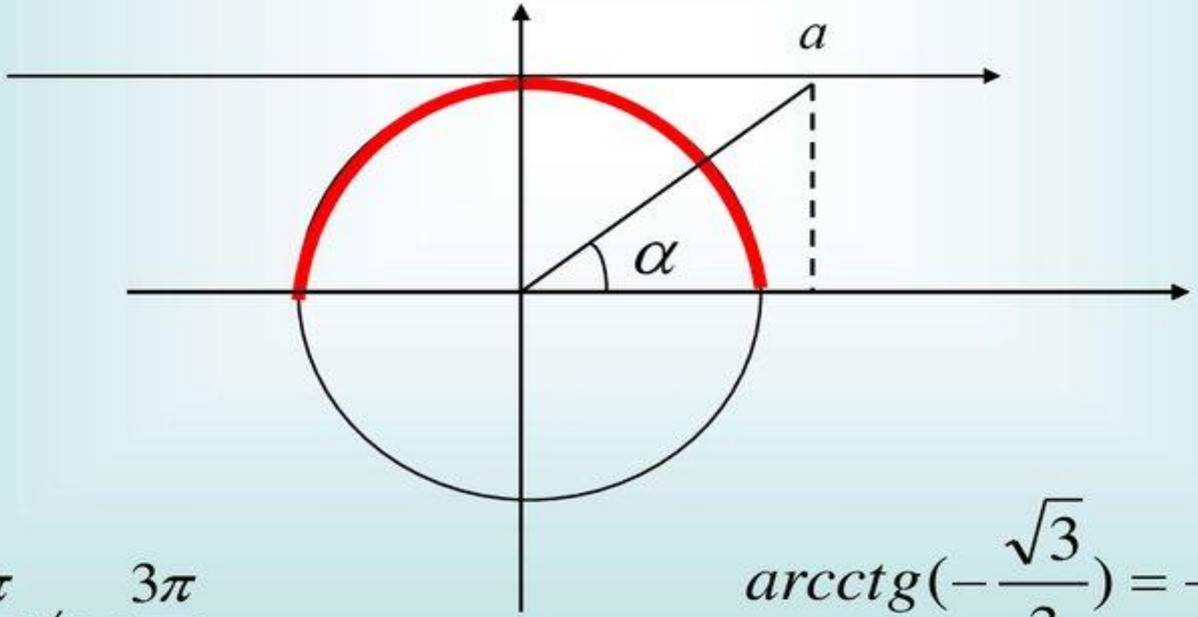
$$arctg1=\frac{\pi}{4}\neq\frac{5\pi}{4}$$

$$arctg(-\frac{\sqrt{3}}{3})=-\frac{\pi}{6}\neq\frac{5\pi}{6}$$

Смысловые значения записей arcsin a, arccos a, arctg a, arcctg a

arcctg a – это угол из промежутка $(0;\pi)$, котангенс которого равен a.

$$arcctg\ a=\alpha,\ \alpha\in(0;\pi)\Rightarrow ctg\alpha=a$$



$$arcctg1=\frac{\pi}{4}\neq-\frac{3\pi}{4}$$

$$arcctg(-\frac{\sqrt{3}}{3})=-\frac{2\pi}{3}\neq-\frac{\pi}{3}$$

Тест

Значение обратных тригонометрических функций

$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\arcsin 0 = \pi$

$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

$\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

$\arccos 1 = \pi$

$\mathrm{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$

$\mathrm{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$

$\mathrm{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$

$\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$

$\mathrm{arcctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$

Тригонометрический круг

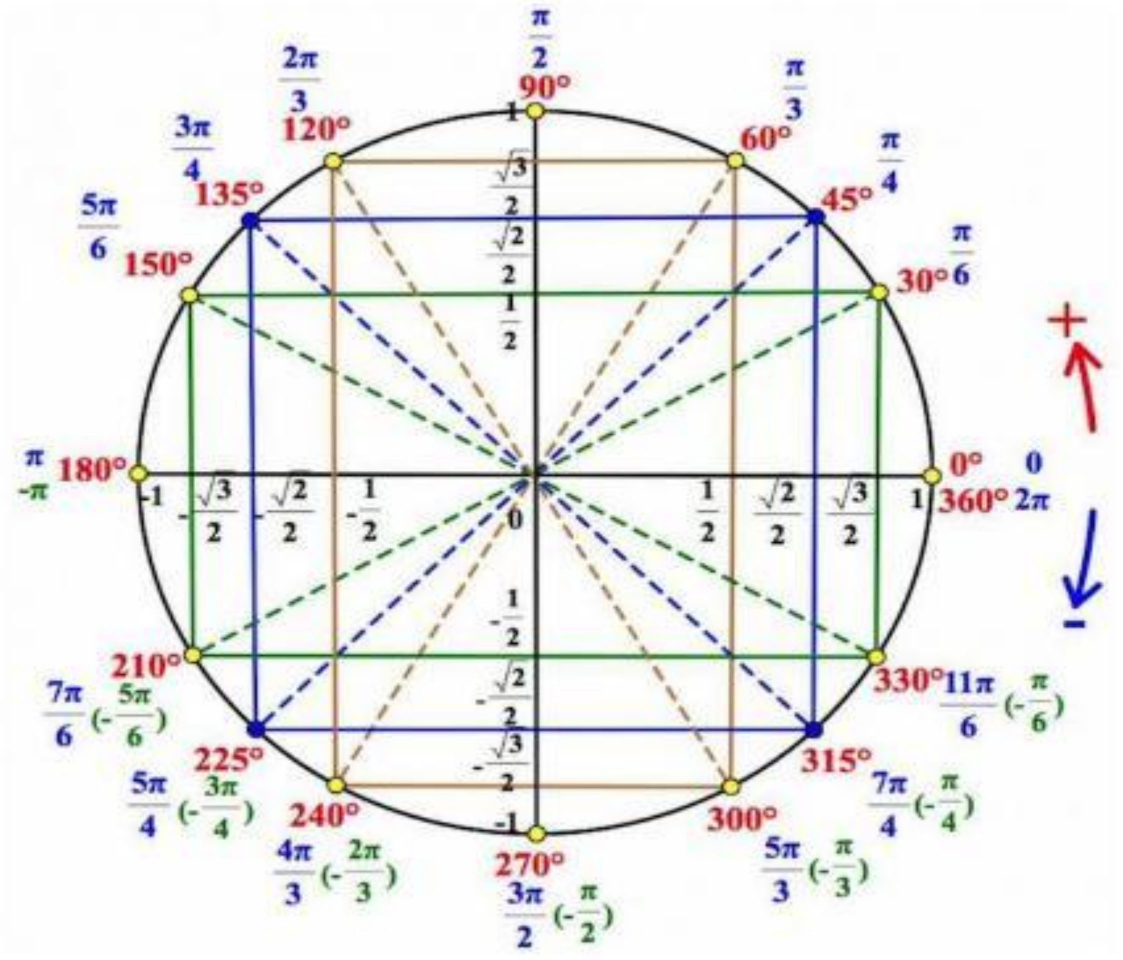


Таблица значений тригонометрических функций

ndspaces.narod.ru

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	–	0	–

Спасибо
за внимание
и работу
на уроке.