Практика 5117

МЕТОД ГАУССА

Была задана домашняя работа

По теореме Кронекера – Капелли проверить совместность системы уравнений :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ = 5 \\ x_1 + 3x_3 = 16 \\ 5x_2 - x_2 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ = 5 \\ x_1 + 3x_3 = 16 \\ 5x_1 - x_2 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ = 5 \\ x_1 + 3x_3 = 16 \\ 5x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ = 5 \\ x_1 + 3x_3 = 16 \\ 5x_1 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Решить эту систему уравнений методом обратной матрицы

ОТВЕТ : по теореме Кронекера – Капелли система совместна.

Пример 2

Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$n < r$$

РЕШЕНИЕ: ***Прямой ход***

В укороченной системе из r уравнений

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l}\times(-1) \\ \\ + \end{array} \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \times(-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 8 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \times(-3) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ :(-8) \end{array} \sim \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\end{array}$$

$$\text{rang } A = 3;$$

$$\text{rang } P = 3;$$

$$n = 3;$$

Система **совместна**, случай 1.

Обратный ход

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3$$

$$x_2 + 2 \cdot (-1) = 0; \quad x_2 = 2;$$

$$x_1 + 2 \cdot 2 - 1 = 4; \quad x_1 = 1;$$

Ответ : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Дома сделать проверку

Пример 3

Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ -x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 12 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ: ***Прямой ход***

$$P = \begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 8 \\ -1 & 4 & -5 & 12 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array} + \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 6 & -4 & 16 \end{array}\right) : 3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 6 & -4 & 16 \end{array}\right) \times (-6) \; +$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rang} A = 2;$

$\operatorname{rang} P = 2;$

$n = 3;$

Система ***совместна***, случай 2.

Обратный ход

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \underbrace{x_1 \quad x_2} & & x_3 \end{array} \end{array} \sim \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 - \frac{2}{3}x_3 = \frac{8}{3} \end{cases}$$

БАЗИСНЫЕ СВОБОДНАЯ

$$x_3 = C;$$

$$x_2 - \frac{2}{3}C = \frac{8}{3}\ ;\ x_2 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3}C;$$

$$x_1 + 2\left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3}C\right) + C = 4;\ x_1 = -\frac{4}{3} - \frac{7}{3}C;$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} - \frac{7}{3}C \\ \frac{8}{3} + \frac{2}{3}C \\ C \end{pmatrix}$, где C - любое число.

Дома сделать проверку.

Домашняя работа

Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$$

Решить задачу № 3 своего варианта РГР методом Гаусса.

Для желающих:

Исследовать совместность и найти решение системы в зависимости от параметра λ :

$$\begin{cases} (1+\lambda)x + y + z = 1 \\ x + (1+\lambda)y + z = 1 \\ x + y + (1+\lambda)z = 1 \end{cases}$$