

**Задание №23:  
подсчёт количества  
программ**

**Время выполнения: 8 минут**

# Задача 1

# Задача 1

У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

- 1. прибавь 1**
- 2. умножь на 2**

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 16?

# Решение задачи 1

Задача имеет два способа решения: подстановка и таблица.

Таблица – более простой и универсальный способ.

Мы разберём оба.

# Решение задачи 1 – таблица

У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

**1. прибавь 1**

**2. умножь на 2**

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 16?

Составим таблицу, в которой будет две строки и 16 столбцов (т.к. мы работаем с числами от 1 до 16). Верхний ряд пронумеруем числами от 1 до 16.

Верхний ряд обозначает число, которое получает исполнитель,

а нижний ряд – количество программ, которые преобразуют 1 в это число.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----

# Решение задачи 1 – таблица

Поставим 1 в первый столбец (существует одна программа, позволяющая из 1 получить 1 – это программа, в которой нет действий).

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

**1**

Если 1 уже получена, то 2 можно получить 2 способами:

1.  $1 + 1$

2.  $1 * 2$

Если двойка была получена первым способом, количество программ равно 1. Если двойка была получена вторым способом, количество программ тоже равно 1.

$1 + 1 = 2$  – количество программ для двойки.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

**1 2**

# Решение задачи 1 – таблица

Тройку можно получить только одним способом: к 2 прибавить 1 (т.к. нет такого целого числа, умножив которое на 2, можно получить 3).

Если есть две программы, которые дают 2, то и программ, которые дают 3, тоже всего две.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

**1 2 2**

Четвёрку можно получить 2 способами:

1.  $2 * 2$

2.  $3 + 1$

Есть две программы, которые дают 2, и 2 программы, которые дают 3. Значит, существует  $2 + 2 = 4$  программы, которые дают 4.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

**1 2 2 4**





# Решение задачи 1 – таблица

Семь можно получить только одним способом:  $6 + 1 = 7$ .  
Количество программ для 6 равно шести, значит, и для 7 существует всего шесть программы.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>6</b>									

Восемь можно получить 2 способами:

1.  $4 * 2$

2.  $7 + 1$

Есть четыре программы, которые дают 4, и шесть программ, которые дают 7. Значит, существует  $4 + 6 = 10$  программ, которые дают 8.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>10</b>								

# Решение задачи 1 – таблица

Можно сделать следующий вывод: если  $K(N)$  – количество программ, которые дают число  $N$ , то

$K(N) = K(N - 1)$ , если  $N$  – нечётное число (см. разборы на предыдущих слайдах для чисел 3, 5, 7)

$K(N) = K(N - 1) + K(N / 2)$ , если  $N$  – чётное число (см. разборы на предыдущих слайдах для чисел 2, 4, 6, 8).

Поэтому для 9 количество программ  $K(9) = K(8) = 10$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>10</b>	<b>10</b>							

Для 10 количество программ  $K(10) = K(9) + K(5) = 10 + 4 = 14$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>14</b>						

# Решение задачи 1 – таблица

И т.д. Заполним таблицу до конца:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>14</b>	<b>14</b>	<b>20</b>	<b>20</b>	<b>26</b>	<b>26</b>	<b>36</b>

Количество программ для 16 равно 36. Это и есть ответ.

Ответ: 36

# Решение задачи 1 – подстановка

Это второй способ решения задачи.

Мы уже определили, что  
если  $K(N)$  – количество программ,  
которые дают число  $N$ , то

$K(N) = K(N - 1)$ , если  $N$  – нечётное число

$K(N) = K(N - 1) + K(N / 2)$ , если  $N$  – чётное

число

# Решение задачи 1 – подстановка

Получается, что:

$$K(16) = K(15) + K(8)$$

$$K(15) = K(14)$$

$$K(14) = K(13) + K(7)$$

$$K(13) = K(12)$$

$$K(12) = K(11) + K(6)$$

$$K(11) = K(10)$$

$$K(10) = K(9) + K(5)$$

$$K(9) = K(8)$$

$$K(8) = K(7) + K(4)$$

$$K(7) = K(6)$$

$$K(6) = K(5) + K(3)$$

$$K(5) = K(4)$$

$$K(4) = K(3) + K(2)$$

$$K(3) = K(2)$$

$$K(2) = K(1) + K(1)$$

$$K(1) = 1$$

Теперь подставим  
полученное значение в  
формулы.

# Решение задачи 1 – подстановка

$$K(1) = 1$$

$$K(2) = K(1) + K(1) = 1 + 1 + 2$$

$$K(3) = K(2) = 2$$

$$K(4) = K(3) + K(2) = 2 + 2 = 4$$

$$K(5) = K(4) = 4$$

$$K(6) = K(5) + K(3) = 4 + 2 = 6$$

$$K(7) = K(6) = 6$$

$$K(8) = K(7) + K(4) = 6 + 4 = 10$$

$$K(9) = K(8) = 10$$

$$K(10) = K(9) + K(5) = 14$$

$$K(11) = K(10) = 14$$

$$K(12) = K(11) + K(6) = 20$$

$$K(13) = K(12) = 20$$

$$K(14) = K(13) + K(7) = 26$$

$$K(15) = K(14) = 26$$

$$K(16) = K(15) + K(8) = 36$$

Ответ: 36

**Самостоятельно**

# Самостоятельно

**1.1)** У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 4

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 55?

**1.2)** У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 4

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 32?

**1.3)** У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 3

Сколько есть программ, которые число 5 преобразуют в число 49?



# ОТВЕТЫ

1.1) 32

1.2) 15

1.3) 15

# Самостоятельно

**1.4)** У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 2
3. умножь на 3

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 18?

**1.5)** У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 3
3. умножь на 2

Сколько есть программ, которые число 3 преобразуют в число 15?

# ОТВЕТЫ

1.4) 96

1.5) 102

# Задача 2

# Задача 2

Исполнитель преобразует число на экране. У исполнителя есть две команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая умножает его на 2. Программа для исполнителя Июнь15 – это последовательность команд. Сколько существует программ, для которых при исходном числе 1 результатом является число 21 и при этом траектория вычислений **содержит число 10**?

# Решение задачи 2

Если в условии сказано, что траектория программы содержит число  $X$ , то задачу нужно разбить на две:

1. определить количество программ, дающих  $X$ , и
2. определить количество программ, из числа  $X$  дающих требуемое конечное число.

По условию: исходное число – 1, результат – 21, траектория содержит 10. ( **1** → **21**    **+10** )

Следовательно, решаем 2 задачи:

- 1) исходное число – 1, результат – 10;
- 2) исходное число – 10, результат 21.

# Решение задачи 2

1 часть решения: из 1 получаем 10.

$K(N) = K(N - 1)$ , если  $N$  – нечётное

$K(N) = K(N - 1) + K(N / 2)$ , если  $N$  – чётное

Решение с помощью таблицы:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	2	4	4	6	6	10	10	14

Существует 14 программ, дающих число 10.

# Решение задачи 2

2 часть решения: из **10** → **21**.

$K(N) = K(N - 1)$ , если  $N$  – нечётное

$K(N) = K(N - 1) + K(N / 2)$ , если  $N$  – чётное

Но требуется учитывать, что число 10 дают 14 программ (а не 1)!

<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	13	14	15	16	17	18	19	<b>20</b>	<b>21</b>
<b>14</b>	<b>14</b>	<b>14</b>	<b>14</b>	<b>14</b>	<b>14</b>	<b>14</b>	<b>14</b>	<b>14</b>	<b>14</b>	<b>28</b>	<b>28</b>

Ответ: 28



# Решение задачи 2

## Способ 2

$$K(N) = K(N - 1) + K(N / 2)$$

Также разбиваем задачу на две:

1: **1** → **10**

Считаем количество программ (здесь ничего не меняется)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	2	4	4	6	6	10	10	14

2: **10** → **21**

Считаем количество программ:

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2

А теперь перемножаем :  $14 * 2 = 28$

# Пример

Исполнитель Калькулятор преобразует число, записанное на экране. У исполнителя есть команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1,
2. Прибавить 5,
3. Умножить на 2.

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 4 результатом является число 24 и при этом траектория содержит числа 11 и 18 ?

$$K_N = K_{N-1} + K_{N-5} + K_{N/2}$$

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1	1	1	2	3	5	6	6	6	6	6	12	18	24	24	24	24	24	48	72

## Решение примера (способ 2)

Разбиваем на три задачи:  $K_N = K_{N-1} + K_{N-5} + K_{N/2}$

Задача №1: 4 → 11

Задача №2: 11 → 18

Задача №3: 18 → 24

Перемножаем найденные

результаты: 4 →

11							
4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	2	3	5	6

Количество программ:

**6**

## Решение примера (способ 2)

Задача №2: 11 →

$$K_N = K_{N-1} + K_{N-5} + K_{N/2}$$

11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	1	1	1	2	3	4

Количество программ:

<sup>4</sup>Задача №3: 18 →

18	19	20	21	22	23	24
1	1	1	1	1	2	3

Количество программ:

<sup>3</sup>Перемножаем полученные результаты:  $6*4*3=72$

**Самостоятельно**

# Самостоятельно

**2.1)** Исполнитель Июнь15 преобразует число на экране. У исполнителя есть две команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая умножает его на

2. Программа для исполнителя Июнь15 – это последовательность команд.

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 2 результатом является число 34 и при этом **траектория вычислений содержит число 12?**

**2.2)** Исполнитель Июнь16 преобразует число на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 2
3. Умножить на 2

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 3 результатом является число 13 и при этом **траектория вычислений содержит число 10?**



# Задача 3



# Задача 3

Исполнитель Июнь16 преобразует число на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 2
3. Умножить на 2

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 3 результатом является число 13 и при этом **траектория вычислений не содержит число 8?**

# Решение задачи 3

Если в условии сказано, что траектория программы **НЕ** содержит число  $X$ , то:

- 1) при решении с помощью таблицы у  $X$  ставим 0;
- 2) при решении подстановкой сразу пишем, что  $K(X) = 0$ .

Больше никаких отличий от обычного решения нет.

# Решение задачи 3

Т.к. исполнитель имеет команды:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 2
3. Умножить на 2

и траектория не содержит число 8, то:

$K(1) = 1$ ,  $K(2) = 1$ ,  $K(8) = 0$ , для остальных чисел

$K(N) = K(N - 1) + K(N - 2)$ , если  $N$  – нечётное

$K(N) = K(N - 1) + K(N - 2) + K(N / 2)$ , если  $N$  – чётное

Решение с помощью таблицы:

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	2	4	6	0	6	8	14	26	40

Ответ: 40

**Самостоятельно**

# Самостоятельно

**3.1)** Исполнитель Июнь16 преобразует число на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 2
3. Умножить на 2

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 2 результатом является число 12 и при этом траектория вычислений **не содержит число 10**?

**3.2)** Исполнитель Июнь16 преобразует число на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 2
3. Умножить на 3

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 2 результатом является число 16 и при этом траектория вычислений **не содержит число 14**?

# ОТВЕТЫ

3.1) 43      $K_N = K_{N-1} + K_{N-2} + K_{N/2}$       $2 \rightarrow 12$      **-10**

2	3	4	5	6	7	8	9	<b>10</b>	11	12
1	1	3	4	8	12	23	35	<b>0</b>	35	43

3.2) 175      $K_N = K_{N-1} + K_{N-2} + K_{N/3}$       $2 \rightarrow 16$      **-14**

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	<b>14</b>	15	16
1	1	2	3	6	9	15	25	40	65	107	172	<b>0</b>	175	175

# Самостоятельно

**4.1)** Исполнитель R17 преобразует число, записанное на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 2
3. Умножить на 2

Программа для исполнителя R17 – это последовательность команд.

Сколько существует таких программ, которые исходное число 1 преобразуют в число 12 и при этом траектория вычислений программы содержит число 7 и число 10?

**4.2)** Исполнитель R17 преобразует число, записанное на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 2
3. Умножить на 3

Программа для исполнителя R17 – это последовательность команд.

Сколько существует таких программ, которые исходное число 2 преобразуют в число 15 и при этом траектория вычислений программы содержит число 4 и число 11?

# ОТВЕТЫ

4.1) **180**

$$K_N = K_{N-1} + K_{N-2} + K_{N/2}$$

**1 → 12**

**+7 и +10**

1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	7	10	20	30
			7	8	9	10
			1	1	2	3
				10	11	12
				1	1	2

**1 → 7**

**7 → 10**

**10 → 12**

Перемножаем  **$30 * 3 * 2 = 180$**



4.2) 210

$$K_N = K_{N-1} + K_{N-2} + K_{N/3}$$

2 → 15

+4 и +7

2	3	4
1	1	2

2 → 4

4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	5	8	13	21

4 → 11

11	12	13	14	15
1	1	2	3	5

11 → 15

Перемножаем  $2 * 21 * 5 = 210$

# Самостоятельно

**5.1)** Исполнитель Май18 преобразует число на экране. У исполнителя есть две команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 3

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 2 результатом является число 18 и при этом траектория вычислений **содержит число 9 и не содержит число 14?**

**5.2)** Исполнитель Калькулятор преобразует число на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2
3. Умножить на 3

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 5 результатом является число 52 и при этом траектория вычислений **содержит число 15 и не содержит число 29?**

# ОТВЕТЫ

5.1) 63

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	1	2	3	4	6	9	9	9	18	27	0	18	45	45	63

5.2) 75

5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	0
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52			
5	5	10	10	15	15	20	20	25	25	30	30	35	35	40	45	50	50	60	60	65	70	75			

# Задача 4

# Задача 4

У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

**1. прибавь 1**

**2. прибавь 3**

Сколько есть программ, которые число 7 преобразуют в число 20 и при этом **последняя команда 1?**

# Решение задачи 4

Число, которые программа должна получить, - 20. Последняя команда 1, значит, 20 было получено из 19:  $19 + 1$ .

Количество программ, дающих 20, равно  $K(20) = K(19)$ .

Т.е. для решения задачи надо найти  $K(19)$ .

Решение с помощью таблицы:

<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>19</b>
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>9</b>	<b>13</b>	<b>19</b>	<b>28</b>	<b>41</b>	<b>60</b>

$$K(20) = K(19) = 60$$

Это ответ.

**Самостоятельно**

# Самостоятельно

4.1) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 3

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 15 и в которых **последняя команда 2**?



# ОТВЕТЫ

4.1) 41

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41

# Задача 5

# Задача 5

Исполнитель Калькулятор преобразует целое число, записанное на экране. У исполнителя две команды, каждой команде присвоен номер:

1. Прибавь 1
2. Умножь на 2

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая увеличивает это число в 2 раза.

Сколько существует программ, которые число 3 преобразуют в число 20 и в которых предпоследняя команда 1?

# Решение задачи

5

В условии сказано, что предпоследняя команда **1**.

**Последняя** команда может быть любой – **либо 1, либо 2**.

Это означает, что нужно рассмотреть и получить количество всех команд вида «\*11» и «\*12».

Звездочка означает любую последовательность команд.

# Решение задачи 5

Если две последние команды «**11**», то к числу 20 можно прийти :

$$\text{от числа } X \Rightarrow (X+1)+1=20; \Rightarrow X = 18$$

Это значит, что нам нужно получить

**количество программ, преобразующих 3 в 18.**

# Решение задачи 5

Если две последние команды «12»,

то к числу 20 можно прийти :

$$\text{от числа } Y \Rightarrow (Y+1)*2=20; \Rightarrow Y=9$$

Это значит, что нам нужно получить

**количество программ, преобразующих 3 в**

**9.**

**И сложить эти два результата.**

Число  $N$  могло быть получено одной из двух операций:

- увеличением на 1 числа  $N-1$ ;
- умножением на 2 числа  $N/2$  (только для четных  $N$ )

Общая рекуррентная формула:  $K_N = K_{N-1} + K_{N/2}$

Если  $N$  нечетное, то считаем, что  $K_{N/2} = 0$ .

$$K_N = K_{N-1} + K_{N/2}$$

3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	2	2	3	3

$$K_9 = K_8 = 3$$

$$K_8 = K_7 + K_4 = 3$$

$$K_7 = K_6 = 2$$

$$K_6 = K_5 + K_3 = 2$$

$$K_5 = K_4 = 1$$

$$K_4 = K_3 + K_2 = 1$$

$$K_3 = 1$$

Количество программ  $3 \rightarrow 9$   
равно **3**



$$K_N = K_{N-1} + K_{N/2}$$

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	1	2	2	3	3	4	4	6	6	8	8	11	11	14

Количество программ  $3 \rightarrow 18$  равно **14**

$$3 \rightarrow 9 = 3$$

$$3 \rightarrow 18 = 14$$

Всего :  $3 + 14 = 17$  программ

**Ответ:**

**17**

**Самостоятельно**

# Самостоятельно

**5.1)** Исполнитель Калькулятор преобразует целое число, записанное на экране. У исполнителя две команды, каждой команде присвоен номер:

**1. Прибавь 1**

**2. Умножь на 2**

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая увеличивает это число в 2 раза. Сколько существует программ, которые число 5 преобразуют в число 32 и в которых **предпоследняя команда 1?**

**5.2)** Исполнитель Калькулятор преобразует целое число, записанное на экране. У исполнителя две команды, каждой команде присвоен номер:

**1. Прибавь 1**

**2. Прибавь 2**

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая увеличивает – на 2. Сколько существует программ, которые число 3 преобразуют в число 18 и в которых **предпоследняя команда 2?**

# ОТВЕТЫ

5.1) 28

5.2) 377