Комплексные числа и квадратные уравнения.

-решение квадратных уравнений на множестве комплексных чисел;

-алгоритм извлечения квадратного корня из комплексного числа;

-полезные следствия для формулы корней квадратного уравнения

Квадратное уравнение с действительными

$$ax^2 + \boldsymbol{b}x + c = \mathbf{0},\ a \neq \mathbf{0}$$

$$D = b^2 - 4ac,$$

<u>если $D = 0$,</u>

то уравнение имеет единственный корень,

<u>если $D > 0$,</u>

то уравнение имеет два различных действительных корня,

<u>если $D < 0$,</u>

то корней (действительных)нет. ?

На множестве С можно находить корни любых квадратных уравнений!

- Как извлечь квадратный корень из отрицательных действительных чисел?
- Решение квадратных уравнений с действительными коэффициентами и D<0.
- Как извлечь квадратный корень из любого комплексного числа? (в алгебраической и тригонометрической форме записи).
- Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами.

Как извлечь квадратный корень из отрицательных действительных чисел?

- <u>Определение:</u> квадратным корнем(корнем второй степени) из комплексного числа z называют комплексное число, квадрат которого равен z

$$\sqrt{-1} = ?$$

$$z^2 = -1, (x + iy)^2 = -1;\ x, y \in R$$

$$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -1 + 0 \cdot i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2ixy = 0 \end{cases} \longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, -y^2 = -1, y^2 = 1, y = \pm 1 \\ y = 0, x^2 = -1, \text{действительных корней нет} \end{array} \right.$$

$$(0; 1) <=> \boxed{z = i} \text{ или } (0; -1) <=> \boxed{z = -i}$$

Формула извлечения квадратного корня из отрицательных действительных чисел

если $d < 0, d \in R$, то $\sqrt{d} = \pm\sqrt{-d} \cdot i$

$$\sqrt{-4} = \pm\sqrt{-(-4)} \cdot i = \pm 2i$$

$$\sqrt{-10} = \pm\sqrt{-(-10)} \cdot i = \pm\sqrt{10} \cdot i$$

$$\sqrt{-36} = \pm\sqrt{-(-36)} \cdot i = \pm 6i$$

Решение квадратных уравнений с действительными коэффициентами и D<0.

- <u>Важно знать!</u>

Если у уравнения есть комплексный корень, то и сопряжённое ему число – тоже является корнем этого уравнения!

$$z^2 - 3z + 8{,}5 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8{,}5 = -25$$

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{-25}}{2} = \frac{3 \pm 5i}{2} = \boxed{1{,}5 \pm 2{,}5}$$

Сопряжённые числа

Как извлечь квадратный корень из любого комплексного числа? (в алгебраической и тригонометрической форме записи).

- **Теорема:** **Если b≠0, то**

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\cdot\frac{b}{|b|}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$$

Что равносильно системе условий:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Например: $\sqrt{3-4i}=?$

$$\sqrt{3-4i}=x+yi$$

$$3-4i=(x+yi)^2$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xy=-4 \end{cases}$$

$x=2, y=-1;$ или $x=-2, y=1$

$(2;-1) \Leftrightarrow z=2-i$ $\quad (-2;1) \Leftrightarrow z=-2+i$

Избежать громоздких вычислений позволяет тригонометрическая форма записи комплексного числа.

- **Теорема:** $\sqrt{\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \pm\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

Доказательство:

$$z = \sqrt{\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)} \longrightarrow z^2 = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Всегда 2 корня!

$$\left(\sqrt{\rho}\,(\cos\alpha/2 + i\sin\alpha/2)\right)^2 = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$\left(-\sqrt{\rho}\,(\cos\alpha/2 + i\sin\alpha/2)\right)^2 = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$\left(\sqrt{\rho}\,(\cos\alpha/2 + i\sin\alpha/2)\right)^2 = \rho\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 =$$

$$= \rho\cdot\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} + 2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \rho\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Аналогично:

$$\left(-\sqrt{\rho}\,(\cos\alpha/2 + i\sin\alpha/2)\right)^2 = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Важно запомнить!

При возведении комплексного числа в квадрат – его аргумент удваивается!!!

Алгоритм извлечения квадратного корня из комплексного числа:

1) Найти модуль ρ и аргумент α этого числа;
2) Провести окружность радиусом $\sqrt{\rho}$ с центром в начале координат;
3) Провести через начало координат прямую под углом $\frac{\alpha}{2}$ к положительному направлению оси абсцисс;
4) Две точки пересечения проведённых окружности и прямой – дают ответ.

$$\sqrt{-2+2i\sqrt{3}} = ?$$

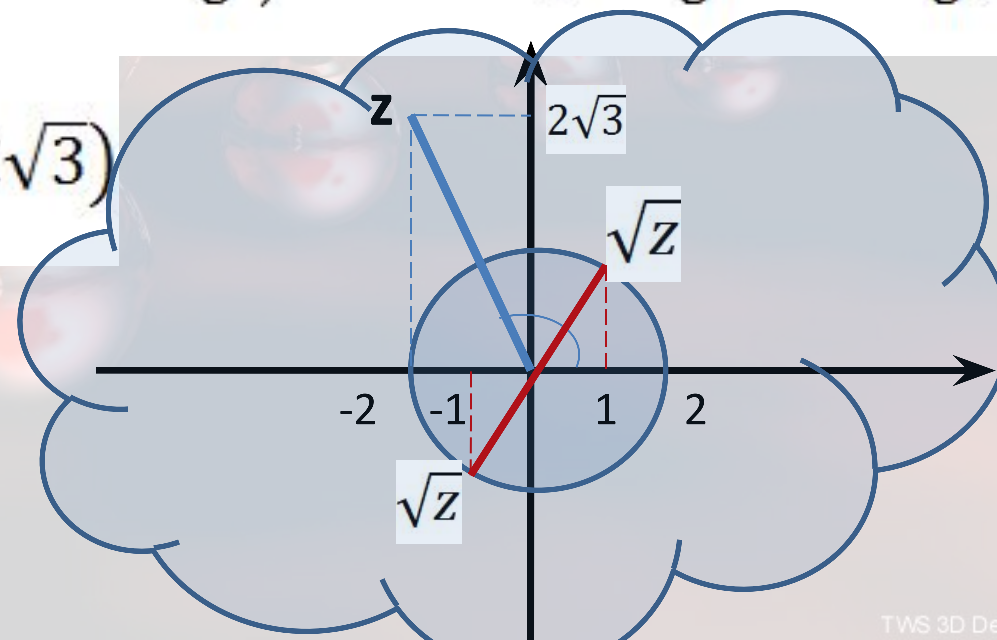
1). $\rho = |z| = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$

$$-2+2i\sqrt{3} = 4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sqrt{-2+2i\sqrt{3}} = \sqrt{4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)} = \pm\sqrt{4}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \pm 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm\left(1+i\sqrt{3}\right)$$



2)-4).

Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами.

- Так как множеств $\sqrt{D}$ $\pm\sqrt{D}$ совпадают между собой , то для решения квадратных уравнений с комплексными коэффициентами можно сохранить привычную формулу корней квадратного уравнения:

$$az^2 + bz + c = 0, a \neq 0, <=> z = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Полезные следствия для формулы корней квадратного уравнения:

- (теорема Виета)

Если z_1 и z_2 –корни квадратного уравнения

$$az^2 + bz + c = 0$$

то

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}; \; z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

- (формула разложения квадратного трёхчлена на линейные множители)

Если z_1 и z_2 –корни квадратного уравнения

$$az^2 + bz + c = 0$$

то

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

Домашнее задание:

- §35 изучить
- № 35.7
- № 35.12
- № 35.13