

# Аннуитетные платежи.

Аннуитет – финансовая рента – это разновидность финансовых потоков, которые поступают в ступенчатой форме, т.е. одинаковыми частями в фиксированные временные промежутки.

**Аннуитет- это начисление *равных платежей* на весь срок погашения кредита.**

## Задача № 1.

**31.01.2016г Пётр взял в банке некоторую сумму в кредит под 12% годовых.**

**Схема выплаты кредита следующая:**

**31.01. каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся часть долга (т.е. долг возрастает на 12%), затем Пётр переводит в банк 3512320 рублей. Какую сумму взял Пётр в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами?**

## Задача № 2.

17. 1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?

## Задача № 3.

Под редакцией И. В. Яценко

# МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

2017 год

31 декабря 2014 года Геннадий взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на  $a\%$ ), затем Геннадий переводит очередной транш. Геннадий выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 600 тыс. рублей, во второй 55 тыс. рублей. Найдите  $a$ .

## Задача № 4.

Тренировочный вариант № 174

**17.** 1 декабря 2016 года Валерий взял в банке в кредит 523 тыс. руб. под 10% годовых сроком на три года. Схема выплаты кредита следующая: 30 ноября каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем с 1-го до 30-го декабря Валерий выплачивает банку часть долга. По договоренности с банком было определено, что второй платеж будет в три раза меньше первого, а третий – в два раза меньше второго. Сколько рублей должен будет выплатить банку Валерий в декабре 2018 года?

## Задача № 5.

17 Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 2 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 15 млн рублей.



**Дифференцированный платеж** — это ежемесячный платеж по кредиту, уменьшающийся к концу срока кредитования и состоит из выплачиваемой постоянной доли основного долга и процентов на невыплаченный остаток кредита

Суммы, выплачиваемые в конец каждого ... (временного периода), подбираются так, чтобы сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, т.е. на одну и ту же величину.

**ЗАДАЧА.** Пусть взят кредит  $p$  рублей под  $a$  % годовых с дифференцированным платежом на  $n$  лет (временных периодов).

Номер периода	Долг банку перед погашением кредита	Сумма, которая идёт на погашение кредита	Сумма процентов, которая пошла на погашение процентов по кредиту.
0 год	P руб	0	0
1 год	P руб.	$\frac{p}{n}$	P*q
2 год	$p - \frac{p}{n} = \frac{(n-1)p}{n}$	$\frac{p}{n}$	$\frac{(n-1)p}{n} q$
3 год	$\frac{(n-1)p}{n} - \frac{p}{n} = \frac{(n-2)p}{n}$	$\frac{p}{n}$	$\frac{(n-2)p}{n} q$
4 год	$\frac{(n-2)p}{n} - \frac{p}{n} = \frac{(n-3)p}{n}$	$\frac{p}{n}$	$\frac{(n-3)p}{n} q$
5 год	$\frac{(n-3)p}{n} - \frac{p}{n} = \frac{(n-4)p}{n}$	$\frac{p}{n}$	$\frac{(n-4)p}{n} q$
.....			
n год	$\frac{(n-(n-2))p}{n} - \frac{p}{n} = \frac{(n-(n-1))p}{n} = \frac{p}{n}$	$\frac{p}{n}$	$\frac{p}{n} q$
Сумма, которую внесли в банк		$P + pq \left( 1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right) = P + pqS_n$	

$q=0,01a$ , где  $S_n$ - сумма n первых членов арифметической прогрессии  $x_1=1$ ,  $d = -\frac{1}{n}$



## Задача № 6.

19 Мария Константиновна взяла кредит в банке на срок 8 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на одно и то же число процентов (месячную процентную ставку), а затем уменьшается на сумму, уплаченную Марией Константиновной. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Общая сумма выплат превысила сумму кредита на 63%. Найдите месячную процентную ставку.

## Задача № 7.

Александр Ларин вар.141

**Эльвира взяла кредит 1 млн. руб. на срок 36 мес. По договору она должна возвращать банку часть денег в конце каждого месяца.**

**Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 10 %, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Эльвирой банку в конце месяца. Суммы, выплаченные Эльвирой, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, т.е. на одну и ту же величину каждый месяц. На сколько тысяч рублей больше Эльвира выплатит банку в течение первого года кредитования, нежели в течение третьего года?**

## Задача № 8.

**Бизнесмен взял кредит в банке на срок 9 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма долга увеличивается на 12 %, а затем уменьшается на сумму, уплаченную бизнесменом банку в конце месяца. Суммы, выплаченные бизнесменом, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, т.е. на одну и ту же величину каждый месяц. Сколько процентов от суммы кредита составила сумма, уплаченная банку сверх нормы?**

## Задача № 9. ЕГЭ -2015

**15 января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев.**

**Условия возврата таковы:**

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на  $q\%$  по сравнению с концом предыдущего месяца;**
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;**
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15 –е число предыдущего месяца.**

**Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30 % больше суммы, взятой в кредит. Найдите  $q$ .**

## Задача № 10. ЕГЭ -2016

**17** 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на  $r$  процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где  $r$  — целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение  $r$ , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,15 млн рублей.

## Задача № 11. ЕГЭ -2016

17

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  — целое число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	$S$	$0,7S$	$0,4S$	0

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором каждая из выплат будет меньше 3 млн рублей.





## Тема 6. Анализ согласованности проверки заданий с развернутым ответом

17

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
	<i>Максимальный балл</i>

Тема 6. Анализ согласованности проверки заданий с развернутым ответом

Задание 7

Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат:

- неверный ответ из-за вычислительной ошибки;
- верный ответ, но решение недостаточно обосновано

2

Задание 17.

1) Дополни данную в ус. таблицу:

Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2018	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2019
$S$	$1,25S$	$0,75S$	$0,875S$	$0,4S$	$0,5S$	$0$
$\times 1,15$	$\times 1,25$	$\times 1,25$		$\times 1,25$		

1. Я добавил новую переменную (наименьшая 25% в июле)

2. Найду самую большую величину в июле; отниму от интервала в июле остаток в июле.

1) Июль 2017 =  $1,25S - 0,75S = 0,5S$

2) Июль 2018 =  $0,875S - 0,4S = 0,475S$

3) Июль 2019 =  $0,5S - 0 = 0,5S$ .

3. Если самая большая величина будет менее 3 мин. то и остальные будут меньше сс. на ср. стр.

$0,55S < 3 \text{ мин.}$

→ → → → → **или наоборот.**

Задание 17. (необходимо)

$0,55S < 3 \text{ мин.}$

$S < \frac{3 \text{ мин}}{0,55}$

$S < 5 \frac{5}{11} \text{ мин. рублей}$

Ответ:  $S$  должно быть менее  $5 \frac{5}{11}$  мин. рублей.

В задание 5 №17: нет только ответа - целого значения. (2 балла)

**1 балл**

Тема 6. Анализ согласованности проверки заданий с развернутым ответом

Задание 8

Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат:  
 — неверный ответ из-за вычислительной ошибки;  
 — верный ответ, но решение недостаточно обосновано

2

17

$$\begin{array}{l}
 12 \left\{ \begin{array}{l} S \\ 1,25S \\ 1,25S - y_1 = 0,75 \end{array} \right. \\
 22 \left\{ \begin{array}{l} 0,75 \\ 0,75 \cdot 1,25 \\ 0,75 \cdot 1,25 - y_2 = 0,45 \end{array} \right. \\
 32 \left\{ \begin{array}{l} 0,45 \\ 1,25 \cdot 0,45 = \\ 1,25 \cdot 0,45 - y_3 = 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

1.  $y_1, y_2, y_3$  — массы,  $y_1 < 3, y_2 < 3, y_3 < 3$  по условию

2.  $1,25S - y_1 = 0,75, +y_1 = +0,55S; 0,55S < 3, | S < 5,4$

3.  $0,875S - y_2 = 0,45; +y_2 = +0,425S; 0,425S < 3, | S < 6$

4.  $1,25S - 0,45 - y_3 = 0; +y_3 = +0,55; 0,55 < 3, | S < 6$

Найти наибольшее  $S (S \in Z)$ , следовательно

$S = 5$  мм

задание 6 №17: некорректно записаны решения итоговых неравенств, но ответ - верный. (3 балла)

2 балла

Тема 6. Анализ согласованности проверки заданий с развернутым ответом

Задание 9

17 Рассмотрим года, по которым наименьшая цена

$S$  - цена  $\frac{5}{4} - x$

I год  $\frac{5}{4}S - x = 0,7S$

II год  $(\frac{5}{4}S - x) \cdot \frac{5}{4} - x = 0,4S$   $\frac{25}{16}S - \frac{9}{4}x = 0,4S$

III год  $(\frac{5}{4}S - x) \cdot \frac{5}{4} - x) \cdot \frac{5}{4} - x = 0$   $(\frac{25}{16}S - \frac{9}{4}x) \cdot \frac{5}{4} - x = 0$   $\frac{125}{64}S - \frac{45}{16}x = 0$

$\frac{125}{64}S - \frac{45 \cdot 16}{16} = 0$   $\frac{125}{64}S - \frac{61}{16}x = 0$

Найдем стоимость второго года

I год  $x = \frac{7}{10}S - \frac{5}{4}S$   $x = \frac{11}{20}S$

эта стоимость должна быть меньше 3 млн.

$\frac{11}{20}S < 3$   $11S < 60$   $S < \frac{60}{11}$  [первый год]

найдем стоимость второго года

$\frac{25}{16}S - \frac{9}{4}x = 0,4S$   $-\frac{9}{4}x = \frac{64 - 260}{160}$  ;  $-\frac{9}{4}x = -\frac{196}{160}$

$\frac{9}{4}x = \frac{196}{160}$   $x = \frac{196 \cdot 4}{160 \cdot 9}$  ;  $x = \frac{62}{120} = \frac{31}{60}S$

Цена меньше 3 млн.

$\frac{31}{60}S < 3$   $31S < 180$

$S < \frac{180}{31}$

Найдем стоимость 3 года

~~$\frac{125}{64}S - \frac{45}{16}x - x = 0$~~   $\frac{125}{64}S - \frac{61}{16}x = 0$   $\frac{125}{64}S = \frac{61}{16}x$

$x = \frac{125 \cdot 16}{64 \cdot 61}$   $x = \frac{125}{244}S$  . Цена меньше 3 млн

$\frac{125}{244}S < 3$   $S \leq \frac{732}{125}$

Везде  $S < 5,6$ , то есть наибольшее  $S$  равно 5.

ответ:  ~~$S = 5$~~ .  $S = 5$ .

0 баллов



17)  $(1 + \frac{25}{100})$  - коэффициент при 100% при  
~~увеличении~~ - при увеличении цены  
 товара в 1,25 раза

$$0,7S = S(1 + \frac{25}{100}) - 3000000$$

$$0,4S = 0,7S(1 + \frac{25}{100}) - 3000000 \text{ (чтобы было)}$$

т.к. уменьшился коэффициент при S  
 на 0,3

$$0 = 0,4S(1 + \frac{25}{100}) - 3000000$$

$$0,4S(1 + \frac{25}{100}) = 3000000$$

$$S = \frac{3000000}{0,5}$$

$$S = 6000000$$

$$\text{Итого: } 6000000$$

$$\frac{S=5}{\text{Order: } 5}$$

## Задача № 13. АлексЛАРИН

ВАР.172

16 ноября близнецы Саша и Паша взяли в банке кредит по 500 тысяч руб. каждый сроком на четыре месяца. Условия возврата кредита таковы:

- 28–го числа каждого месяца долг увеличивается на 10 % по сравнению с 16м числом текущего месяца;
- с 1–го по 15–е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; 16–го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии с предложенной для каждого из них таблицей:

Саша					
<i>Дата</i>	16.11	16.12	16.01	16.02	16.03
<i>Долг, тыс. руб.</i>	<b>500</b>	<b>300</b>	<b>200</b>	<b>100</b>	<b>0</b>

  

Паша					
<i>Дата</i>	16.11	16.12	16.01	16.02	16.03
<i>Долг, тыс. руб.</i>	<b>500</b>	<b>400</b>	<b>300</b>	<b>200</b>	<b>0</b>

Кто из братьев за четыре месяца выплатит банку меньшую сумму? На сколько рублей?



## **Задача № 14.**

**Имеется три пакета акций. Общее суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция из второго пакета дороже одной акции из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тыс. руб. до 20 тыс. руб., а цена акции из третьего пакета не меньше 42 тыс. руб. и не больше 60 тыс. руб. Определите, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете.**

## Задача № 15.

**Задача 2.** Фабрика, производящая пищевые полуфабрикаты, выпускает блинчики со следующими видами начинки: ягодная и творожная. В данной ниже таблице приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности фабрики по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

Вид начинки	Себестоимость (за 1 тонну)	Отпускная цена (за 1 тонну)	Производственные возможности
ягоды	70 тыс. руб.	100 тыс. руб.	90 (тонн в мес.)
творог	100 тыс. руб.	135 тыс. руб.	75 (тонн в мес.)

Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 15 тонн. Предполагая, что вся продукция фабрики находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль, которую может получить фабрика от производства блинчиков за 1 месяц.

## Задача № 16

Тренировочный вариант № 178

**17.** Накануне Нового года Деда Морозы раскладывали равными количествами конфеты в подарочные пакеты, а эти пакеты складывали в мешки, по 2 пакета в один мешок. Те же самые конфеты они могли разложить в пакеты так, что в каждом из них было бы на 5 конфет меньше, чем раньше, но тогда в каждом мешке стало бы лежать по 3 пакета, а мешков при этом потребовалось бы на 2 меньше. Какое наибольшее количество конфет могли раскладывать Деда Морозы?

## Задача № 17

**Задача 3.** Первичная информация разделяется по серверам №1 и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объеме  $t^2$  Гбайт входящей в него информации выходит  $20t$  Гбайт, а с сервера №2 при объеме  $t^2$  Гбайт входящей в него информации выходит  $21t$  Гбайт обработанной информации;  $25 < t < 55$ . Каков наибольший общий объем выходящей информации при общем объеме входящей информации в 3364 Гбайт?

## Задача № 18

## Ларин №123

В распоряжении начальника имеется бригада рабочих в составе 24 человек. Их нужно распределить на день на два объекта. Если на первом объекте работает  $t$  человек, то их суточная зарплата составляет  $4t^2$  у. е. Если на втором объекте работает  $t$  человек, то их суточная зарплата составляет  $t^2$  у. е. Как нужно распределить на эти объекты бригаду рабочих, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько у. е. в этом случае придется заплатить рабочим?

## **Задача № 19.**

Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $3t$  единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $4t$  единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?



## Задача № 20.

**В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля.**

**В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля.**

**Во второй области для добычи  $x$  кг алюминия в день требуется  $x^2$  человеко-часов труда, а для добычи  $y$  кг никеля в день требуется  $y^2$  человеко-часов труда.**

**Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля.**

**При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так,**

**чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава.**

**Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?**

## Задача № 21.

Тренировочный вариант № 175

**17.** В магазин поступил товар I и II сортов на общую сумму 4,5 млн. руб. Если весь товар продать по цене II сорта, то убытки составят 0,5 млн. руб., а если весь товар реализовать по цене I сорта, то будет получена прибыль 0,3 млн. руб. На какую сумму был приобретен товар I и II сортов в отдельности?

## Задача № 22.

*№17вариант 173.*

Некоторое предприятие приносит убытки, составляющие 300 млн. руб. в год. Для превращения его в рентабельное было предложено увеличить ассортимент продукции. Подсчеты показали, что дополнительные доходы, приходящиеся на каждый новый вид продукции, составят 84 млн. руб. в год, а дополнительные расходы, окажутся равными 5 млн. руб. в год при освоении одного нового вида, но освоение каждого последующего потребует на 5 млн. руб. в год больше расходов, чем освоение предыдущего. Какое минимальное количество видов новой продукции необходимо освоить, чтобы предприятие стало рентабельным? Какой наибольшей годовой прибыли может добиться предприятие за счёт увеличения ассортимента продукции?

## Задача № 23.

Стоимость разработки электронной версии учебника некоторого издания равна 800 тыс. рублей. Затраты на производство  $x$  тысяч таких электронных учебников

в этом издательстве равны  $(x^2+6x+22100)$  тысяч рублей в год. Если учебники продавать по цене  $a$  руб. за единицу, то прибыль издательства за один год составит  $ax-(x^2+6x+22100)$ .

Издательство будет выпускать учебники в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении  $a$  разработка учебника окупится не более чем за 2 года?

Два велосипедиста равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 40 км/ч и находится на расстоянии 5 км от перекрестка, второй движется со скоростью 30 км/ч и находится на расстоянии 3 км от перекрестка. через сколько минут расстояние между велосипедистами станет наименьшим? Каково будет это наименьшее расстояние.

Алексей вышел из дома на прогулку со скоростью  $v$  км/ч. После того, как он прошел 6 км, из дома следом за ним выбежала собака Жучка, скорость которой была на 9 км/ч больше скорости Алексея. Когда Жучка догнала хозяина, они повернули назад и вместе возвратились домой со скоростью 4 км/ч. Найдите значение  $v$ , при котором время прогулки Алексея окажется наименьшим. Сколько при этом составит время его прогулки?



Тренировочный вариант № 176

**17.** Из пункта  $A$  в пункт  $B$  со скоростью  $80$  км/ч выехал первый автомобиль, а через некоторое время с постоянной скоростью – второй. После остановки на  $20$  мин в пункте  $B$  второй автомобиль поехал с той же скоростью назад. Через  $48$  км он встретил первый автомобиль, шедший навстречу, и был на расстоянии  $120$  км от  $B$  в тот момент, когда в пункт  $B$  прибыл первый автомобиль. Найти расстояние от  $A$  до места первой встречи, если расстояние между пунктами  $A$  и  $B$  равно  $480$  км.

**17.** Из сосуда, наполненного чистым глицерином, отлили 1 л, после этого в сосуд добавили 1 л воды. Затем отлили 1 л смеси и вновь долили 1 л воды. То же самое проделали в третий раз, в результате чего воды в сосуде стало в 7 раз больше, чем глицерина. Найдите объем сосуда. В каком отношении находились объемы глицерина и воды после второго доливания воды в сосуд?