Физические основы механики

Использована презентация доцента НИЯУ МИФИ, к. ф.-м.н.,
Ольчак Андрей Станиславович

Кинематика материальной точки

Предмет кинематики: *Описание движения и связи между величинами, характеризующими это движение*

(*описание*, но пока *не объяснение*!)

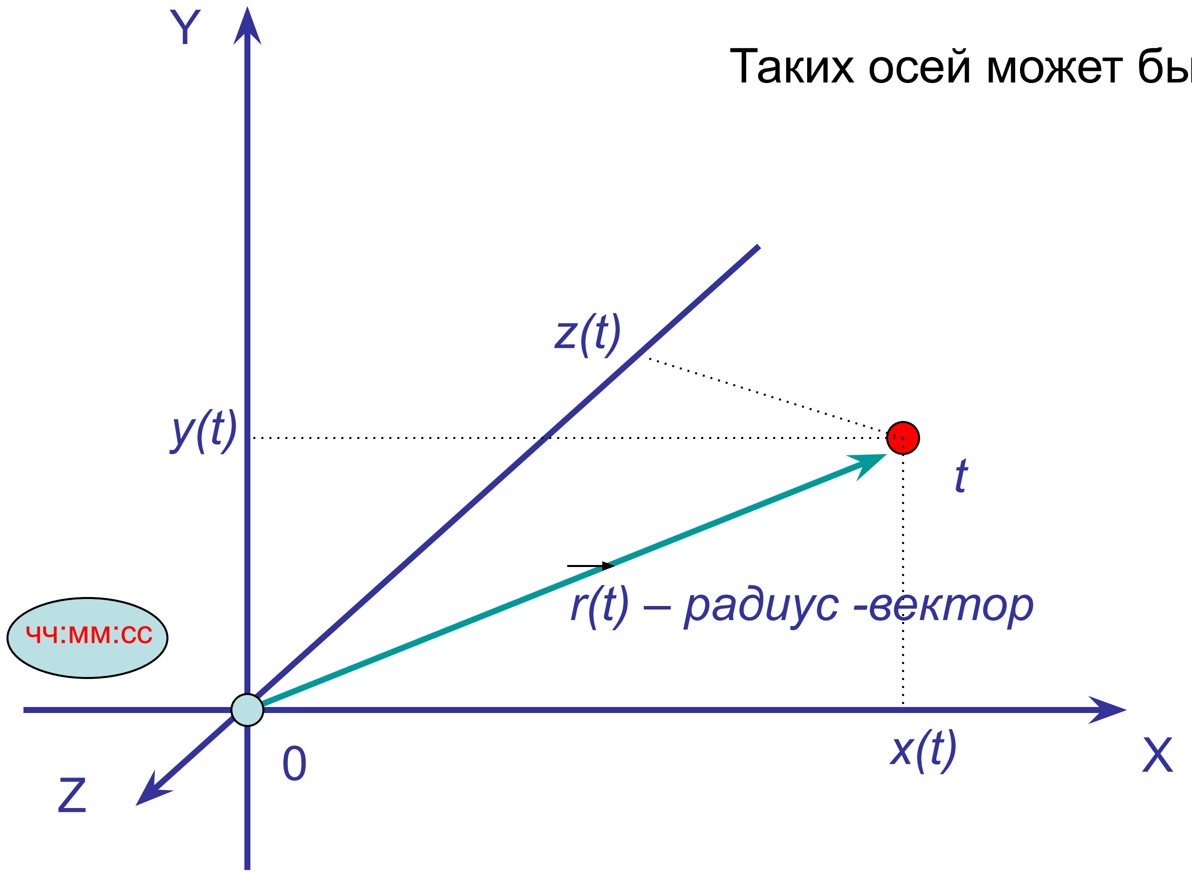
Основные понятия и величины кинематики:

- Материальная точка – объект, размерами и структурой которого в данной задаче можно пренебречь
- Координаты (x, y, z) – определяют положение точки в пространстве
- Система отсчета = система координат + часы + тело отсчета
- Радиус-вектор материальной точки ($\vec{\mathbf{r}}$)
- Перемещение ($\overrightarrow{\Delta \mathbf{r}}$)
- Пройденный путь (S)
- Скорость ($\vec{\mathbf{v}}$)
- Ускорение ($\vec{\mathbf{a}}$)

Материальная точка, ее координаты, система отсчета

В декартовой системе отсчета: координаты – проекции положения точки на координатные оси.

Таких осей может быть три.

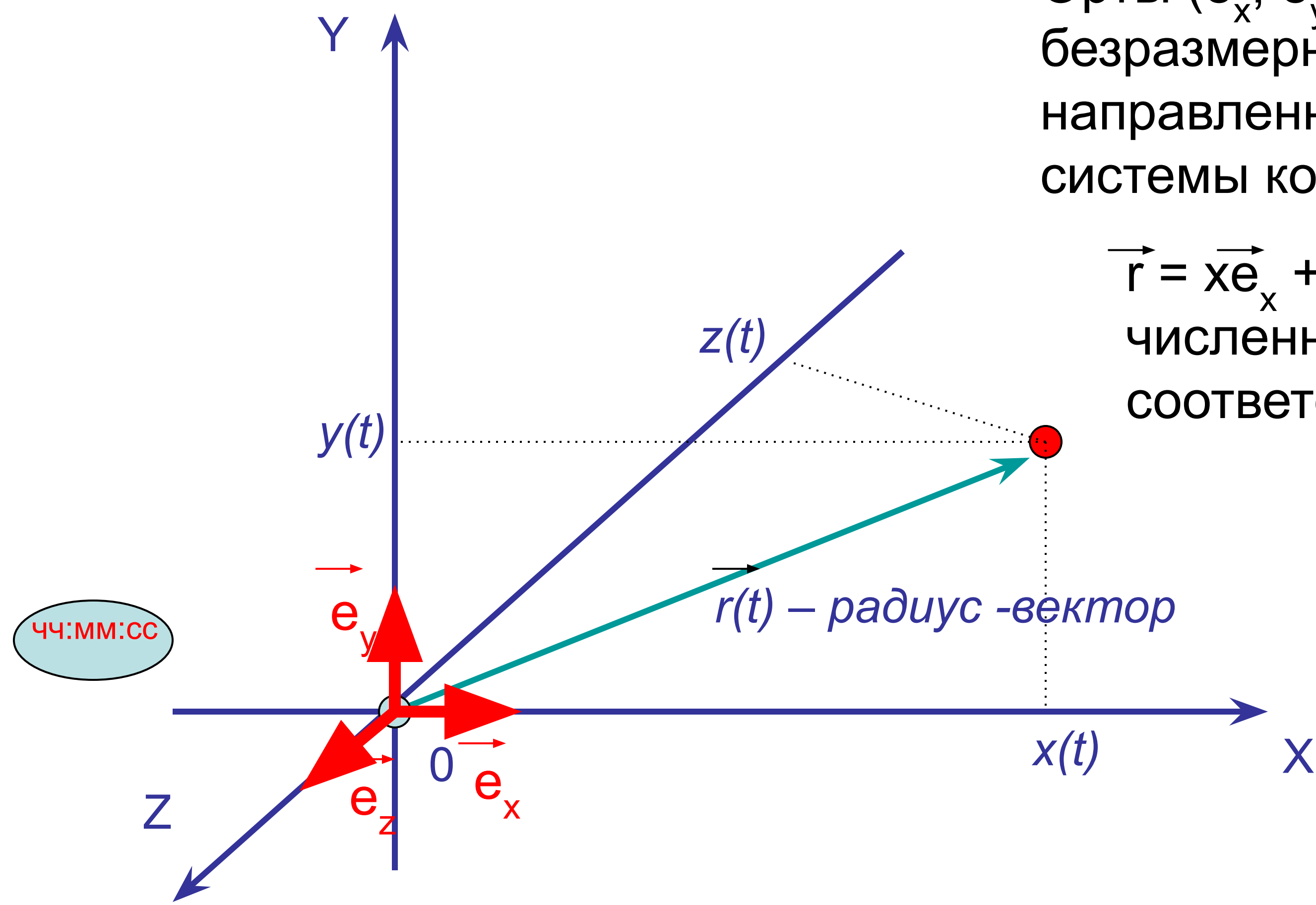


Радиус вектор материальной точки $\vec{r}$ - направленный отрезок, проведенный из начала координат в данную точку пространства.

$$\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}^T$$

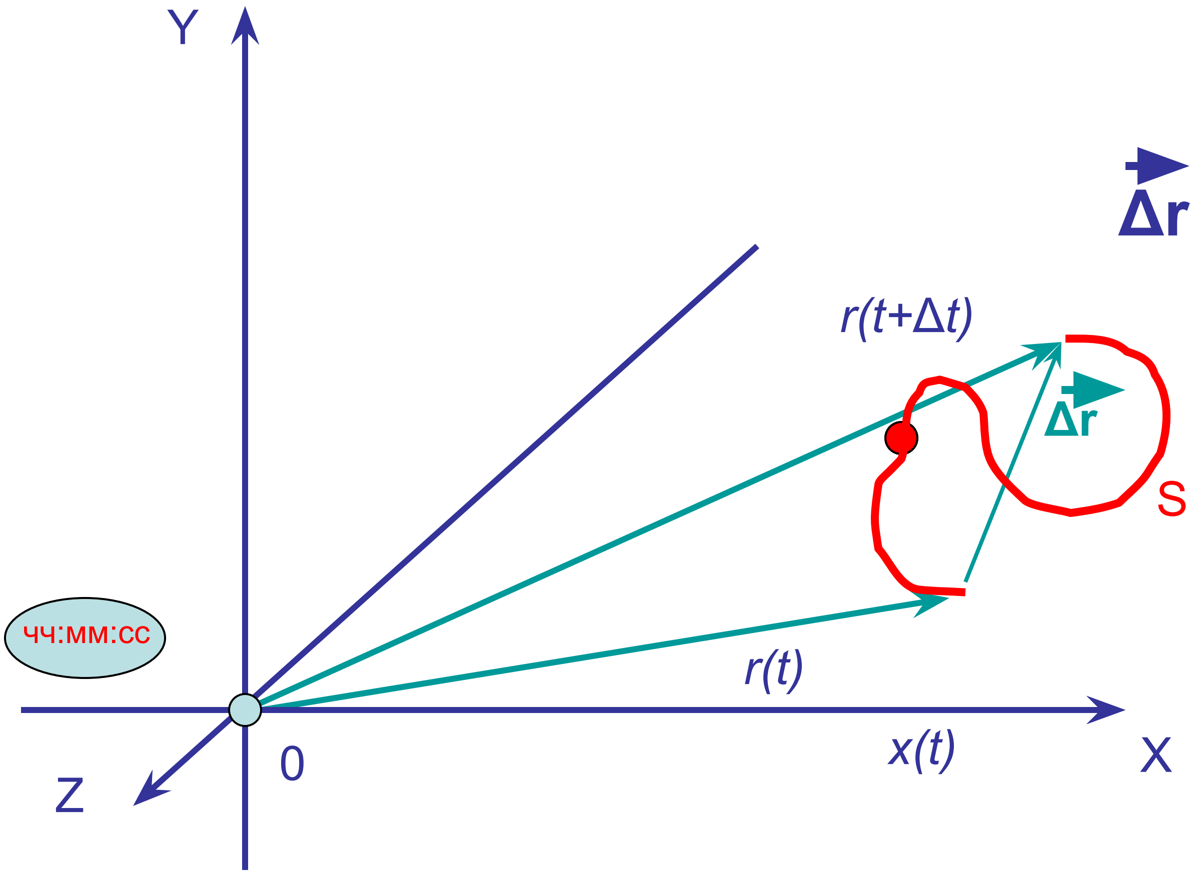
Орты ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$) - единичные безразмерные векторы, направленные вдоль осей системы координат.

$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, где x, y, z - численные значения соответствующих координат.



Перемещение $\vec{\Delta r}$ - это приращение радиус-вектора $\vec{r}$ за некоторое время (вектор, соединяющий начальное и конечное положение материальной точки)

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$



Пройденный путь S – длина траектории движения точки

Средняя скорость

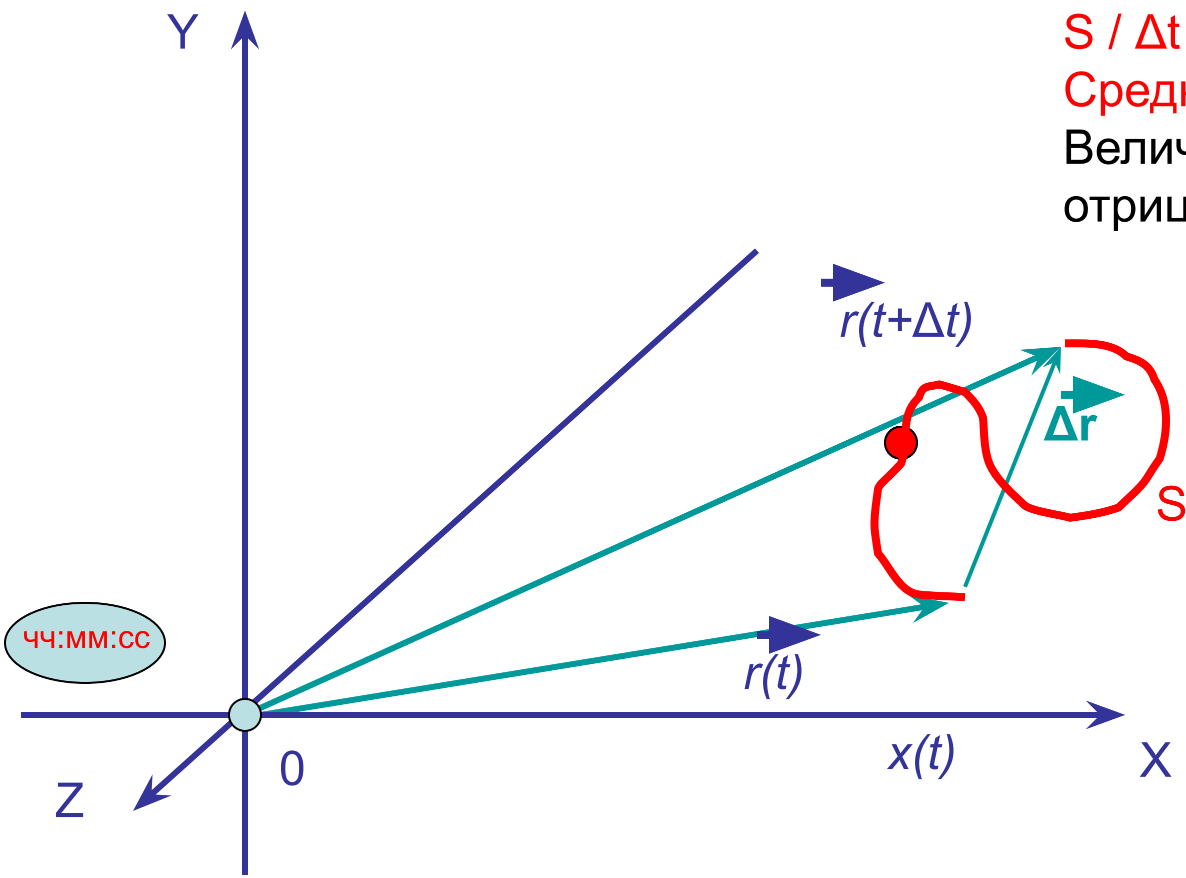
$\Delta\vec{r}\,/\,\Delta t = \langle\vec{V}\rangle$

Средняя скорость (вектор)

$S\,/\,\Delta t = \langle|V|\rangle$

Средний модуль скорости.

Величина заведомо не отрицательная.



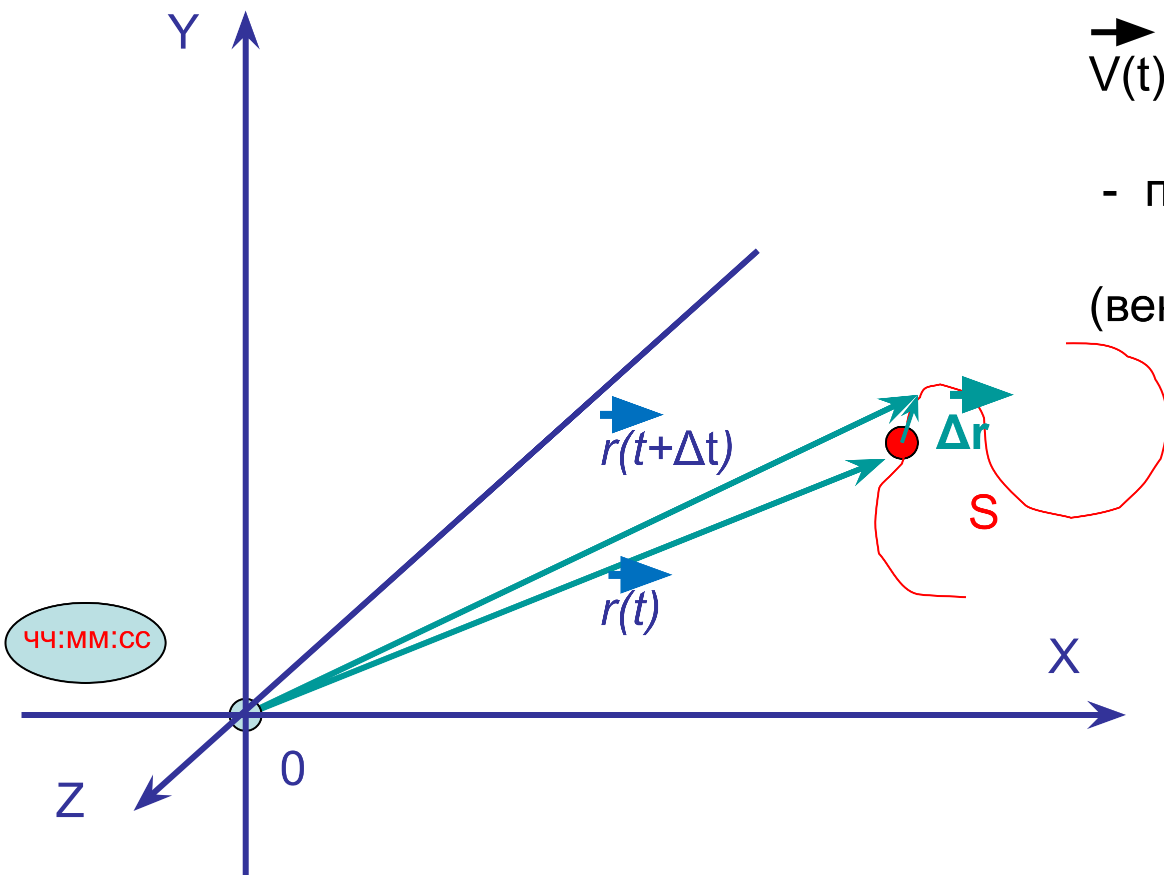
Мгновенная скорость (вектор)

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\vec{V}(t) = d\vec{r}(t)/dt$ - скорость (вектор)

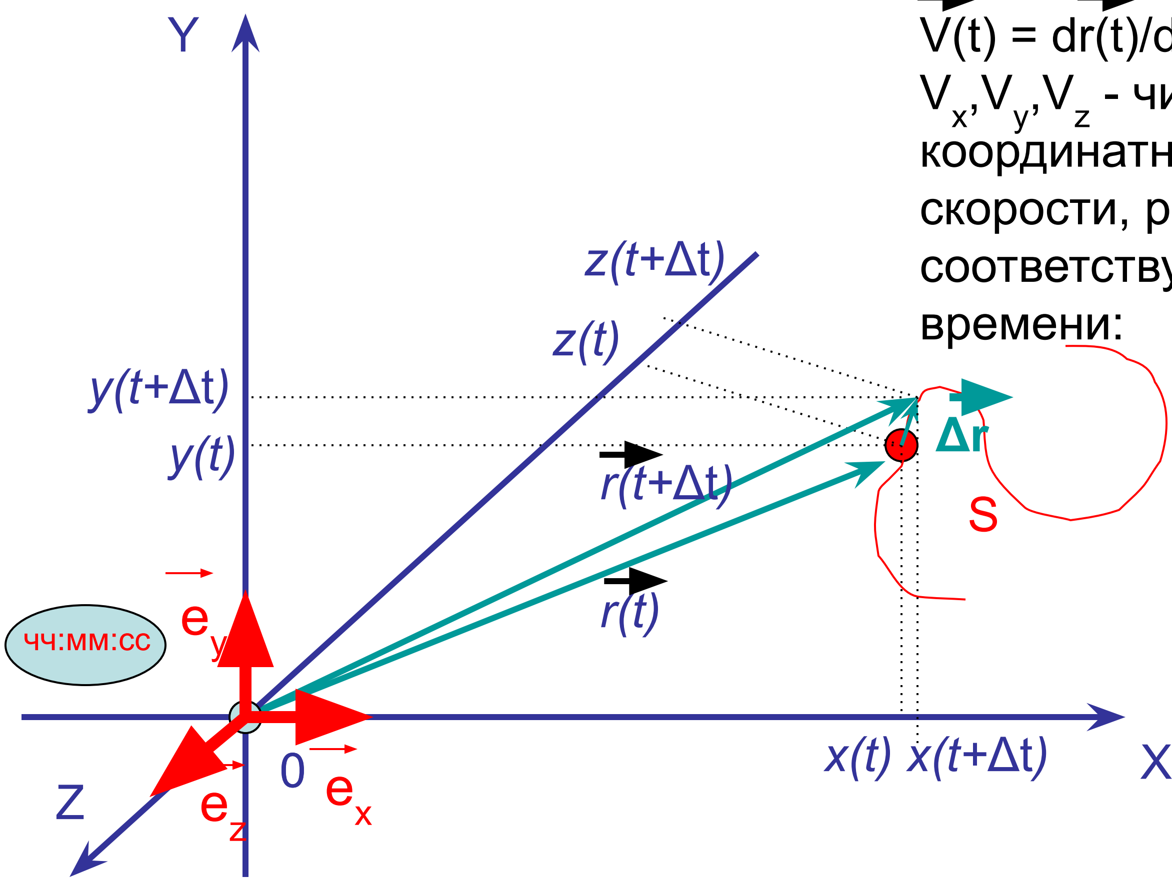
- производная от функции $\vec{r}(t)$

(вектор) по времени t



Мгновенная скорость в декартовой системе координат

Скорость, как вектор, раскладывается на координатные компоненты:



$\vec{V}(t) = d\vec{r}(t)/dt = V_x\vec{e}_x + V_y\vec{e}_y + V_z\vec{e}_z$, где V_x, V_y, V_z - численные значения координатных компонент мгновенной скорости, равные производным от соответствующих координат по времени:

$V_x = dX(t)/dt$

$V_y = dY(t)/dt$

$V_z = dZ(t)/dt$

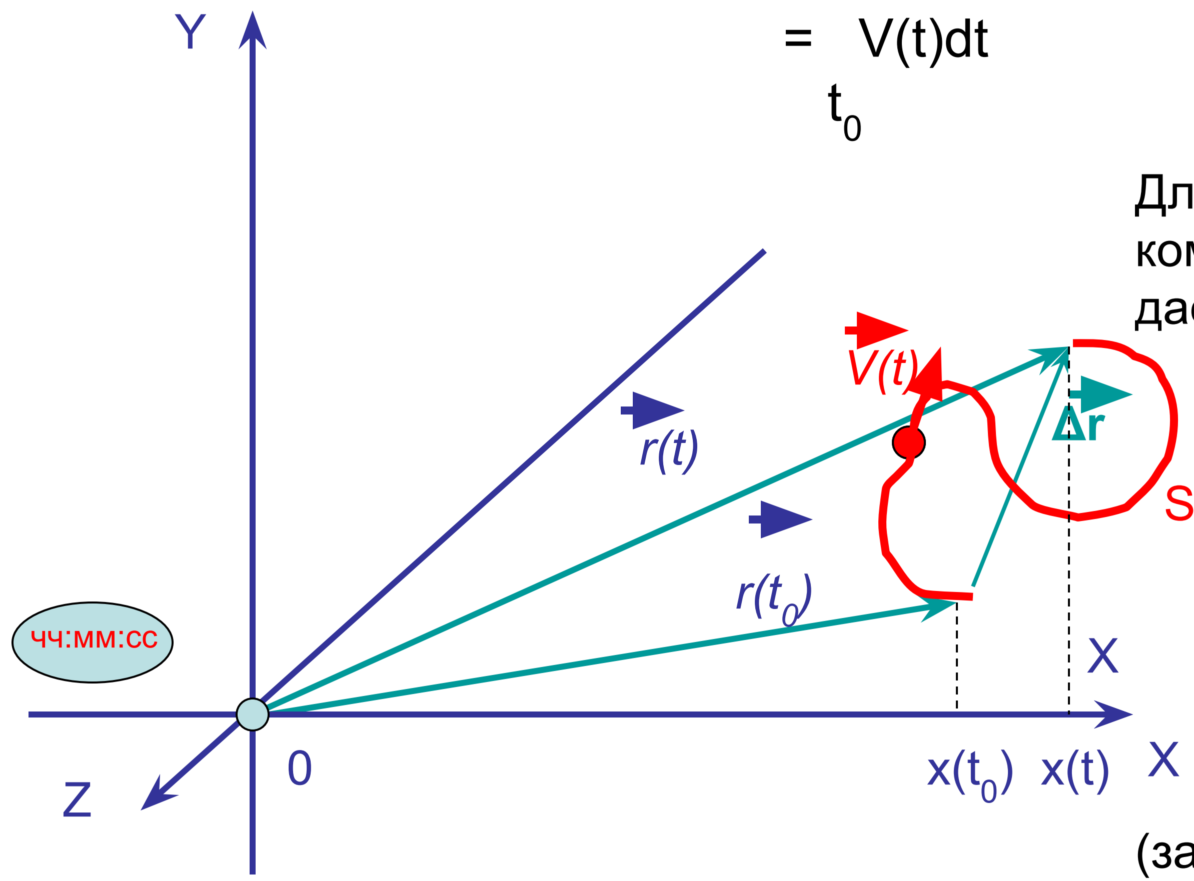
Модуль скорости равен $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$

Связь скорости и перемещения

$\vec{V}(t) = d\vec{r}(t)/dt$ - скорость есть производная от перемещения по времени

Следствие (в наших обозначениях): $d\vec{r} = \vec{V}(t)dt \Rightarrow \Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) =$

$$= \int_{t_0}^{t} \vec{V}(t)dt$$



Для каждой координатной компоненты ее изменение дается интегралом:

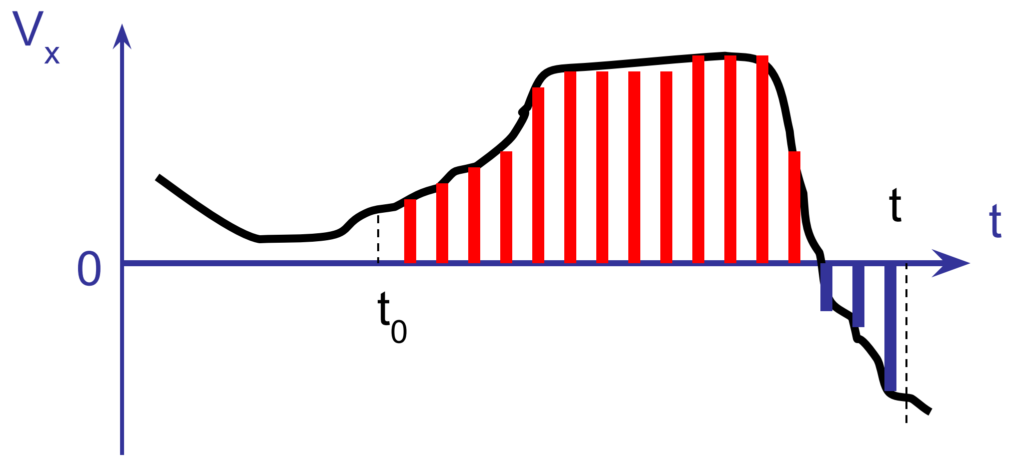
$$\Delta x = x(t_0)-x(t) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} V_x(t)dt$$

То же и для y(t), z(t)

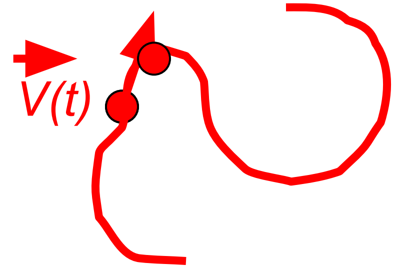
(записать самостоятельно – задание коллоквиума)

Связь скорости и перемещения – графики

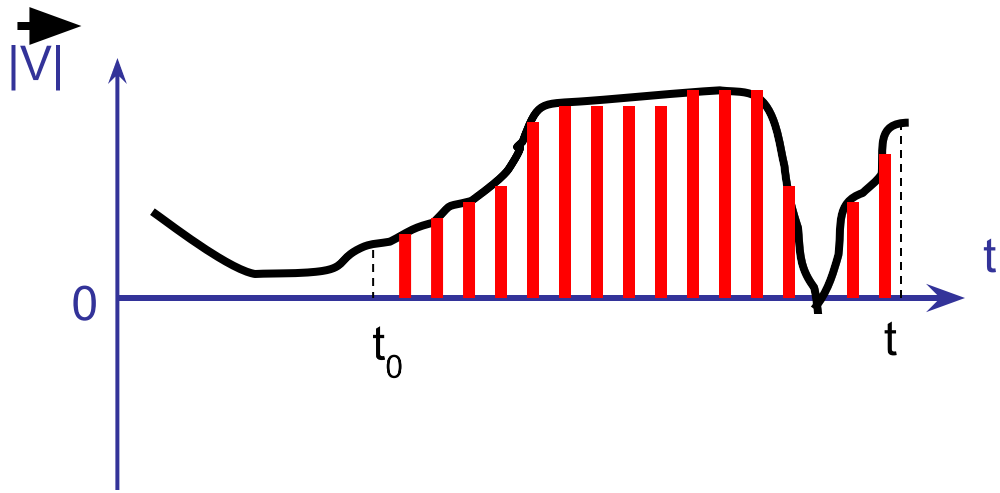


Геометрический смысл этого интеграла: изменение координаты
$\Delta x = x(t_0)\text{-}x(t)$
численно равно площади под графиком функции $V_x(t)$ между точками t_0 и t .

Часть площади под осью абсцисс при этом надо учитывать с отрицательным знаком



Пройденный путь S - длина траектории материальной точки. За малое время dt:
$dS = |\vec{V}(t)|dt$



За большее время от t_0 до t

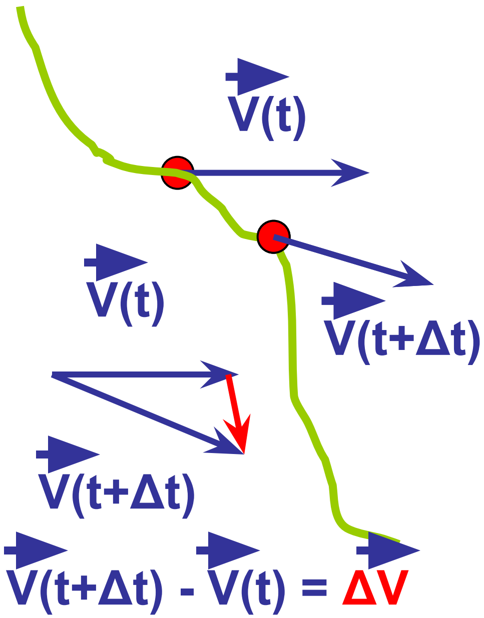
$$S = \int_{t_0}^{t} |\vec{V}(t)|dt$$

Геометрический смысл этого интеграла: пройденный путь S численно

равен площади под графиком функции модуля скорости $|\vec{V}(t)|$ между точками t_0 и t

Это заведомо не отрицательная величина

Ускорение



Ускорением называется отношение приращения вектора скорости $\Delta\vec{V}$ за некоторое время Δt к величине этого времени.

$$\vec{a} = \Delta\vec{V} / \Delta t$$

Мгновенное ускорение:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

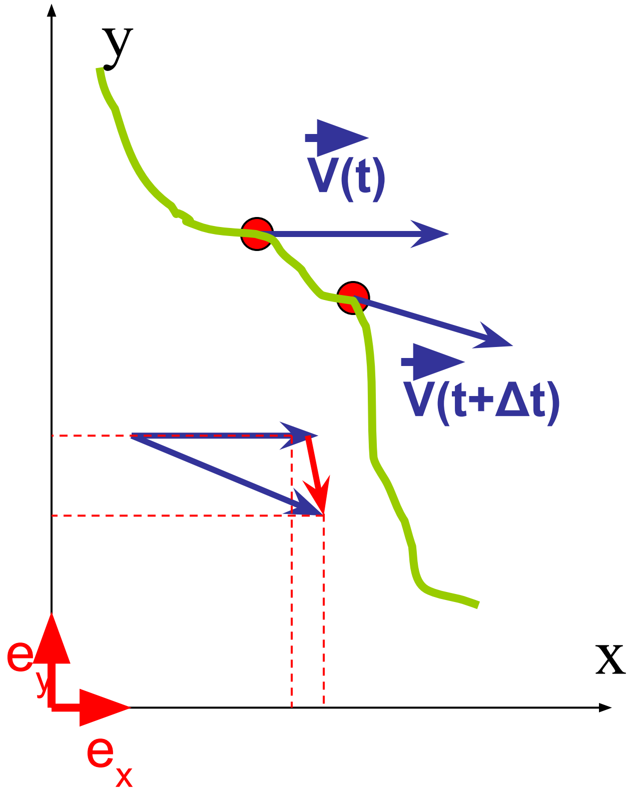
Другими словами: ускорение это скорость изменения вектора скорости точки.

Математически ускорение - это первая

производная от скорости $\vec{V}(t)$ и вторая

производная от функции $\vec{r}(t)$ по времени

Ускорение в декартовой системе координат



В декартовой системе координат ускорение выражается через его проекции на координатные оси и векторы - орты:

$$\vec{a}(t) = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

где $a_x = dV_x(t)/dt = d^2X(t)/dt^2$

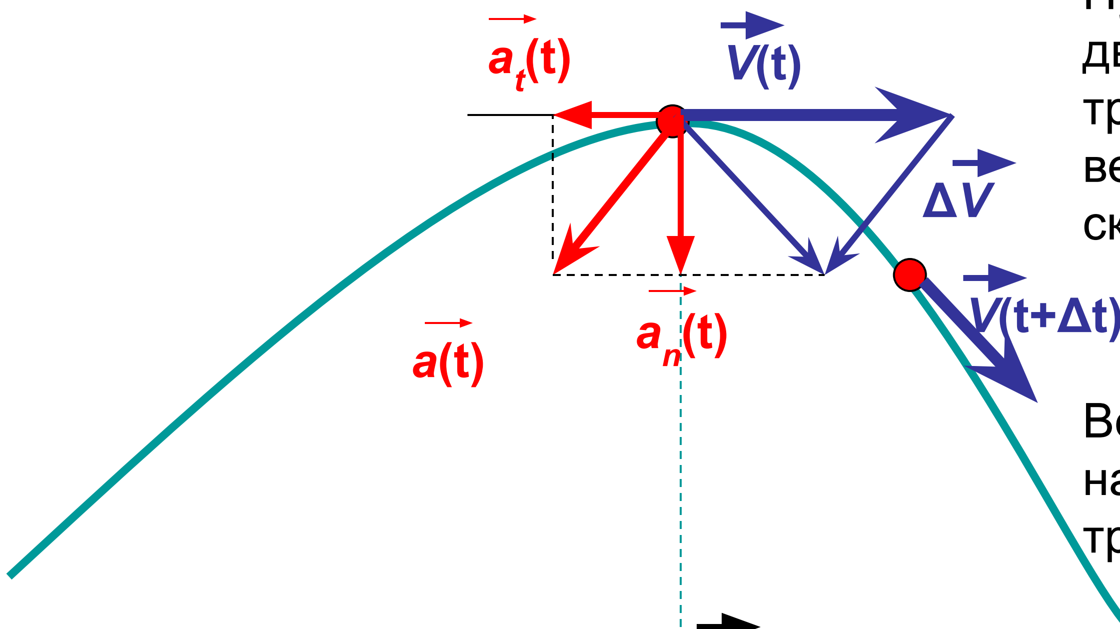
$a_y = dV_y(t)/dt = d^2Y(t)/dt^2$

$a_z = dV_z(t)/dt = d^2Z(t)/dt^2$

Модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}$$

Нормальное и тангенциальное ускорение



Пусть материальная точка движется по некоторой траектории с меняющейся по величине и направлению скоростью.

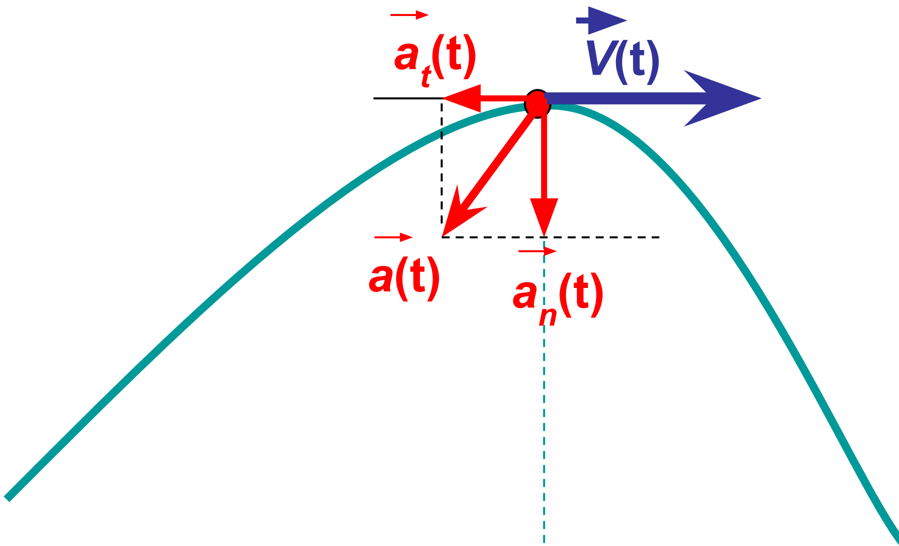
Вектор скорости $\vec{V}(t)$ всегда направлен по касательной к траектории.

Приращение вектора скорости $\Delta\vec{V}$ и , соответственно, вектор ускорения $\vec{a}(t)$ могут быть направлены как угодно под любым углом к вектору скорости.

Принято разделять две компоненты ускорения:

- тангенциальное $\vec{a}_t$, продольное направлению вектора скорости $\vec{V}(t)$
- нормальное $\vec{a}_n$, перпендикулярное направлению вектора скорости $\vec{V}(t)$

Тангенциальное ускорение отвечает за изменение модуля скорости
Нормальное ускорение - за изменение направления вектора скорости



Тангенциальное ускорение отвечает за изменение модуля скорости и равно:

$$a_t = d|\vec{V}(t)|/dt$$

Оно может быть отрицательным (модуль скорости убывает) или положительным (модуль скорости растет)

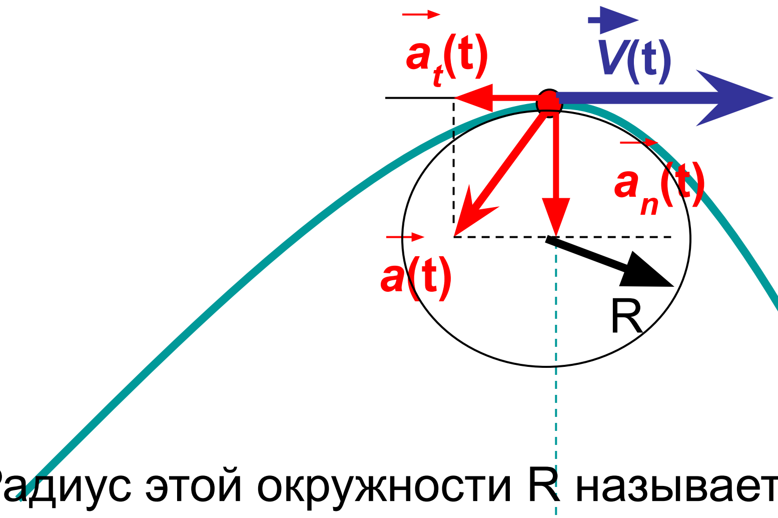
Тангенциальное ускорение - это проекция вектора ускорения на направление вектора скорости. Эту проекцию можно найти с помощью скалярного произведения векторов ускорения и скорости:

$$a_t = (\vec{a}, \vec{V})/V = a\,V\cos(\alpha) / V = a\cos(\alpha)$$

Проделаем некоторые математические преобразования

$$(\vec{a}, \vec{V}) = ((d\vec{V}/dt), \vec{V}) = 1/2\; d(\vec{V}, \vec{V})/dt = 1/2\; d(V^2)/dt = V\,dV/dt \Rightarrow a_t = dV/dt$$

Нормальное ускорение



Нормальное ускорение направлено перпендикулярно вектору скорости и отвечает за изменение направления вектора скорости.

Для любой точки криволинейной траектории можно указать вписанную окружность, максимально близко совпадающую с траекторией вблизи данной точки.

Радиус этой окружности R называется радиусом кривизны траектории в данной точке.

Из курса элементарной физики известно, что материальная точка, двигаясь по дуге окружности радиуса R, испытывает нормальное (перпендикулярное скорости) ускорение, равное по величине $a_n = V^2/R$

Модуль полного ускорения будет равен: $a = \sqrt{(dV/dt)^2 + (V^2/R)^2}$

Эту формулу можно использовать для нахождения радиуса кривизны траектории в данной точке:

$$R = V^2/\sqrt{(dV/dt)^2 - (dV/dt)^2}$$

Задание коллоквиума – привести полный вывод формул этого слайда

Абсолютно твердое тело в кинематике

Абсолютно твердое тело: протяженный объект (система материальных точек) расстояния между которыми не изменяются в процессе движения

Виды движения твердого тела

1. *Поступательное движение*
2. *Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси*
3. *Движение тела с одной закрепленной точкой*

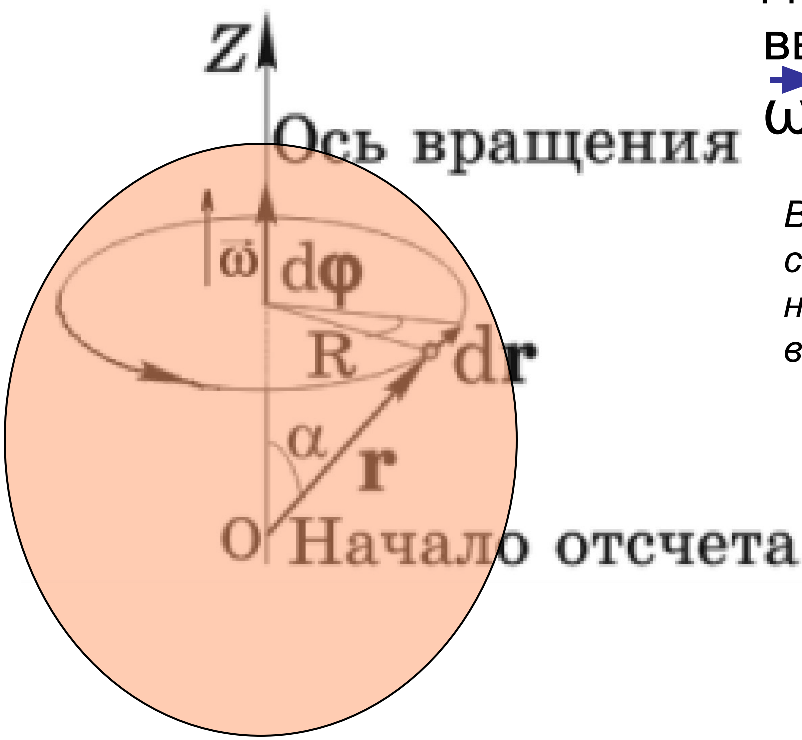
   (примеры рассмотрим позже)
4. *Плоское движение (см. школьный курс)*
5. *Произвольное движение твердого тела*

Движение твердого тела вокруг неподвижной оси

При таком движении достаточно следить только за углом поворота тела по отношению к исходному положению. Все его точки движутся по дугам концентрических окружностям. Такое движение имеет всего 1 степень свободы.

Для описания вращательного движения вводят понятие угловой скорости:

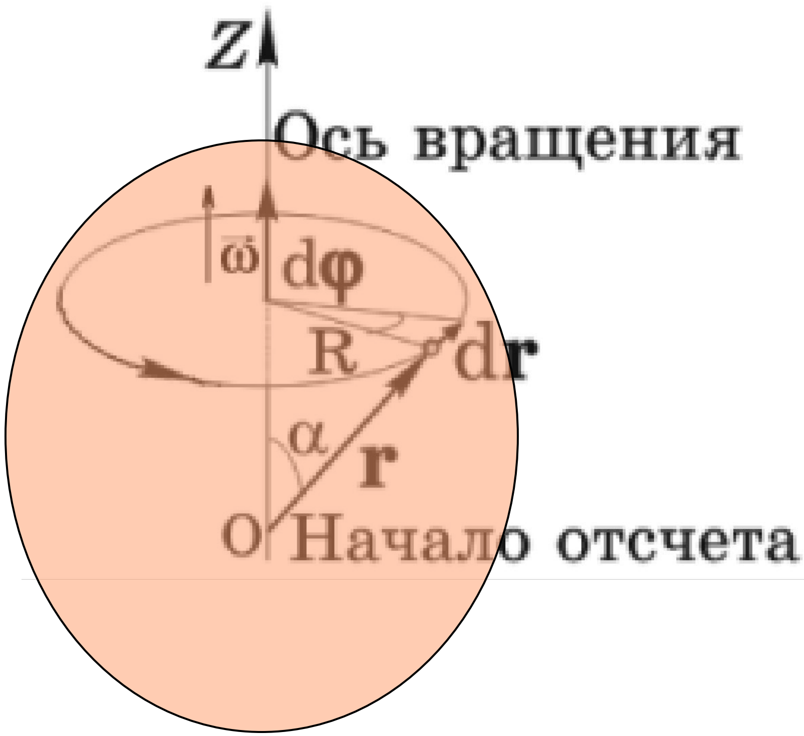
$\vec{\omega} = d\vec{\varphi}/dt$ (радиан/с или c^{-1})



В общем случае, при произвольном движении, угловую скорость следует рассматривать как вектор, направленный вдоль оси вращения - по правилу правого винта (в нашем примере вверх).

Такие вектора - связанные с направлением вращения - в математике называются псевдо-векторами

Связь угловой и линейной скорости



Линейная скорость материальной точки, отстоящей от оси вращения на расстояние R, связана с угловой простым соотношением:

$\vec{V} = d\vec{r}/dt = \vec{\omega} \times \vec{r} = [\vec{\omega},\vec{r}]$

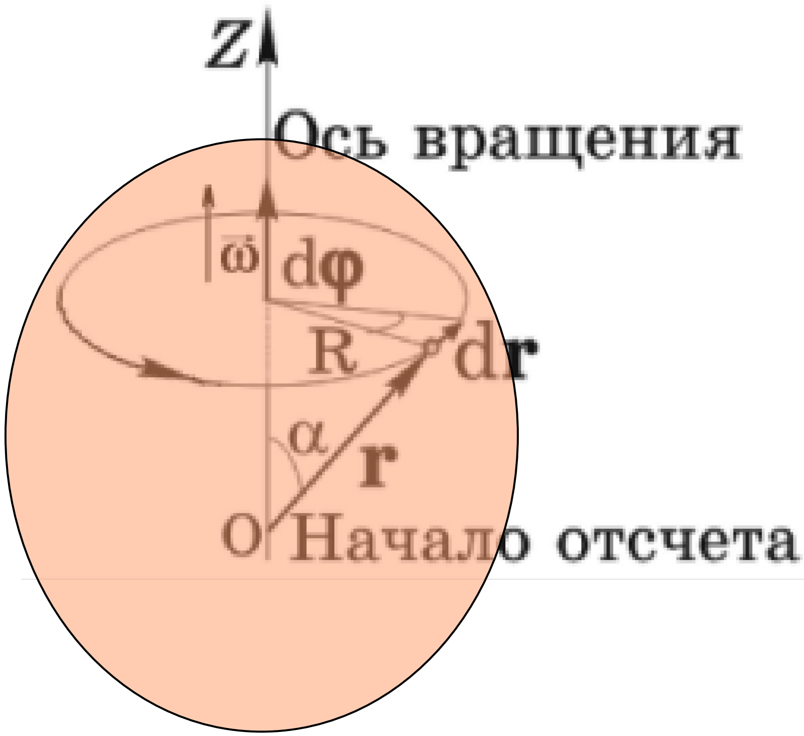
Конечное угловое перемещение – не вектор!

Задание коллоквиума:

– привести обоснование этого утверждения;

– изобразить вектор скорости на рисунке.

Движение твердого тела вокруг неподвижной оси



Для описания неравномерного вращательного движения вводят понятие углового ускорения:

$\vec{\beta} = d\vec{\omega}/dt$ (радиан/с^2 или с$^{-2}$)

В векторном представлении тангенциальное линейное ускорение определяется векторным произведением:

$$\vec{a}_t = [\vec{\beta}, \vec{r}]$$

Вектор углового ускорения продолен оси вращения, а вектор тангенциального ускорения, естественно, лежит в плоскости вращения точки.

Полное линейное ускорение точки по модулю определяется ее тангенциальным и нормальным ускорениями:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(\beta\ r \sin(\alpha))^2 + (V^2/R)^2} = R\sqrt{\beta^2 + \omega^4}$$

Произвольное движение твердого тела

Комбинация поступательного и вращательного движения возможна без всяких ограничений. Возможно движение в трех пространственных направлениях, сочетаемое с вращением в трех плоскостях.

При любом сложном движении скорость любой точки тела может быть представлена в виде

$$\vec{V} = \vec{V}_{поступ} + [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

Задание коллоквиума – привести полный вывод формул этого слайда