Некоторые приемы решения целых уравнений. Простейшие уравнения с параметром.

Возвратным называется уравнение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

где $a_n = a_{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Примеры возвратных уравнений

- а) $7x^3-2x^2-2x+7=0$;
- б) $5x^3-3x^2-3x+5=0$;
- в) $12x^4-7x^3+2x^2-7x+12=0$;
- г) $2x^4+8x^3-4x^2+8x+2=0$;
- д) $6x^5-7x^4+2x^3+2x^2-7x+6=0$.

Пример 1 *Решим возвратное уравнение* $7x^3 - 2x^2 - 2x + 7 = 0$

Выполним группировку первого и последнего, второго и третьего членов уравнения, получим:

$(7x^3+7)-2x\,(x+1)=0$;

$7(x+1)(x^2-x+1)-2x(x+1)=0$; *вынесем общий сложный множитель за скобки*

$(x+1)\,(7x^2-7x+7-2x)=0$;

$x+1=0$ *или* $7x^2-9x+7=0$

$x=-1$ *Д<0, квадратное уравнение корней не имеет*

Ответ: $x=-1$.

Пример 2 *Решим возвратное уравнение* $x^4-7x^3+8x^2-7x+1=0$

$$x^4-7x^3+8x^2-7x+1=0$$

$$x^2-7x+8-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$(x^2+\frac{1}{x^2})-7(x+\frac{1}{x})+8=0$$

$$y=x+\frac{1}{x}$$

$$(x+\frac{1}{x})^2=y^2$$

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

$$(y^2-2)-7y+8=0$$

$$y^2-7y+6=0$$

$$y_1=1 \qquad y_2=6$$

$$x+\frac{1}{x}=1 \qquad x+\frac{1}{x}=6$$

$$x_1=3+2\sqrt{2}$$

$$x_2=3-2\sqrt{2}$$

$$x_1=3+2\sqrt{2} \qquad x_2=3-2\sqrt{2}$$

Неизвестные величины принято обозначать последними буквами латинского алфавита (x, y, z,…), параметры – первыми буквами (a, b, c, …).

Решить уравнение с параметром – значит для каждого значения параметра найти множество всех корней данного уравнения или доказать, что корней нет.

Пример 3. Решить уравнение $ax = 1$.

Решение.

1. если $a \neq 0$: $x = \frac{1}{a}$;

2. если $a = 0$: $0 \cdot x = 1$ – не имеет решений;

$$x = \frac{1}{a};$$

Пример 4. Решить уравнение $a^2x - 1 = x + a$.

Решение.

$a^2x - 1 = x + a$;

$a^2x - x = a + 1$;

$x(a^2 - 1) = a + 1$;

1. если $a^2 - 1 \neq 0$, то есть $a \neq \pm 1$: $x = \frac{1}{a}$; $x = \frac{1}{a}$;

2. если $a = 1$, то есть $0 \cdot x = 2$: уравнение не имеет решений;

3. если $a = -1$, то есть $0 \cdot x = 0$: $x = \frac{1}{a}$;

$$x = \frac{1}{a};$$

$$x = \frac{1}{a};$$

Решение.

ОДЗ:

$x - 4 \neq 0;$

$x \neq 4;$

$x - 2a = 0;$

$x = 2a;$

$x \neq 4:$

$2a \neq 4;$

$a \neq 2;$

$a \neq 2:$ $x = 2a;$

$a = 2:$ уравнение не имеет решений;

Ответ: если $a \neq 2$, то уравнение имеет единственное решение $x = 2a$;

если $a = 2$, то уравнение не имеет решений.

Домашнее задание

- $$x = \frac{1}{a};$$