



Некоторые приемы решения
целых уравнений. Простейшие
уравнения с параметром.



Возвратным называется уравнение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

где $a_n = a_{n-k}$, $k=0, 1, 2, \dots, n$.

Примеры возвратных уравнений

- а) $7x^3 - 2x^2 - 2x + 7 = 0$;
- б) $5x^3 - 3x^2 - 3x + 5 = 0$;
- в) $12x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 7x + 12 = 0$;
- г) $2x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 8x + 2 = 0$;
- д) $6x^5 - 7x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 7x + 6 = 0$.

Пример 1 Решим возвратное уравнение

$$7x^3 - 2x^2 - 2x + 7 = 0$$

Выполним группировку первого и последнего, второго и третьего членов уравнения, получим:

$$(7x^3 + 7) - 2x(x + 1) = 0;$$

$$7(x + 1)(x^2 - x + 1) - 2x(x + 1) = 0; \quad \text{вынесем общий сложный множитель за скобки}$$

$$(x + 1)(7x^2 - 7x + 7 - 2x) = 0;$$

$$x + 1 = 0 \quad \text{или} \quad 7x^2 - 9x + 7 = 0$$

$$x = -1 \quad D < 0, \text{ квадратное уравнение корней не имеет}$$

Ответ: $x = -1$.

Пример 2 Решим возвратное уравнение

$$x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$x^2 - 7x + 8 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

$$y = x + \frac{1}{x}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$(y^2 - 2) - 7y + 8 = 0$$

$$y^2 - 7y + 6 = 0$$

$$y_1 = 1 \quad y_2 = 6$$

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x + \frac{1}{x} = 6$$

$$x_1 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$x_2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$x_2 = 3 - 2\sqrt{2}$$



Неизвестные величины принято обозначать последними буквами латинского алфавита (x, y, z, \dots), параметры – первыми буквами (a, b, c, \dots).



Решить уравнение с параметром – значит для каждого значения параметра **найти множество всех корней** данного уравнения или доказать, что корней нет.

Пример 3. Решить уравнение $ax = 1$.

Решение.

1. если $a \neq 0$: $x = \frac{1}{a}$;

2. если $a = 0$: $0 \cdot x = 1$ – не имеет решений;



Пример 4. Решить уравнение $a^2x - 1 = x + a$.

Решение.

$$a^2x - 1 = x + a;$$

$$a^2x - x = a + 1;$$

$$x(a^2 - 1) = a + 1;$$

1. если $a^2 - 1 \neq 0$, то есть $a \neq \pm 1$: $x = \frac{1}{a}; \quad x = \frac{1}{a};$

2. если $a = 1$, то есть $0 \cdot x = 2$: уравнение не имеет решений;

3. если $a = -1$, то есть $0 \cdot x = 0$: $x = \frac{1}{a};$

$$\underline{x} = \underline{\frac{1}{a}};$$

$$x = \frac{1}{a};$$

Решение.

ОДЗ:

$a \neq 2$: $x = 2a$;

$x - 4 \neq 0$;

$a = 2$: уравнение не имеет решений;

$x \neq 4$;

$x - 2a = 0$;

$x = 2a$;

$x \neq 4$:

$2a \neq 4$;

$a \neq 2$;

Ответ: если $a \neq 2$, то уравнение имеет единственное решение $x = 2a$;

если $a = 2$, то уравнение не имеет решений.

Домашнее задание

-

$$x = \frac{1}{a};$$