



Некоторые приемы решения  
целых уравнений. Простейшие  
уравнения с параметром.



Возвратным называется уравнение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

где  $a_n = a_{n-k}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots, n$ .

## Примеры возвратных уравнений

- а)  $7x^3 - 2x^2 - 2x + 7 = 0$ ;
- б)  $5x^3 - 3x^2 - 3x + 5 = 0$ ;
- в)  $12x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 7x + 12 = 0$ ;
- г)  $2x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 8x + 2 = 0$ ;
- д)  $6x^5 - 7x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 7x + 6 = 0$ .

*Пример 1 Решим возвратное уравнение*

$$7x^3 - 2x^2 - 2x + 7 = 0$$

*Выполним группировку первого и последнего, второго и третьего членов уравнения, получим:*

$$(7x^3 + 7) - 2x(x + 1) = 0;$$

$$7(x + 1)(x^2 - x + 1) - 2x(x + 1) = 0; \quad \text{вынесем общий сложный множитель за скобки}$$

$$(x + 1)(7x^2 - 7x + 7 - 2x) = 0;$$

$$x + 1 = 0 \quad \text{или} \quad 7x^2 - 9x + 7 = 0$$

$$x = -1 \quad D < 0, \text{ квадратное уравнение корней не имеет}$$

*Ответ:*  $x = -1$ .

*Пример 2 Решим возвратное уравнение*

$$x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$x^2 - 7x + 8 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

$$y = x + \frac{1}{x}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$(y^2 - 2) - 7y + 8 = 0$$

$$y^2 - 7y + 6 = 0$$

$$y_1 = 1 \quad y_2 = 6$$

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x + \frac{1}{x} = 6$$

$$x_1 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$x_2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$x_2 = 3 - 2\sqrt{2}$$



**Неизвестные величины** принято обозначать последними буквами латинского алфавита ( $x, y, z, \dots$ ), параметры – первыми буквами ( $a, b, c, \dots$ ).



Решить уравнение с параметром – значит для каждого значения параметра **найти множество всех корней** данного уравнения или доказать, что корней нет.

Пример 3. Решить уравнение  $ax = 1$ .

---

Решение.

1. если  $a \neq 0$ :  $x = \frac{1}{a}$ ;

2. если  $a = 0$ :  $0 \cdot x = 1$  – не имеет решений;





Пример 4. Решить уравнение  $a^2x - 1 = x + a$ .

---

Решение.

$$a^2x - 1 = x + a;$$

$$a^2x - x = a + 1;$$

$$x(a^2 - 1) = a + 1;$$

1. если  $a^2 - 1 \neq 0$ , то есть  $a \neq \pm 1$ :  $x = \frac{1}{a}$ ;  $x = \frac{1}{a}$ ;

2. если  $a = 1$ , то есть  $0 \cdot x = 2$ : уравнение не имеет решений;

3. если  $a = -1$ , то есть  $0 \cdot x = 0$ :  $x = \frac{1}{a}$ ;

$$x = \frac{1}{a};$$

$$x = \frac{1}{a};$$

---

Решение.

ОДЗ:

$a \neq 2: x = 2a;$

$x - 4 \neq 0;$

$a = 2:$  уравнение не имеет решений;

$x \neq 4;$

$x - 2a = 0;$

$x = 2a;$

$x \neq 4:$

$2a \neq 4;$

$a \neq 2;$

**Ответ:** если  $a \neq 2$ , то уравнение имеет единственное решение  $x = 2a$ ;

если  $a = 2$ , то уравнение не имеет решений.

## *Домашнее задание*

- 

$$x = \frac{1}{a};$$