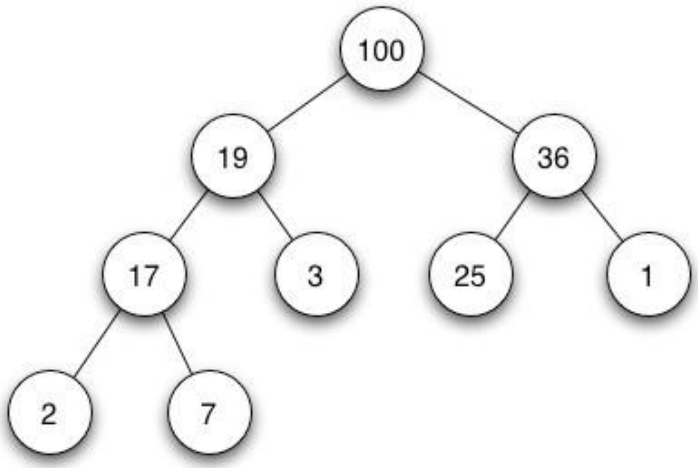
Двоичная куча

Качанов Станислав

Двоичная куча – пирамида (binary heap)

- **Двоичная куча (пирамида, сортирующее дерево, binary heap)** – это двоичное дерево, удовлетворяющее следующим условиям:

  - Приоритет любой вершины не меньше (≥), приоритета ее потомков
  - Дерево является *полным двоичным деревом* (complete binary tree) – все уровни заполнены слева направо (возможно за исключением последнего)



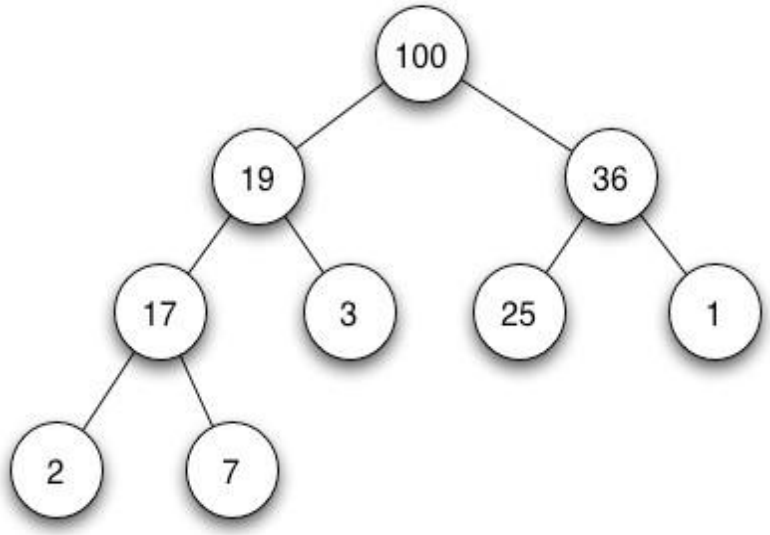
История появления

Бинарная куча была Джоном Уильямом Джозефом Уильямсом в 1964 году как структура данных для heapsort(пирамидальной сортровки).

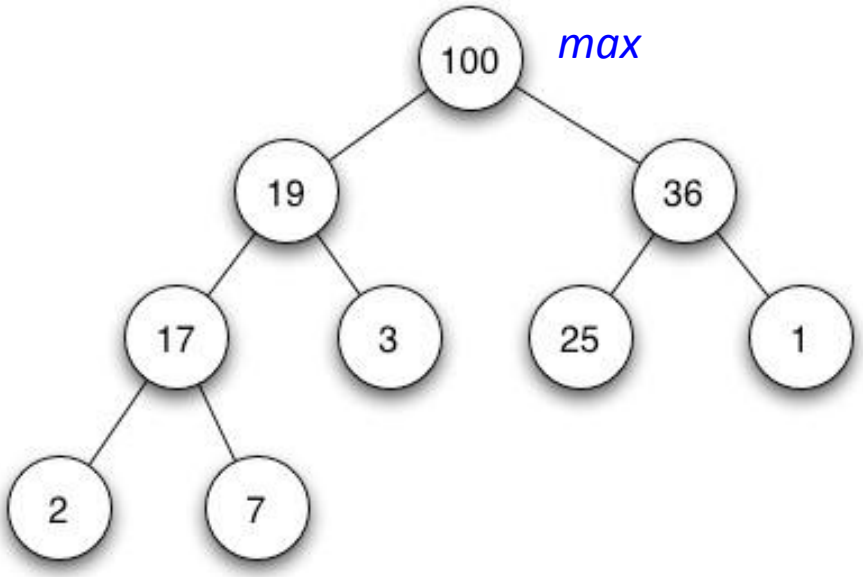
Но наибольшего применения достигла лишь в 1990-х годах, в эпоху повсеместного использования компьютеров. В том числе двоичную кучу существенно популяризировал Чарльз Лейзерсон, который также использовал её в разработке собственного языка программирования Clik.

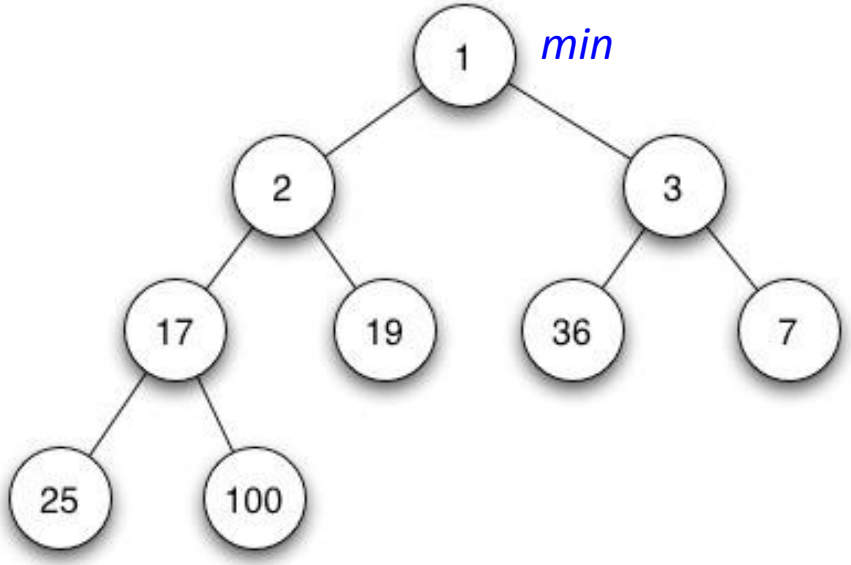
Двоичная куча

- Приоритет в любой вершине не меньше, чем приоритет её потомков
- Глубина всех листьев (расстояние до корня) отличается не более чем на 1 слой.
- Последний слой заполняется слева направо без «дырок».



Бинарная куча – пирамида (binary heap)





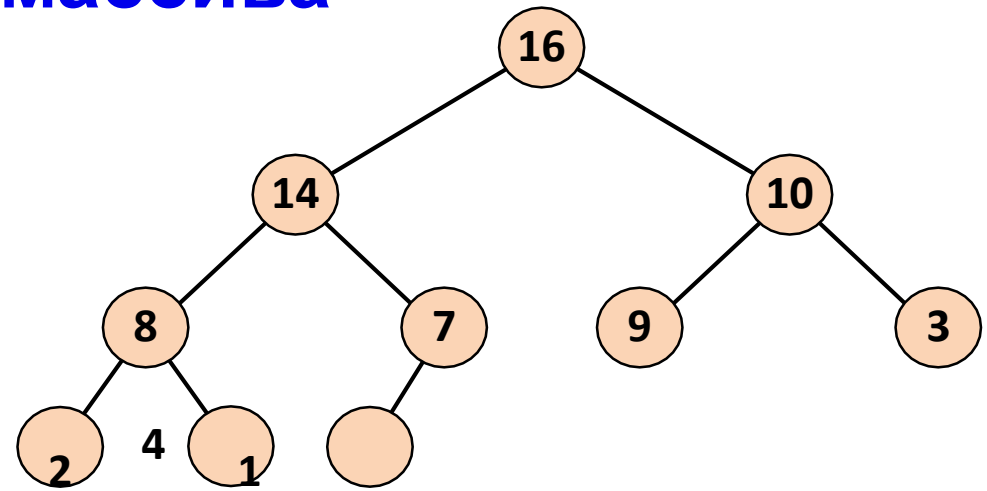
Невозрастающая пирамида max-heap

Приоритет любой вершины **не меньше (≥)**, приоритета потомков

Неубывающая пирамида min-heap

Приоритет любой вершины **не больше (≤)**, приоритета потомков

Реализация бинарной кучи на основе массива



max-heap (10 элементов)

Массив *H*[1..14] приоритетов (ключей):

16	14	10	8	7	9	3	2	4	1				

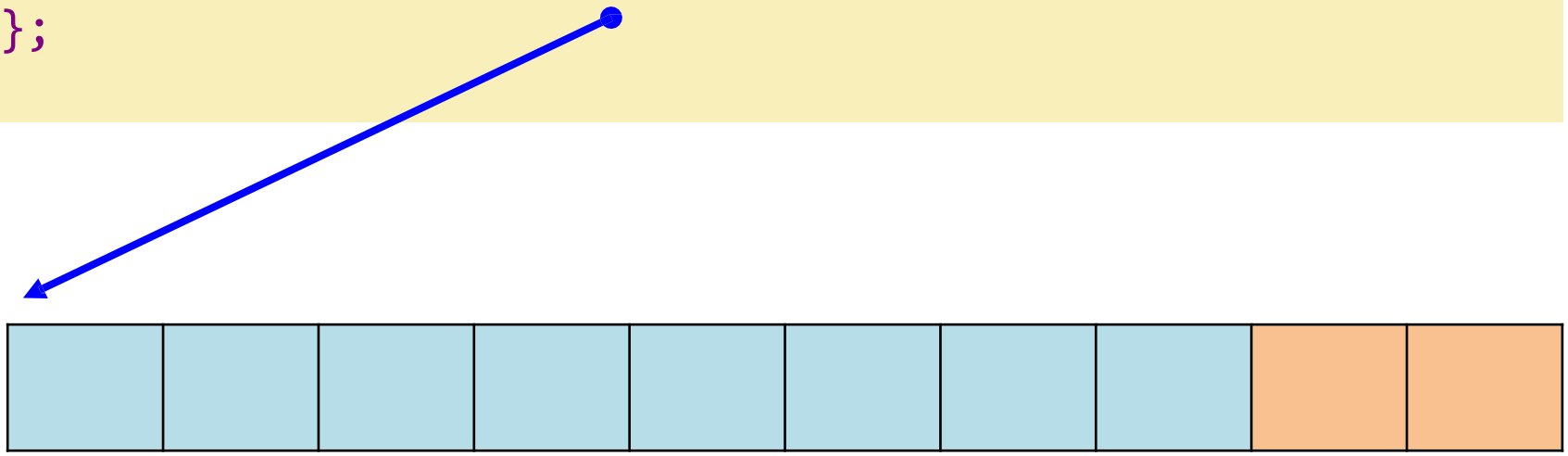
- Корень дерева храниться в ячейке $H[1]$ – максимальный элемент
- Индекс родителя узла *i*: $Parent\ i = \lfloor i/2 \rfloor$
- Индекс левого дочернего узла: $Left\ i = 2i$
- Индекс правого дочернего узла: $Right\ i = 2i + 1$

$H.Parent\ i \geq H[i]$

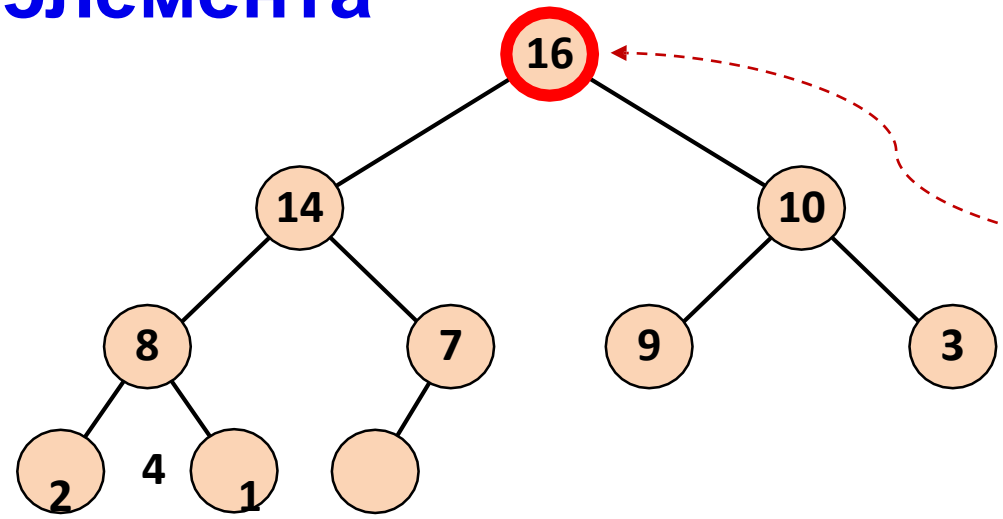
Реализация бинарной кучи на основе массива

```
struct heapnode {
    int key;          /* Priority (key) */
    char *value;      /* Data */
};

struct heap {
    int maxsize;                /* Размер массива*/
    int nnodes;                 /* Номер ключа*/
    struct heapnode *nodes;     /* Nodes: [0..maxsize] */
};
```



Поиск максимального элемента



max-heap (10 элементов)

Максимальны эйемент хранится в корне max-heap

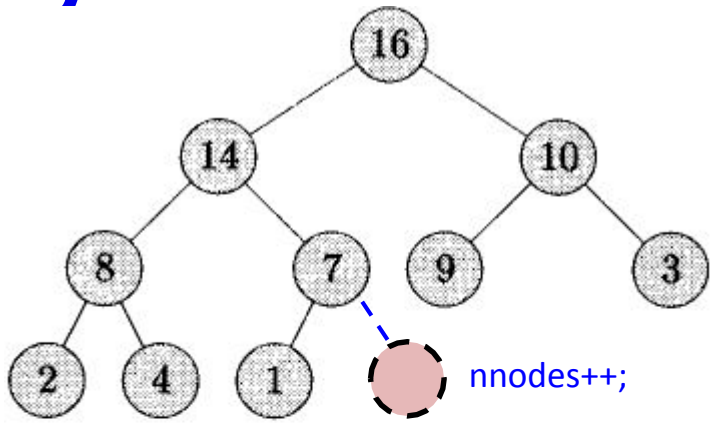
Массив *H*[1..14] приоритетов (ключей):

16	14	10	8	7	9	3	2	4	1				

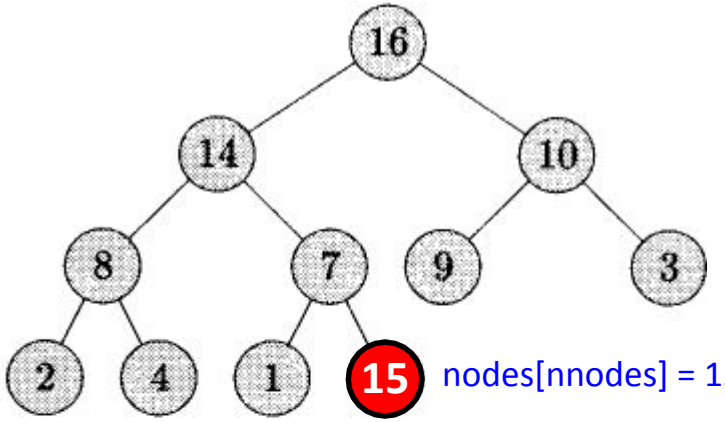
- Корень дерева храниться в ячейке $H[1]$ – максимальный элемент
- Индекс родителя узла *i*: $Parent\ i = \lfloor i/2 \rfloor$
- Индекс левого дочернего узла: $Left(i) = 2i$
- Индекс правого дочернего узла: $Right\ i = 2i + 1$

$$H.Parent\ i > H[i]$$

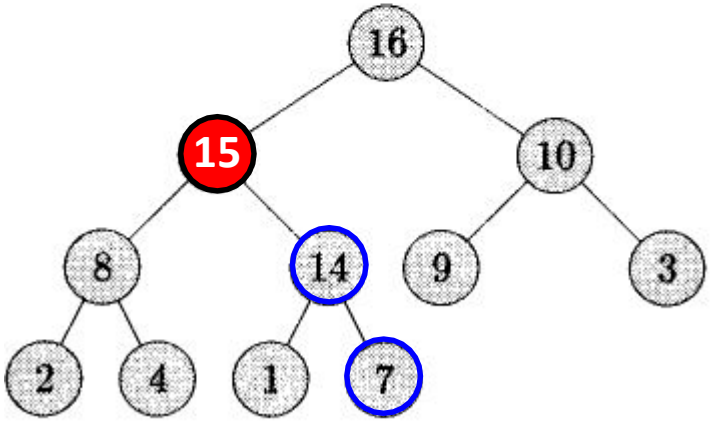
Вставка элемента в бинарную кучу



(а)

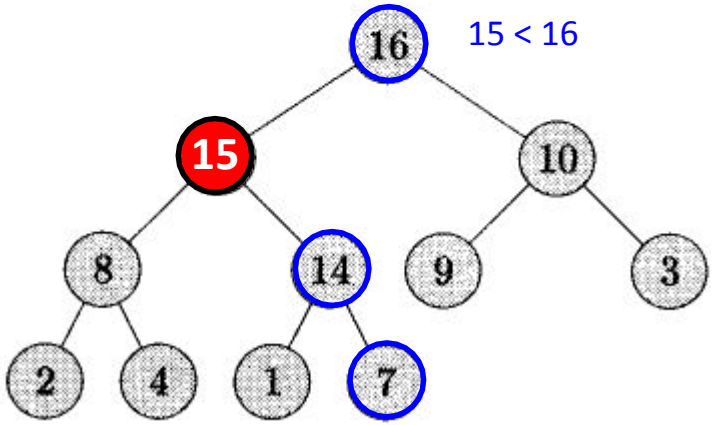


(б)



(в)

15 > 7 => swap(15, 7)
15 > 14 => swap(15, 14)



(г)

Вставка элемента с приоритетом 15

Вставка элемента в бинарную кучу

```
void addelem(int n) {
  int i, parent;
  i = HeapSize;
  h[i] = n;
  parent = (i-1)/2;
  while(parent >= 0 && i > 0)  {
    if(h[i] > h[parent]) {
      int temp = h[i];
      h[i] = h[parent];
      h[parent] = temp;
    }
    i = parent;
    parent = (i-1)/2;
  }
  HeapSize++;
}
```

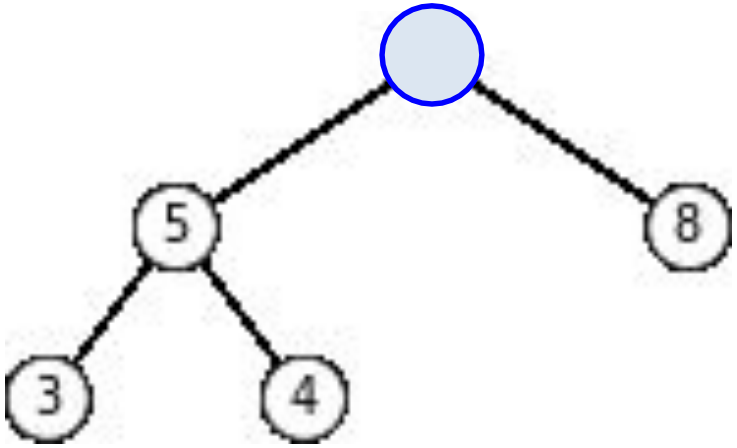
$T_{Insert} = O(\log n)$

Поиск максимального элемента

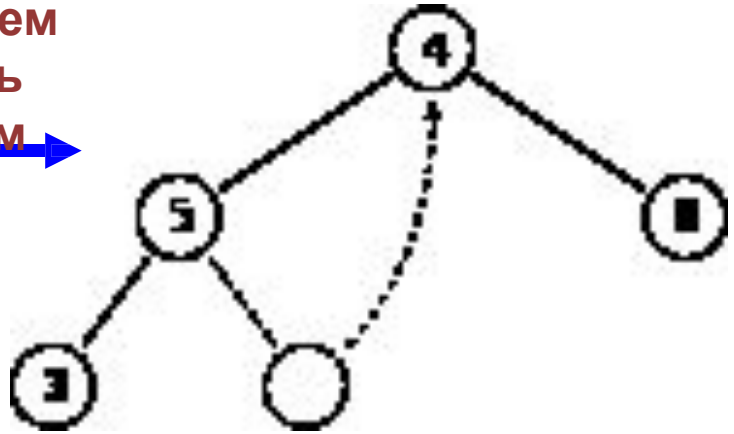
```
struct heapnode *heap_max(struct heap *h)
{
    if (h->nnodes == 0)
        return NULL;
    return &h->nodes[1];
}
```

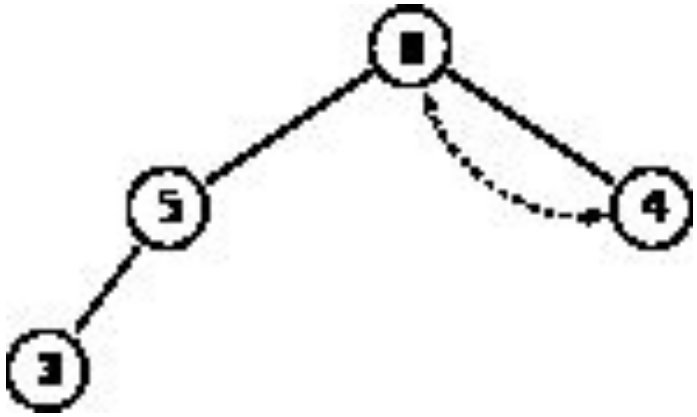
$T_{Max} = O(1)$

Удаление максимального элемента



Заменяем корень листом





Восстанавливаем свойства кучи

heap_heapify(H, 1)

Удаление максимального элемента

```
struct heapnode heap_extract_max(struct heap *h)
{
    if (h->nnodes == 0)
        return (struct heapnode){0, NULL};

    struct heapnode maxnode = h->nodes[1];
    h->nodes[1] = h->nodes[h->nnodes];
    h->nnodes--;
    heap_heapify(h, 1);

    return maxnode;
}
```

Удаление максимального элемента

```
int getmax() {
  int x;
  x = h[0];
  h[0] = h[HeapSize-1];
  HeapSize--;
  heapify(0);
  return(x);
  }
};
```

Создание пустой кучи

```
struct heap *heap_create(int maxsize)
{
    struct heap *h;

    h = malloc(sizeof(*h));
    if (h != NULL) {
        h->maxsize = maxsize;
        h->nnodes = 0;
        /* Heap nodes [0, 1, ..., maxsize] */
        h->nodes = malloc(sizeof(*h->nodes) * (maxsize +
        1));
        if (h->nodes == NULL) {
            free(h);
            return NULL;
        }
    }
    return h;
}
```

$T_{Create} = O(1)$

Удаление кучи

```
void heap_free(struct heap *h)
{
    free(h->nodes);
    free(h);
}

void heap_swap(struct heapnode *a,
               struct heapnode *b)
{
    struct heapnode temp;

    temp = *a;
    *a = *b;
    *b = temp;
}
```

Восстановление свойств кучи (max-heap)

```
void heap_heapify(struct heap *h, int index)
{
    for (;;) {
        int left = 2 * index;
        int right = 2 * index + 1;

        // Find largest key: A[index], A[left] and
        A[right]
        int largest = index;
        if (left <= h->nnodes &&
            h->nodes[left].key > h->nodes[index].key)
        { largest = left; }
        if (right <= h->nnodes &&
            h->nodes[right].key > h->nodes[largest].key)
        { largest = right; }

        if (largest == index)
            break;

        heap_swap(&h->nodes[index],
    }   &h->nodes[largest]);  index = largest;
}
```

$T_{Heapify} = O(\log n)$

Работа с бинарной кучей

```
int main()
{
    struct heap *h;
    struct heapnode node;

    h = heap_create(100);
    heap_insert(h, 16, "16");
    heap_insert(h, 14, "14");
    heap_insert(h, 10, "10");
    heap_insert(h, 8, "8");
    heap_insert(h, 7, "7");
    heap_insert(h, 9, "9");
    heap_insert(h, 3, "3");
    heap_insert(h, 2, "2");
    heap_insert(h, 4, "4");
    heap_insert(h, 1, "1");


    node = heap_extract_max(h);
    printf("Item: %d\n", node.key);
    return 0;
}
```

Изменение кучи

```
void heapify(int i) {
  int left, right;
  int temp;
  left = 2 * i + 1;
  right = 2 * i + 2;
  if(left < HeapSize) {
    if(h[i] < h[left]) {
      temp = h[i];
      h[i] = h[left];
      h[left] = temp;
      heapify(left);
    }
  }
```

Увеличение ключа

```
int heap_increase_key(struct heap *h, int index, int key)
{
    if (h->nodes[index].key > key)
        return -1;

    h->nodes[index].key = key;
    for ( ; index > 1 &&
            h->nodes[index].key > h->nodes[index /
            2].key;  index = index / 2)
    {
        heap_swap(&h->nodes[index], &h->nodes[index / 2]);
    }
    return index;
}
```

$T_{Increase} = O(\log n)$

Построение бинарной кучи

- Дан неупорядоченный массив A длины n
- Требуется построить из его элементов бинарную кучу

Построение бинарной кучи (v1)

- Дан неупорядоченный массив *A* длины *n*
- Требуется построить из его элементов бинарную кучу

```
func
    h = CreateBinaryHeap(n)          // O(1)
    for i = 1 to n do
        HeapInsert(h, A[i], A[i])    // O(logn)
    end for
end function
```

$T_{BuildHeap} = O(n \log n)$

Построение бинарной кучи (v2)

- Дан неупорядоченный массив *A* длины *n*
- Требуется построить из его элементов бинарную

```
function MaxHeapify(A[1:n],
i)  left = 2 * i        // left sub heap
    right = 2 * i +     // right sub heap
    1  largest = i
    if left <= n and A[left] > A[i] then
        largest = left
    if right <= n and A[right] > A[largest]
    then
        largest = right
    if largest != i then
        heap_swap(A[i],
        A[largest])  MaxHeapify(A,
        largest)
    end if
end function
function BuildMaxHeap(A[1:n])
    h = CreateBinaryHeap(n)        // O(1)
    for i = ⌊n / 2⌋ downto 1 do
        MaxHeapify(A, i)           // O(h)
end function
```

$T_{BuildHeap} = O(n)$

Использование двоичной кучи

Очередь с приоритетом (priority queue)

- **Очередь с приоритетом (priority queue)** – очередь, в которой элементы имеют приоритет (вес); первым извлекается элемент с наибольшим приоритетом (ключом)

- **Поддерживаемые операции:**
  - **Insert** – добавление элемента в очередь
  - **Max** – возвращает элемент с максимальным приоритетом
  - **ExtractMax** – удаляет из очереди элемент с максимальным приоритетом
  - **IncreaseKey** – изменяет значение приоритета заданного элемента
  - **Merge** – сливает две очереди в одну

Значение (value)	Приоритет (priority)
Слон	3
Кит	1
Лев	15

Сравнение оценки алгоритмов

- В таблице приведены трудоемкости операций очереди с приоритетом (в худшем случае, worst case)
- Символом ‘*’ отмечена амортизированная сложность

Операция	Binary heap	Binomial heap	Fibonacci heap	Pairing heap	Brodal heap
FindMin	$\Theta(1)$	$O(\log n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)^*$	$\Theta(1)$
DeleteMin	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$	$O(\log n)^*$	$O(\log n)^*$	$O(\log n)$
Insert	$\Theta(\log n)$	$O(\log n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)^*$	$\Theta(1)$
DecreaseKey	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(1)^*$	$O(\log n)^*$	$\Theta(1)$
Merge/Union	$\Theta(n)$	$\Omega(\log n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)^*$	$\Theta(1)$

Алгоритм Дейкстры

Обозначим через n количество вершин, а через m – количество рёбер в графе G.
В обычном простейшем случае получаем O(n*n).

С помощью двоичной кучи сложность алгоритма получается:
O(log n * (n + m)).
Так как время удаления вершины из станет log n при том, что время модификации тоже возрастёт до log n.
Так как цикл выполняется порядка n раз, а количество релаксаций (смен меток) не больше m, O(log n * (n + m)).

Сортировка на базе бинарной кучи

- На основе бинарной кучи можно реализовать алгоритм сортировки с вычислительной сложностью $O(n\log n)$ в худшем случае

Как ?

Сортировка на базе бинарной кучи

- На основе бинарной кучи можно реализовать алгоритм сортировки с вычислительной сложностью $O(n\log n)$ в худшем случае

Как ?

```
function HeapSort(v[1:n])
    h = CreateBinaryHeap(n)
    for i = 1 to n do
        HeapInsert(h, v[i], v[i])
    end for
    for i = 1 to n do
        v[i] = HeapRemoveMax(h)
    end for
end function
```

$T_1 = O(1)$

$T_2 = O(\log n)$

$T_3 = O(\log n)$

Сортировка на базе бинарной кучи

- На основе бинарной кучи можно реализовать алгоритм сортировки с вычислительной сложностью $O(n\log n)$ в худшем случае

Как ?

```
function HeapSort(v[1:n])
    h = CreateBinaryHeap(n)
    for i = 1 to n do
        HeapInsert(h, v[i], v[i])
    end for
    for i = 1 to n do
        v[i] = HeapRemoveMax(h)
    end for
end function
```

$T_1 = O(1)$

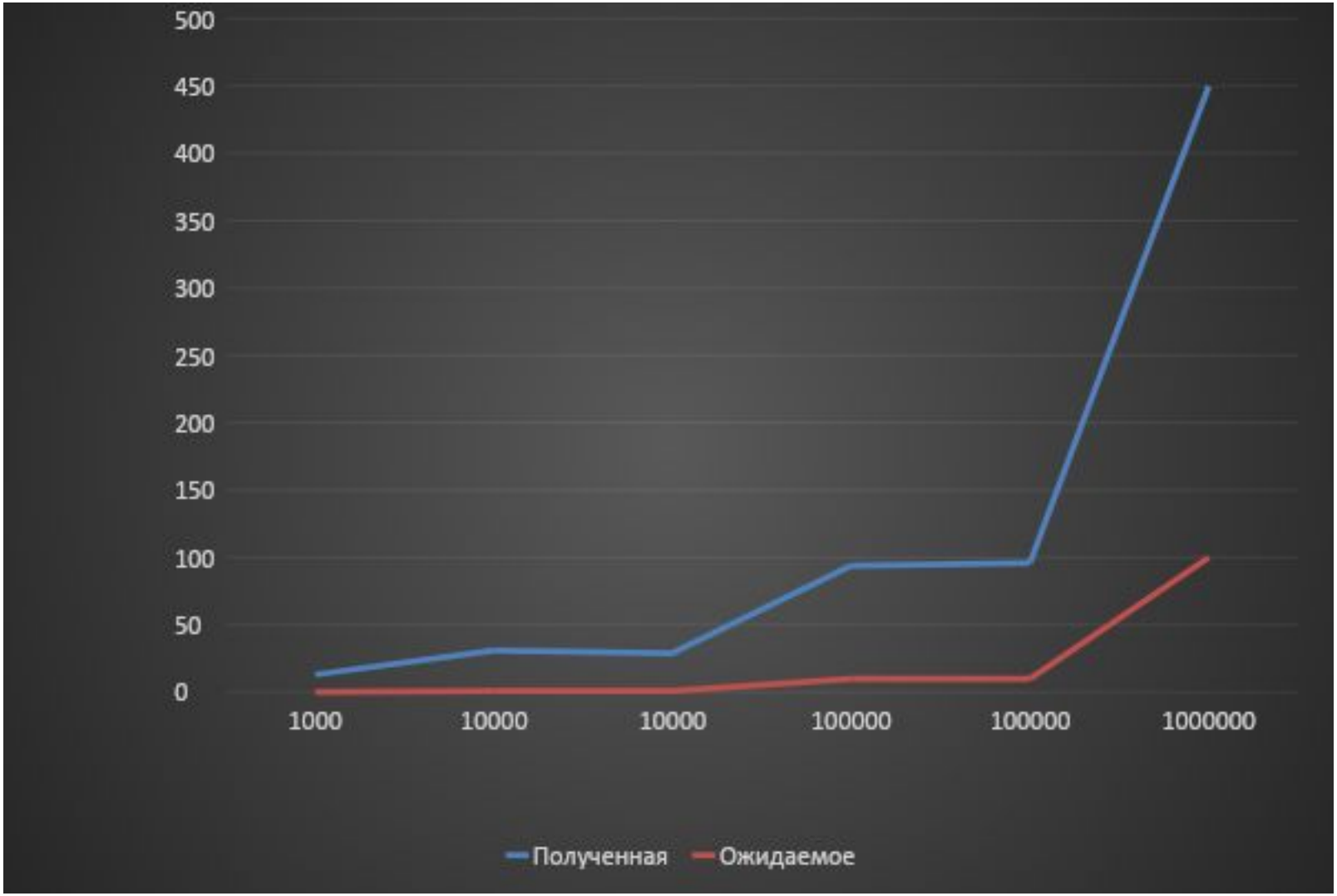
$T_2 = O(\log n)$

$T_3 = O(\log n)$

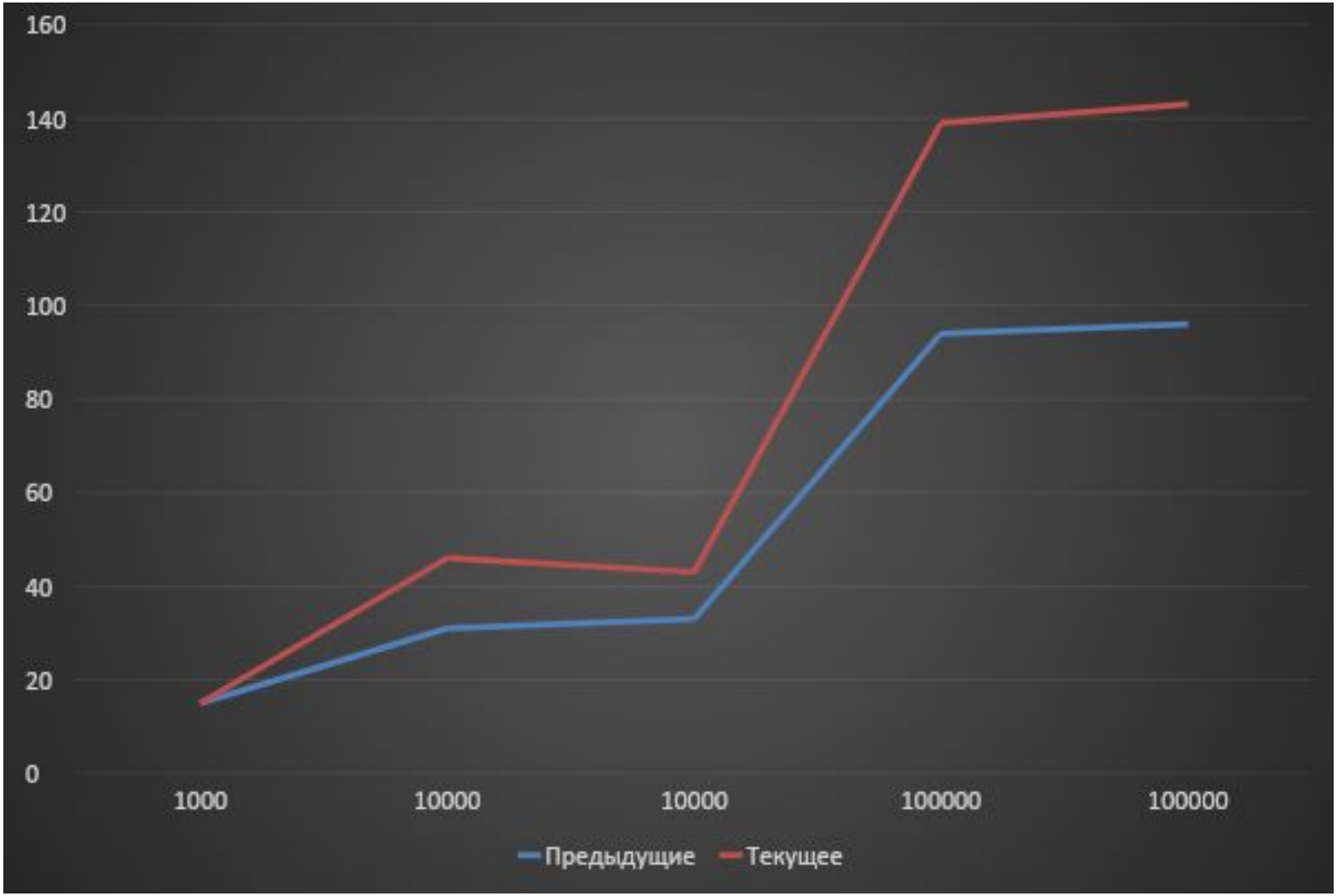
$T_{HeapSort} = 1 + n\log n + n\log n = O(n\log n)$

Оценки работы алгоритма

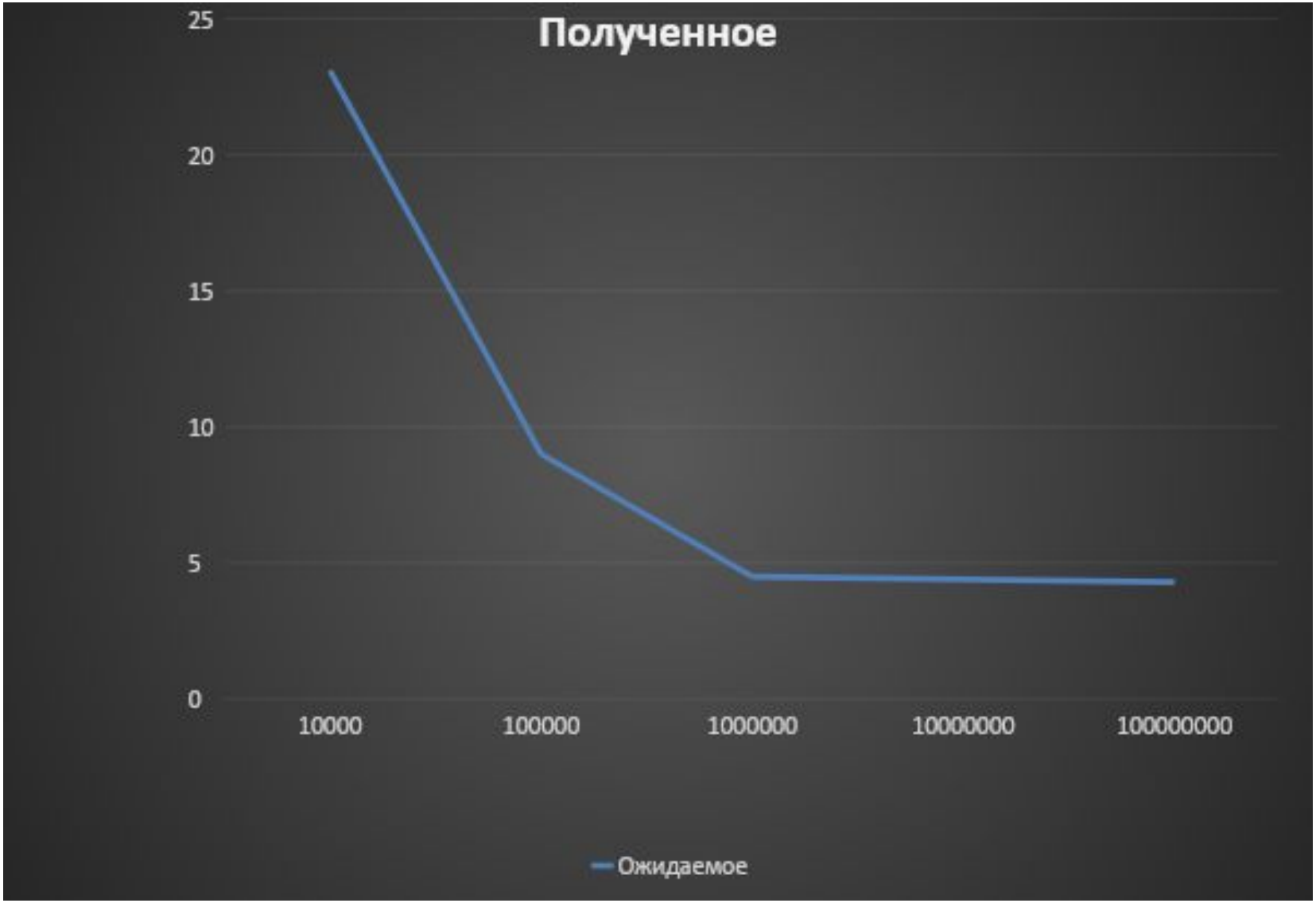
Скорость работы программы



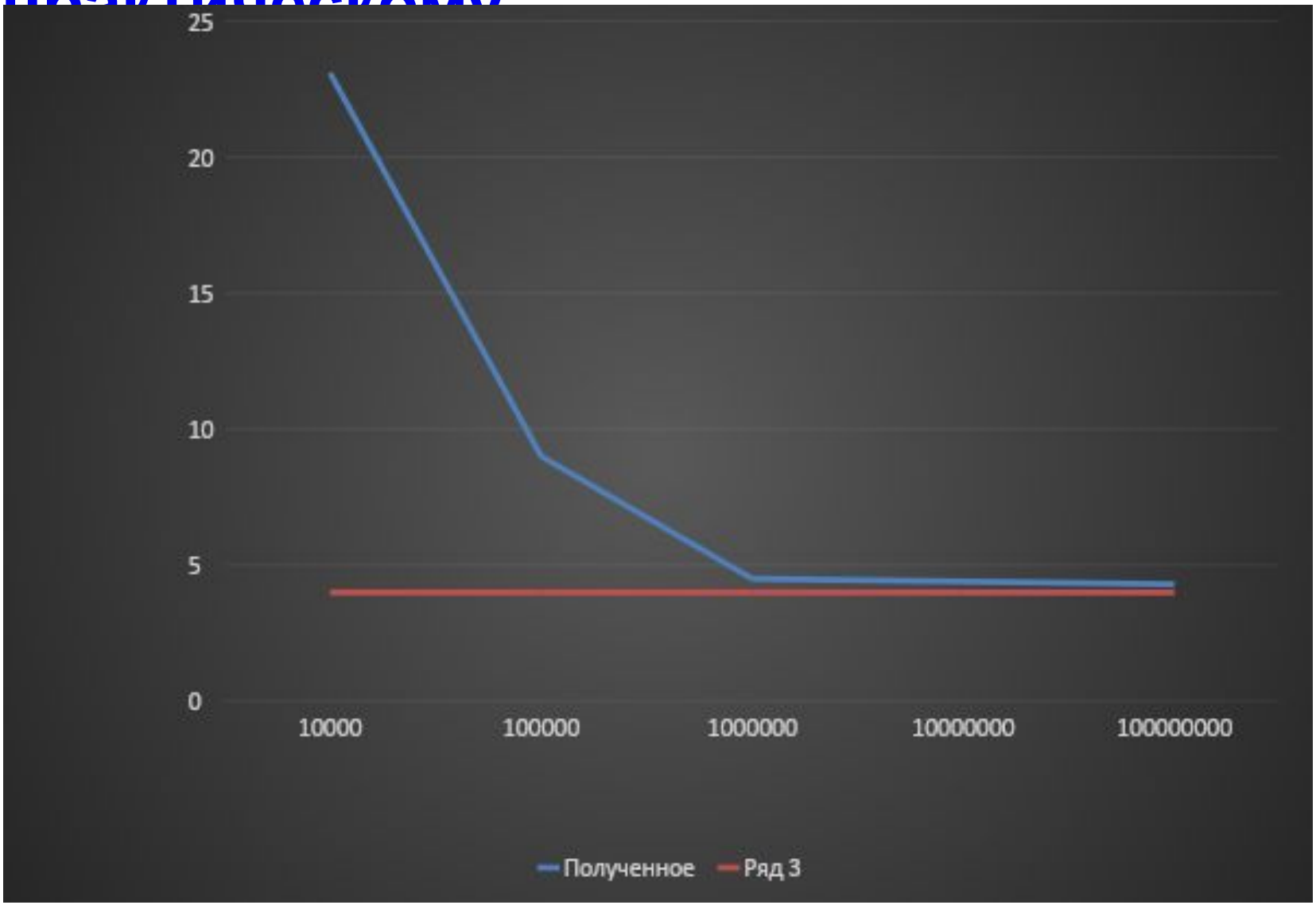
Скорость работы программы с выводом данных



Отношение


Полученное
25
20
15
10
5
0
10000
100000
1000000
10000000
100000000
Ожидаемое

Отношение теоретического к практическому



Спасибо за внимание!