

Физические основы механики

Использована презентация доцента НИЯУ МИФИ, к.
ф.-м.н.,
Ольчак Андрей Станиславович

Кинематика материальной точки

Предмет кинематики: *Описание движения и связи между величинами, характеризующими это движение*

(описание, но пока НЕ объяснение!)

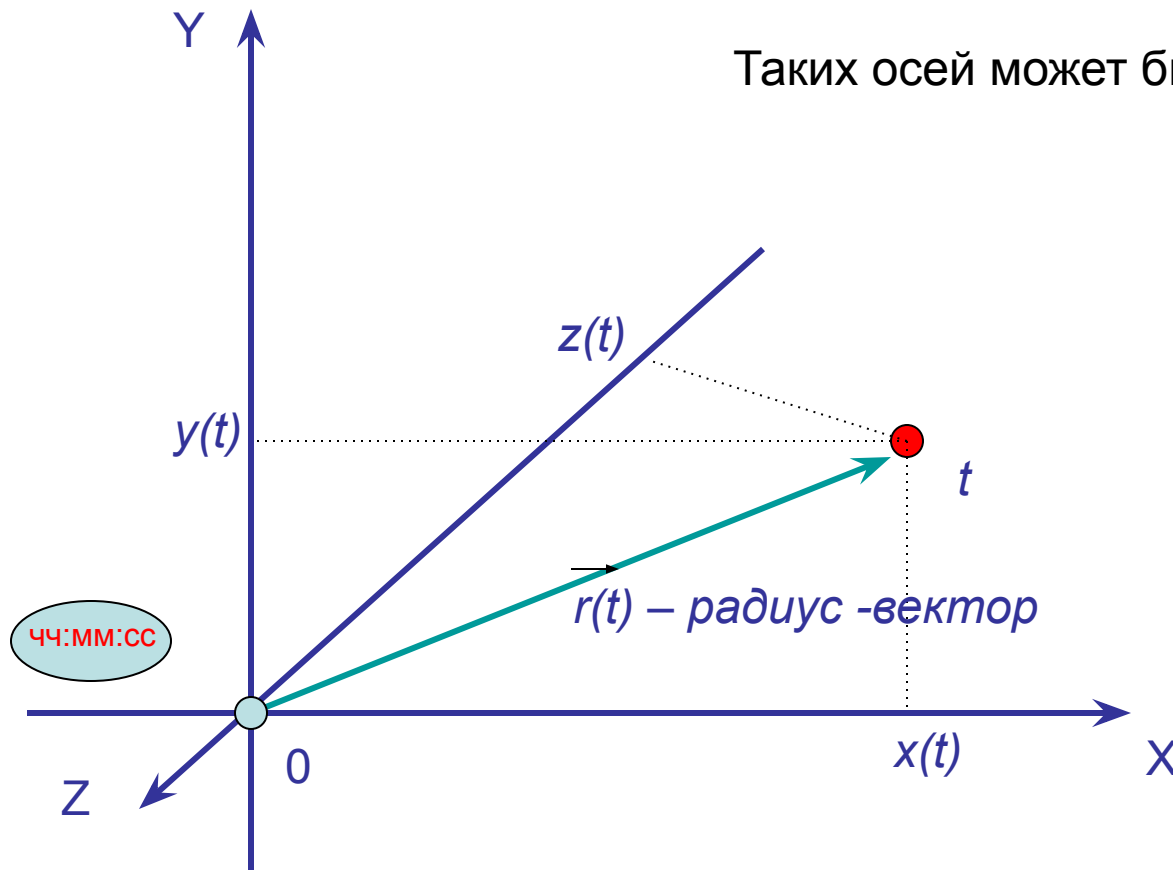
Основные понятия и величины кинематики:

- Материальная точка — объект, размерами и структурой которого в данной задаче можно пренебречь
- Координаты (x, y, z) — определяют положение точки в пространстве
- Система отсчета = система координат + часы + тело отсчета
- Радиус-вектор материальной точки (\vec{r})
- Перемещение ($\Delta\vec{r}$)
- Пройденный путь (S)
- Скорость (\vec{v})
- Ускорение (\vec{a})

Материальная точка, ее координаты, система отсчета

В декартовой системе отсчета:
координаты – проекции положения
точки на координатные оси.

Таких осей может быть три.

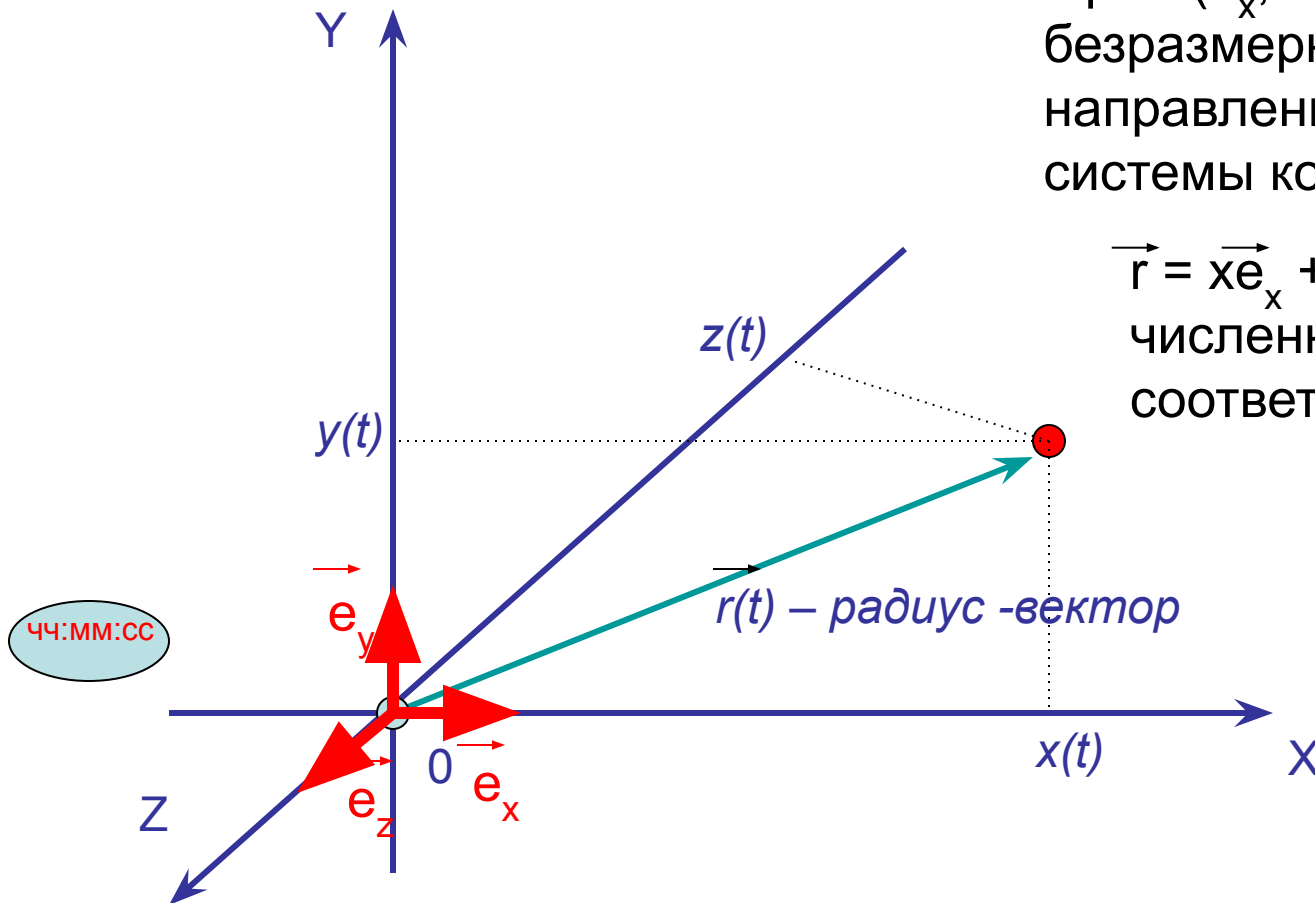


Радиус вектор материальной точки \vec{r} - направленный отрезок, проведенный из начала координат в данную точку пространства.

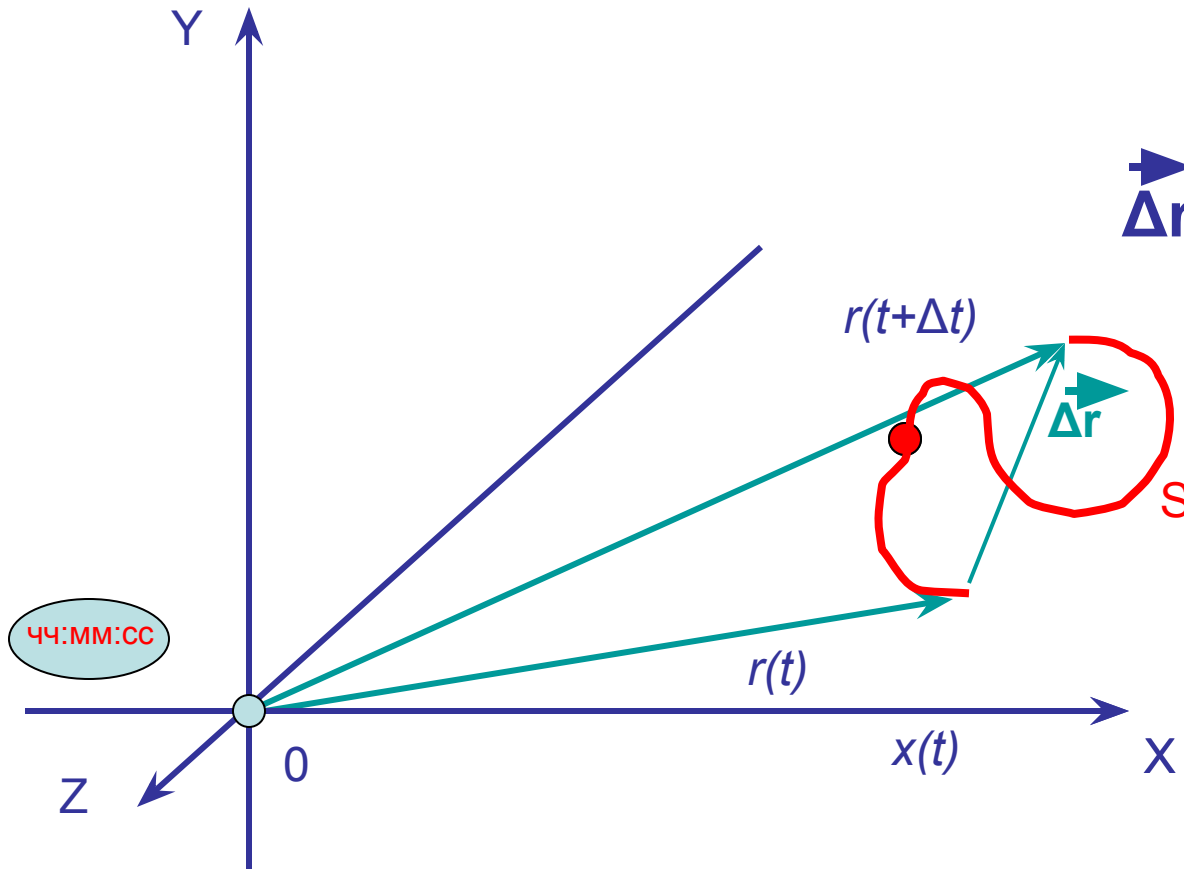
$$\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}^T$$

Орты ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) - единичные безразмерные векторы, направленные вдоль осей системы координат.

$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, где x, y, z - численные значения соответствующих координат.



Перемещение $\vec{\Delta r}$ - это приращение радиус-вектора \vec{r} за некоторое время (вектор, соединяющий начальное и конечное положение материальной точки)



$$\vec{\Delta r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

Пройденный путь S –
длина траектории
движения точки

Средняя скорость

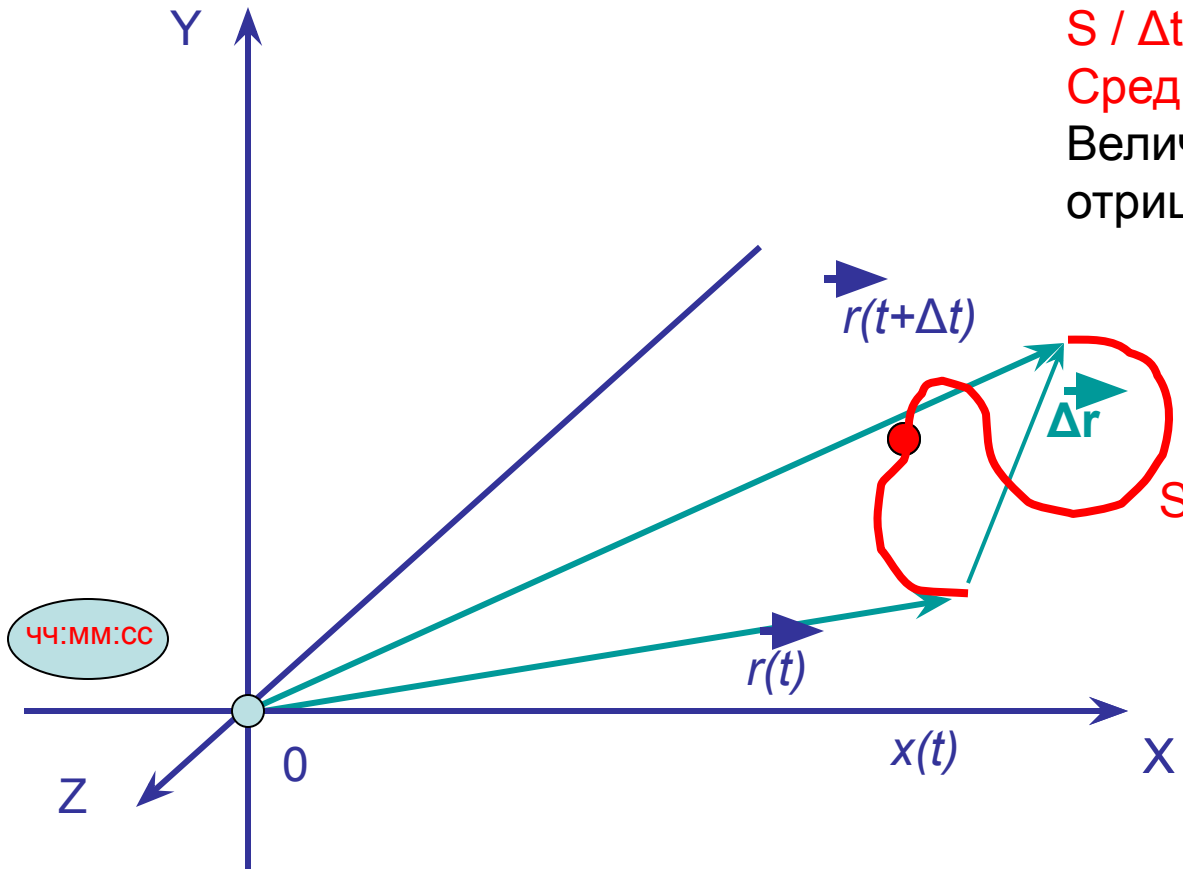
$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \langle \vec{V} \rangle$$

Средняя скорость (вектор)

$$S / \Delta t = \langle |V| \rangle$$

Средний модуль скорости.

Величина заведомо не отрицательная.



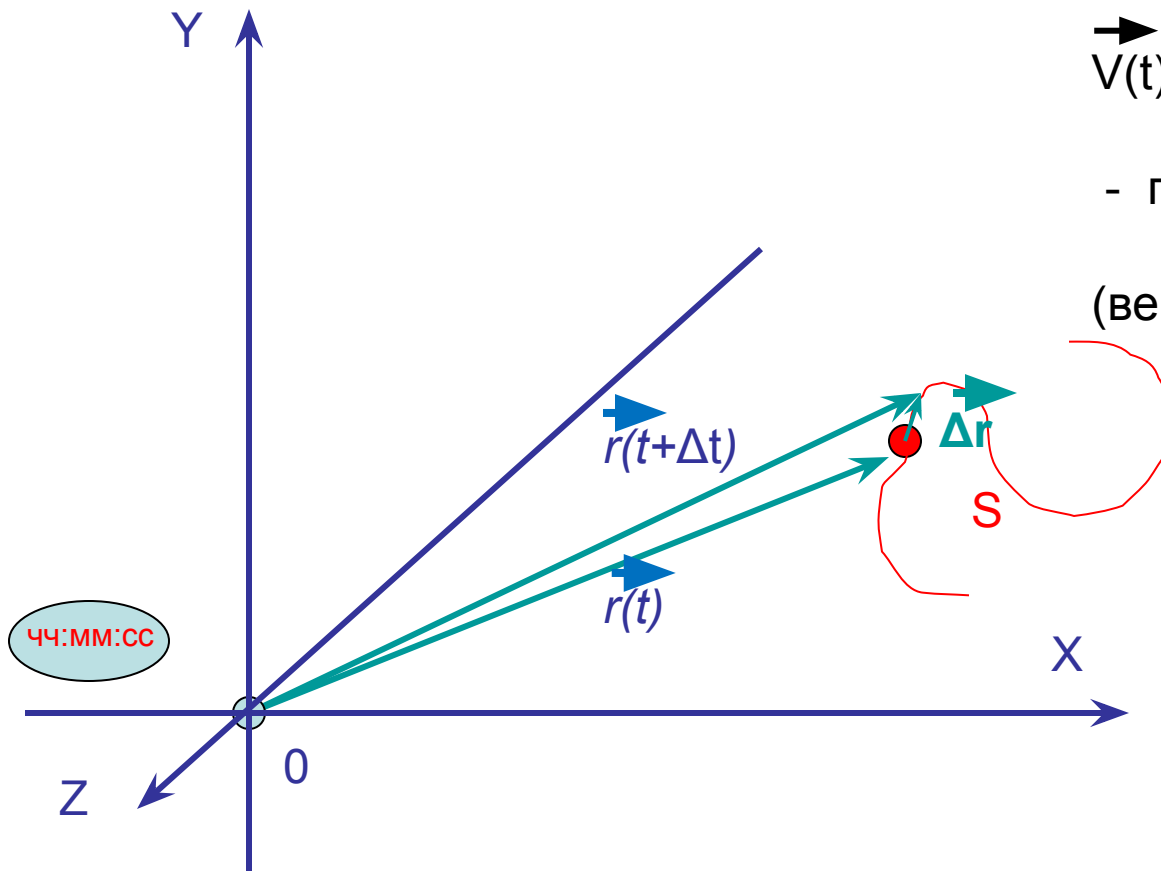
Мгновенная скорость (вектор)

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ - скорость (вектор)

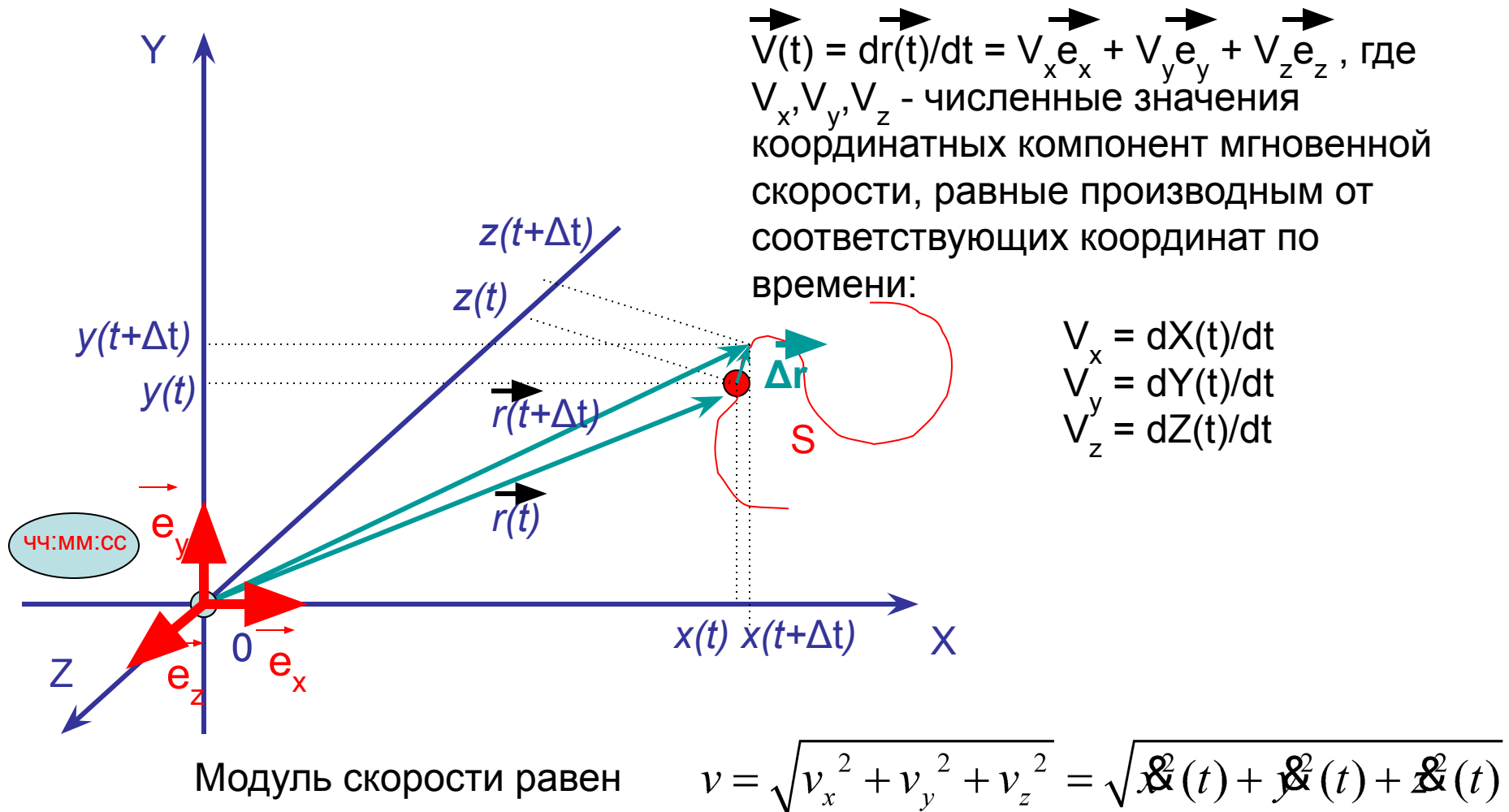
- производная от функции $\vec{r}(t)$

(вектор) по времени t



Мгновенная скорость в декартовой системе координат

Скорость, как вектор, раскладывается на координатные компоненты:

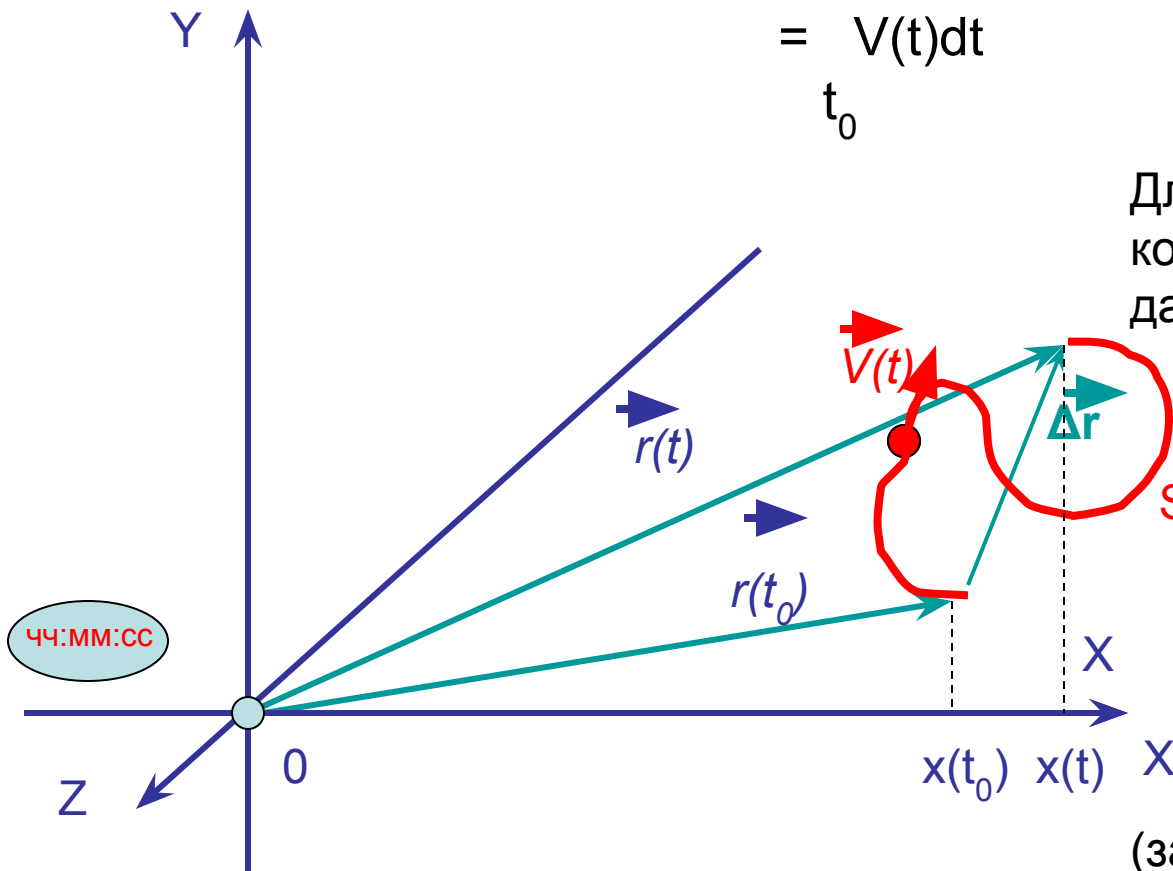


Связь скорости и перемещения

$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ - скорость есть производная от перемещения по времени

Следствие (в наших обозначениях): $d\vec{r} = \vec{V}(t)dt \Rightarrow \Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) =$

$$\int_{t_0}^t \vec{V}(t) dt$$



Для каждой координатной компоненты ее изменение дается интегралом:

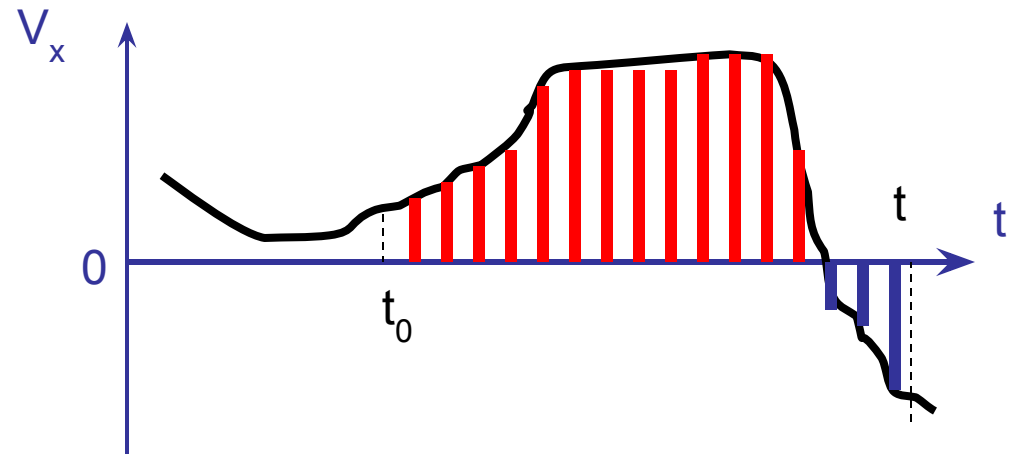
$$\Delta x = x(t_0) - x(t) =$$

$$\int_{t_0}^t V_x(t) dt$$

То же и для $y(t)$, $z(t)$

(записать самостоятельно – задание коллоквиума)

Связь скорости и перемещения – графики

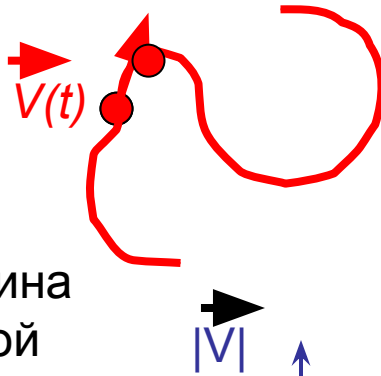


Геометрический смысл этого интеграла: изменение координаты

$$\Delta x = x(t_0) - x(t)$$

численно равно площади под графиком функции $V_x(t)$ между точками t_0 и t .

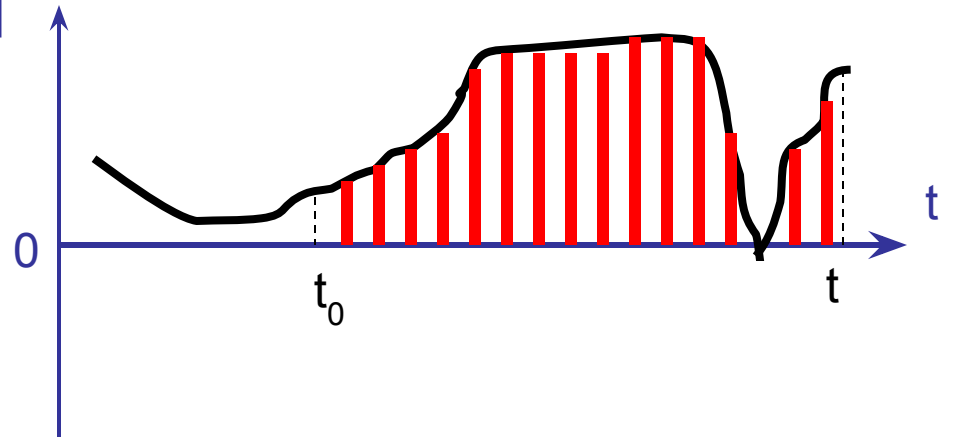
Часть площади под осью абсцисс при этом надо учитывать с отрицательным знаком



Пройденный путь S - длина траектории материальной точки. За малое время dt :
 $dS = |V(t)|dt$

За большее время от t_0 до t

$$S = \int_{t_0}^t |V(t)| dt$$



Геометрический смысл этого интеграла: пройденный путь S численно

равен площади под графиком функции модуля скорости $|V(t)|$ между точками t_0 и t

Это заведомо не отрицательная величина

Ускорение

Ускорением называется отношение приращения вектора скорости $\Delta \vec{v}$ за некоторое время Δt к величине этого времени.

$$\vec{a} = \Delta \vec{v} / \Delta t$$

Мгновенное ускорение:

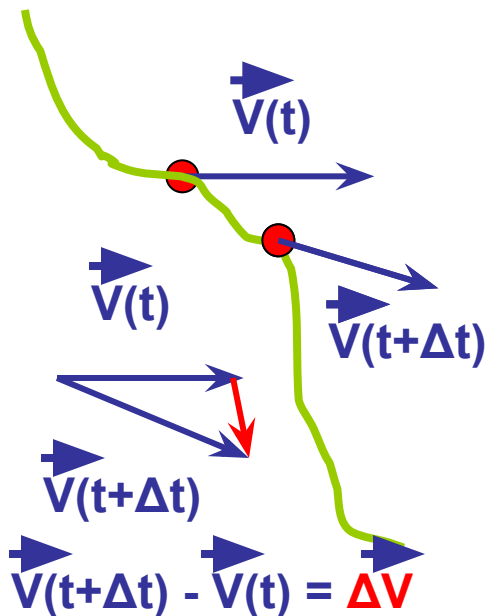
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)$$

Другими словами: ускорение это скорость изменения вектора скорости точки.

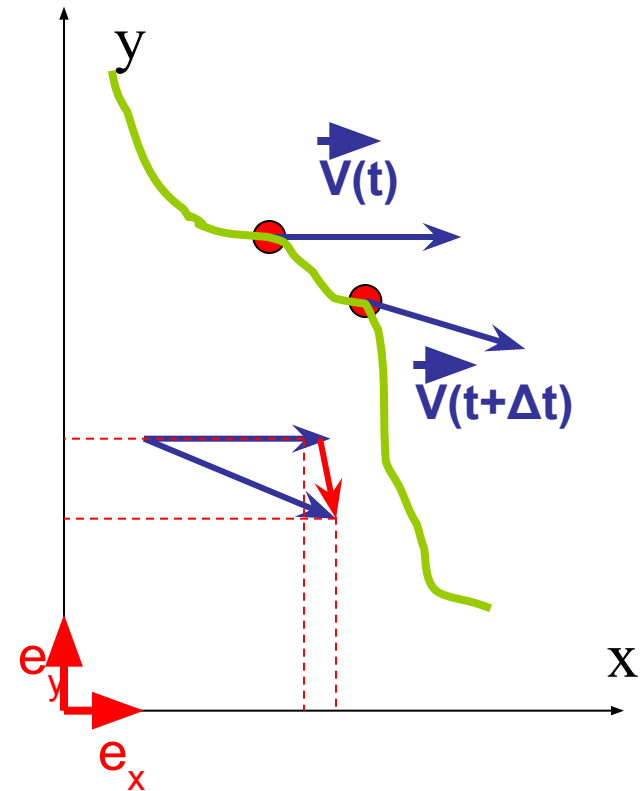
Математически ускорение - это первая

производная от скорости $\vec{v}(t)$ и вторая

производная от функции $\vec{r}(t)$ по времени



Ускорение в декартовой системе координат



В декартовой системе координат ускорение выражается через его проекции на координатные оси и векторы - орты:

$$\vec{a}(t) = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

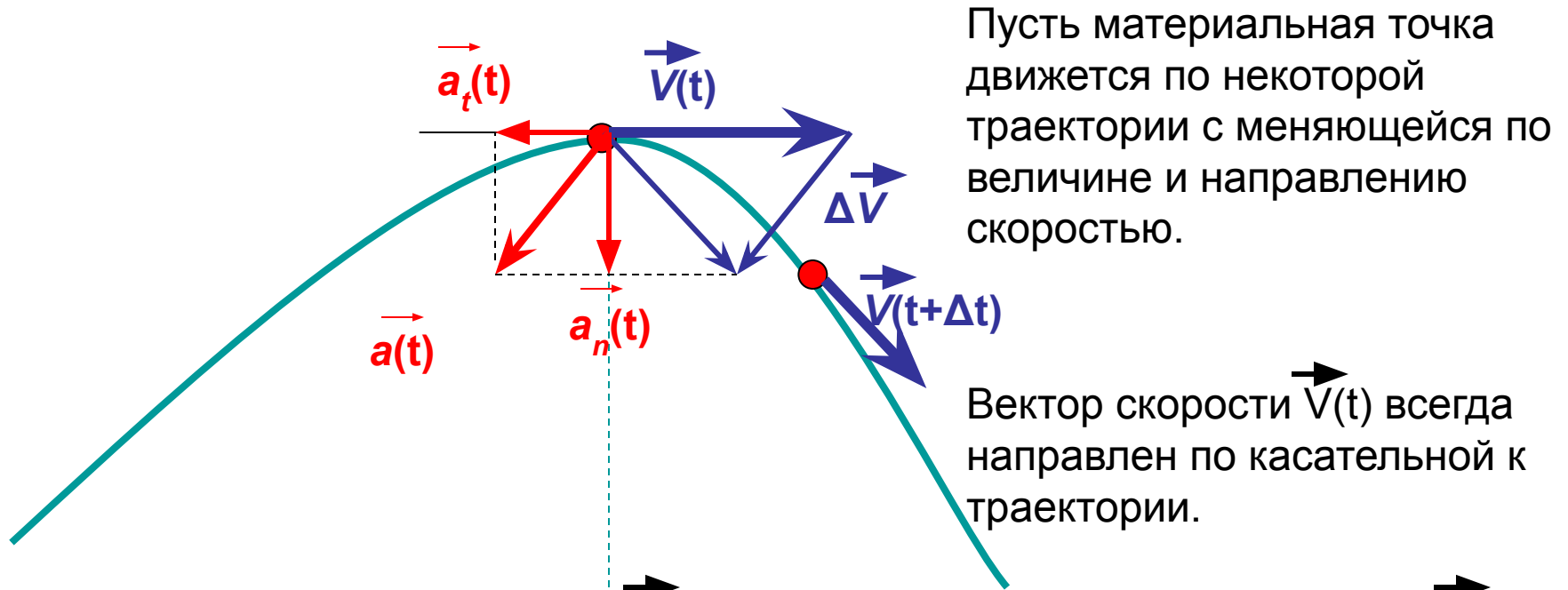
где

$$a_x = dV_x(t)/dt = d^2X(t)/dt^2$$
$$a_y = dV_y(t)/dt = d^2Y(t)/dt^2$$
$$a_z = dV_z(t)/dt = d^2Z(t)/dt^2$$

Модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Нормальное и тангенциальное ускорение



Пусть материальная точка движется по некоторой траектории с меняющейся по величине и направлению скоростью.

Вектор скорости $\vec{V}(t)$ всегда направлен по касательной к траектории.

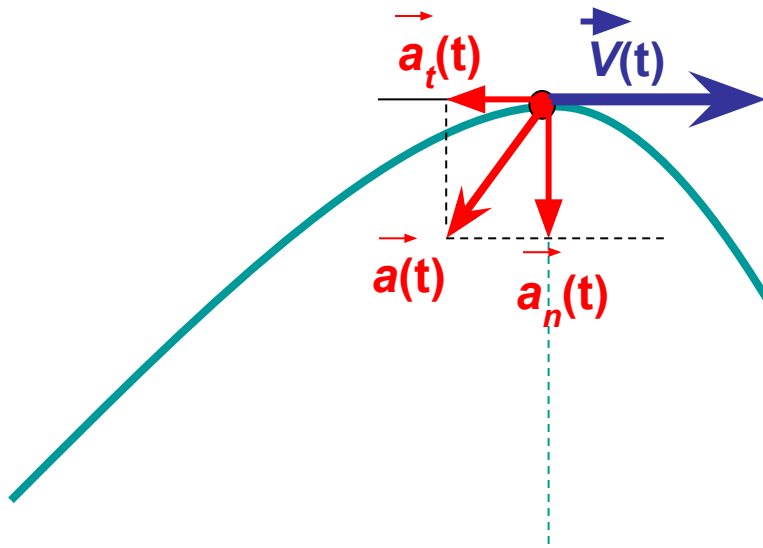
Приращение вектора скорости $\Delta\vec{V}$ и, соответственно, вектор ускорения $\vec{a}(t)$ могут быть направлены как угодно под любым углом к вектору скорости.

Принято разделять две компоненты ускорения:

- тангенциальное \vec{a}_t , продольное направлению вектора скорости $\vec{V}(t)$
- нормальное \vec{a}_n , перпендикулярное направлению вектора скорости $\vec{V}(t)$

Тангенциальное ускорение отвечает за изменение модуля скорости

Нормальное ускорение - за изменение направления вектора скорости



Тангенциальное ускорение отвечает за изменение модуля скорости и равно:

$$a_t = d|V(t)|/dt$$

Оно может быть отрицательным (модуль скорости убывает) или положительным (модуль скорости растёт)

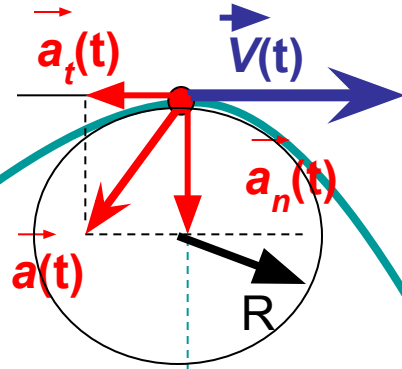
Тангенциальное ускорение - это проекция вектора ускорения на направление вектора скорости. Эту проекцию можно найти с помощью скалярного произведения векторов ускорения и скорости:

$$a_t = (\mathbf{a}, \mathbf{V})/V = a \mathbf{V} \cos(\alpha) / V = a \cos(\alpha)$$

Прделаем некоторые математические преобразования

$$(\mathbf{a}, \mathbf{V}) = ((dV/dt), V) = 1/2 d(\mathbf{V}, \mathbf{V})/dt = 1/2 d(V^2)/dt = V dV/dt \Rightarrow a_t = dV/dt$$

Нормальное ускорение



Нормальное ускорение направлено перпендикулярно вектору скорости и отвечает за изменение направления вектора скорости.

Для любой точки криволинейной траектории можно указать вписанную окружность, максимально близко совпадающую с траекторией вблизи данной точки.

Радиус этой окружности R называется радиусом кривизны траектории в данной точке.

Из курса элементарной физики известно, что материальная точка, двигаясь по дуге окружности радиуса R , испытывает нормальное (перпендикулярное скорости) ускорение, равное по величине $a_n = V^2/R$

Модуль полного ускорения будет равен: $a = \sqrt{(dV/dt)^2 + (V^2/R)^2}$

Эту формулу можно использовать для нахождения радиуса кривизны траектории в данной точке:

$$R = V^2 / \left((dV/dt)^2 - (dV/dt)^2 \right) \sqrt{\rightarrow}$$

Абсолютно твердое тело в кинематике

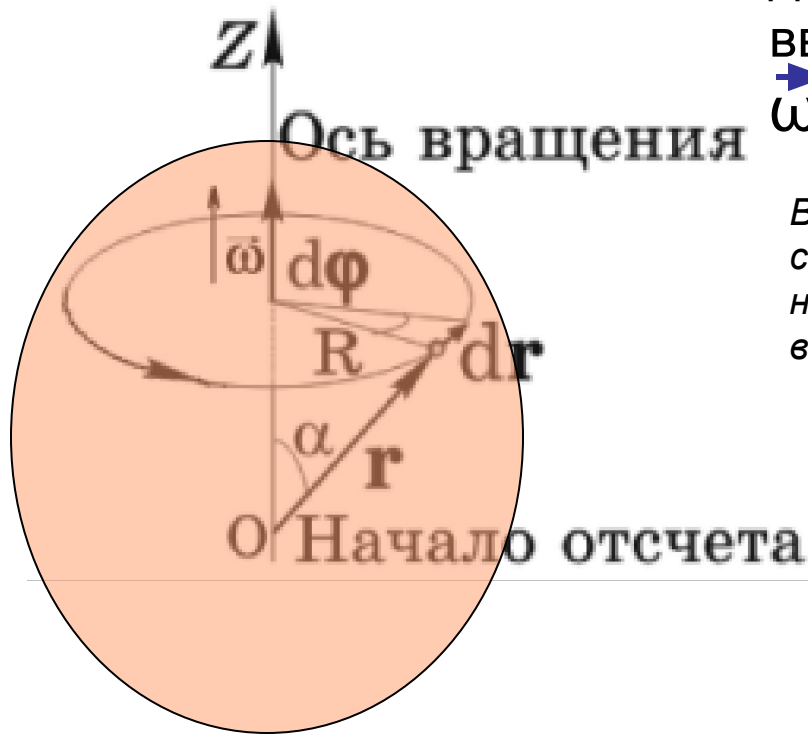
Абсолютно твердое тело: протяженный объект (система материальных точек) расстояния между которыми не изменяются в процессе движения

Виды движения твердого тела

- 1. Поступательное движение*
- 2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси*
- 3. Движение тела с одной закрепленной точкой*
(примеры рассмотрим позже)
- 4. Плоское движение (см. школьный курс)*
- 5. Произвольное движение твердого тела*

Движение твердого тела вокруг неподвижной оси

При таком движении достаточно следить только за углом поворота тела по отношению к исходному положению. Все его точки движутся по дугам концентрических окружностям. Такое движение имеет всего 1 степень свободы.

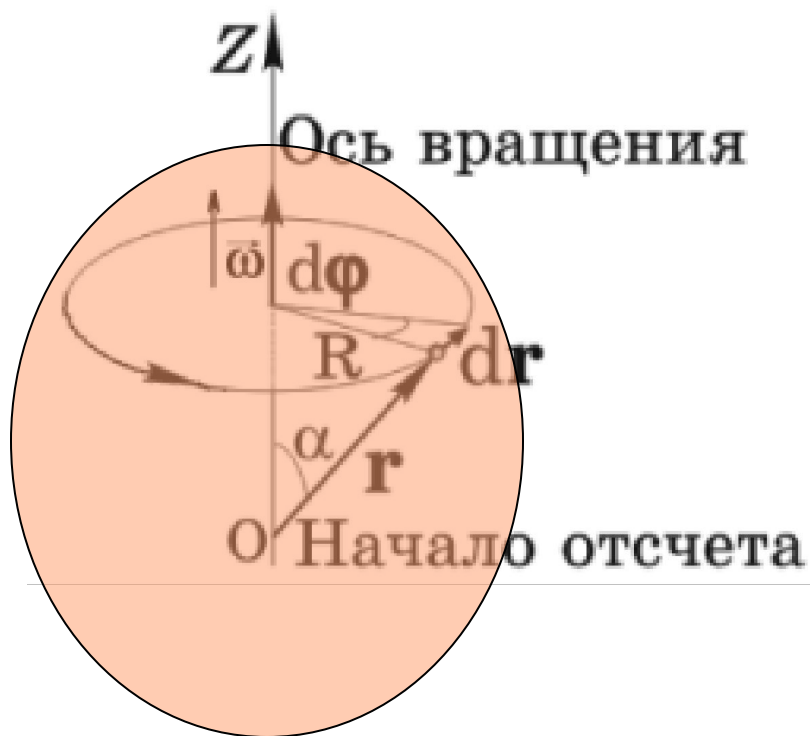


Для описания вращательного движения вводят понятие угловой скорости:
 $\vec{\omega} = d\vec{\varphi}/dt$ (радиан/с или s^{-1})

В общем случае, при произвольном движении, угловую скорость следует рассматривать как вектор, направленный вдоль оси вращения - по правилу правого винта (в нашем примере вверх).

Такие вектора - связанные с направлением вращения - в математике называются псевдо-векторами

Связь угловой и линейной скорости



Линейная скорость материальной точки, отстоящей от оси вращения на расстояние R, связана с угловой простым соотношением:

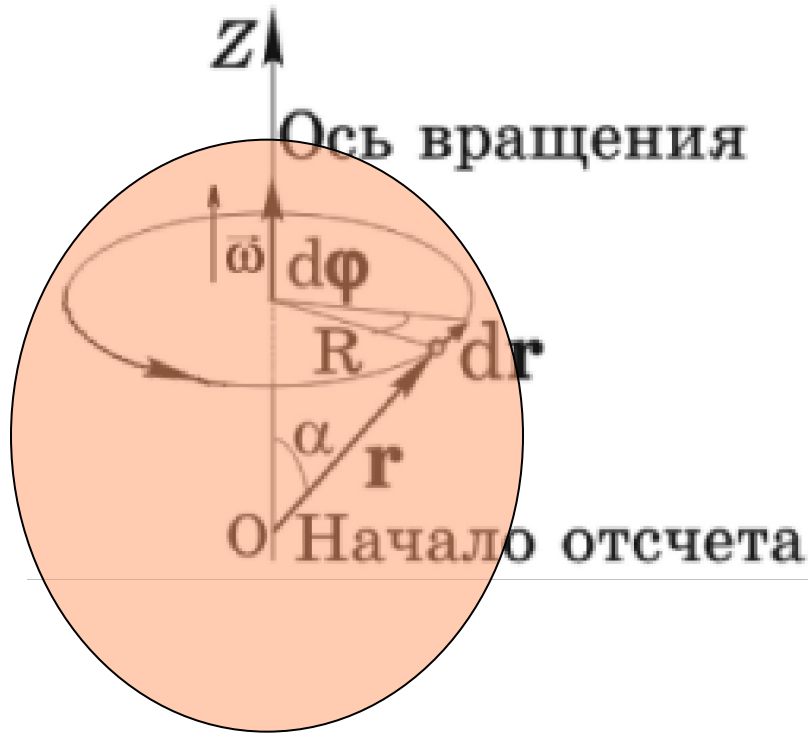
$$\vec{V} = d\vec{r}/dt = \vec{\omega} \times \vec{r} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

Конечное угловое перемещение – не вектор!

Задание коллоквиума:

- привести обоснование этого утверждения;
- изобразить вектор скорости на рисунке.

Движение твердого тела вокруг неподвижной оси



Для описания неравномерного вращательного движения вводят понятие углового ускорения:

$$\beta = d\omega/dt \text{ (радиан/с}^2 \text{ или с}^{-2}\text{)}$$

В векторном представлении тангенциальное линейное ускорение определяется векторным произведением:

$$\mathbf{a}_t = [\beta, \vec{r}]$$

Вектор углового ускорения продолжен оси вращения, а вектор тангенциального ускорения, естественно, лежит в плоскости вращения точки.

Полное линейное ускорение точки по модулю определяется ее тангенциальным и нормальным ускорениями:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(\beta r \sin(\alpha))^2 + (V^2/R)^2} = R\sqrt{\beta^2 + \omega^4}$$

Произвольное движение твердого тела

Комбинация поступательного и вращательного движения возможна без всяких ограничений. Возможно движение в трех пространственных направлениях, сочетаемое с вращением в трех плоскостях.

При любом сложном движении скорость любой точки тела может быть представлена в виде

$$\vec{V} = \vec{V}_{\text{поступ}} + [\vec{\omega}, \vec{r}]$$