

**Задание №23:
подсчёт количества
программ**

Время выполнения: 8 минут

Задача 1

Задача 1

У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

- 1. прибавь 1**
- 2. умножь на 2**

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 16?

Решение задачи 1

Задача имеет два способа решения: подстановка и таблица.

Таблица – более простой и универсальный способ.

Мы разберём оба.

Решение задачи 1 – таблица

У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1

2. умножь на 2

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 16?

Составим таблицу, в котором будет две строки и 16 столбцов (т.к. мы работаем с числами от 1 до 16). Верхний ряд пронумеруем числами от 1 до 16.

Верхний ряд обозначает число, которое получает исполнитель,

а нижний ряд – количество программ, которые преобразуют 1 в это число.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----

Решение задачи 1 – таблица

Поставим 1 в первый столбец (существует одна программа, позволяющая из 1 получить 1 – это программа, в которой нет действий).

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

1

Если 1 уже получена, то 2 можно получить 2 способами:

1. $1 + 1$

2. $1 * 2$

Если двойка была получена первым способом, количество программ равно 1. Если двойка была получена вторым способом, количество программ тоже равно 1.

$1 + 1 = 2$ – количество программ для двойки.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

1 2

Решение задачи 1 – таблица

Тройку можно получить только одним способом: к 2 прибавить 1 (т.к. нет такого целого числа, умножив которое на 2, можно получить 3).

Если есть две программы, которые дают 2, то и программ, которые дают 3, тоже всего две.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

1 2 2

Четвёрку можно получить 2 способами:

1. $2 * 2$

2. $3 + 1$

Есть две программы, которые дают 2, и 2 программы, которые дают 3. Значит, существует $2 + 2 = 4$ программы, которые дают 4.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

1 2 2 4

Решение задачи 1 – таблица

Семь можно получить только одним способом: $6 + 1 = 7$.
Количество программ для 6 равно шести, значит, и для 7 существует всего шесть программы.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	2	4	4	6	6									

Восемь можно получить 2 способами:

1. $4 * 2$

2. $7 + 1$

Есть четыре программы, которые дают 4, и шесть программ, которые дают 7. Значит, существует $4 + 6 = 10$ программ, которые дают 8.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	2	4	4	6	6	10								

Решение задачи 1 – таблица

Можно сделать следующий вывод: если $K(N)$ – количество программ, которые дают число N , то

$K(N) = K(N - 1)$, если N – нечётное число (см. разборы на предыдущих слайдах для чисел 3, 5, 7)

$K(N) = K(N - 1) + K(N / 2)$, если N – чётное число (см. разборы на предыдущих слайдах для чисел 2, 4, 6, 8).

Поэтому для 9 количество программ $K(9) = K(8) = 10$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	2	4	4	6	6	10	10							

Для 10 количество программ $K(10) = K(9) + K(5) = 10 + 4 = 14$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	2	4	4	6	6	10	10	14						

Решение задачи 1 – таблица

И т.д. Заполним таблицу до конца:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	2	4	4	6	6	10	10	14	14	20	20	26	26	36

Количество программ для 16 равно 36. Это и есть ответ.

Ответ: 36

Решение задачи 1 – подстановка

Это второй способ решения задачи.

Мы уже определили, что
если $K(N)$ – количество программ,
которые дают число N , то

$K(N) = K(N - 1)$, если N – нечётное число

$K(N) = K(N - 1) + K(N / 2)$, если N – чётное

число

Решение задачи 1 – подстановка

Получается, что:

$$K(16) = K(15) + K(8)$$

$$K(15) = K(14)$$

$$K(14) = K(13) + K(7)$$

$$K(13) = K(12)$$

$$K(12) = K(11) + K(6)$$

$$K(11) = K(10)$$

$$K(10) = K(9) + K(5)$$

$$K(9) = K(8)$$

$$K(8) = K(7) + K(4)$$

$$K(7) = K(6)$$

$$K(6) = K(5) + K(3)$$

$$K(5) = K(4)$$

$$K(4) = K(3) + K(2)$$

$$K(3) = K(2)$$

$$K(2) = K(1) + K(1)$$

$$K(1) = 1$$

Теперь подставим
полученное значение в
формулы.

Решение задачи 1 – подстановка

$$K(1) = 1$$

$$K(2) = K(1) + K(1) = 1 + 1 + 2$$

$$K(3) = K(2) = 2$$

$$K(4) = K(3) + K(2) = 2 + 2 = 4$$

$$K(5) = K(4) = 4$$

$$K(6) = K(5) + K(3) = 4 + 2 = 6$$

$$K(7) = K(6) = 6$$

$$K(8) = K(7) + K(4) = 6 + 4 = 10$$

$$K(9) = K(8) = 10$$

$$K(10) = K(9) + K(5) = 14$$

$$K(11) = K(10) = 14$$

$$K(12) = K(11) + K(6) = 20$$

$$K(13) = K(12) = 20$$

$$K(14) = K(13) + K(7) = 26$$

$$K(15) = K(14) = 26$$

$$K(16) = K(15) + K(8) = 36$$

Ответ: 36

Самостоятельно

Самостоятельно

1.1) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 4

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 55?

1.2) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 4

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 32?

1.3) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 3

Сколько есть программ, которые число 5 преобразуют в число 49?

ОТВЕТЫ

1.1) 32

1.2) 15

1.3) 15

Самостоятельно

1.4) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 2
3. умножь на 3

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 18?

1.5) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 3
3. умножь на 2

Сколько есть программ, которые число 3 преобразуют в число 15?

ОТВЕТЫ

1.4) 96

1.5) 102

Задача 2

Задача 2

Исполнитель преобразует число на экране. У исполнителя есть две команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая умножает его на 2. Программа для исполнителя Июнь15 – это последовательность команд. Сколько существует программ, для которых при исходном числе 1 результатом является число 21 и при этом траектория вычислений **содержит число 10**?

Решение задачи 2

Если в условии сказано, что траектория программы содержит число X , то задачу нужно разбить на две:

1. определить количество программ, дающих X , и
2. определить количество программ, из числа X дающих требуемое конечное число.

По условию: исходное число – 1, результат – 21, траектория содержит 10. (**1** → **21** **+10**)

Следовательно, решаем 2 задачи:

- 1) исходное число – 1, результат – 10;
- 2) исходное число – 10, результат 21.

Решение задачи 2

1 часть решения: из 1 получаем 10.

$K(N) = K(N - 1)$, если N – нечётное

$K(N) = K(N - 1) + K(N / 2)$, если N – чётное

Решение с помощью таблицы:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	2	4	4	6	6	10	10	14

Существует 14 программ, дающих число 10.

Решение задачи 2

2 часть решения: из **10** → **21**.

$K(N) = K(N - 1)$, если N – нечётное

$K(N) = K(N - 1) + K(N / 2)$, если N – чётное

Но требуется учитывать, что число 10 дают 14 программ (а не 1)!

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	28	28

Ответ: 28

Решение задачи 2

Способ 2

$$K(N) = K(N - 1) + K(N / 2)$$

Также разбиваем задачу на две:

1: **1** → **10**

Считаем количество программ (здесь ничего не меняется)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	2	4	4	6	6	10	10	14

2: **10** → **21**

Считаем количество программ:

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2

А теперь перемножаем : $14 * 2 = 28$

Пример

Исполнитель Калькулятор преобразует число, записанное на экране. У исполнителя есть команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1,
2. Прибавить 5,
3. Умножить на 2.

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 4 результатом является число 24 и при этом траектория содержит числа 11 и 18 ?

$$K_N = K_{N-1} + K_{N-5} + K_{N/2}$$

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1	1	1	2	3	5	6	6	6	6	6	12	18	24	24	24	24	24	48	72

Решение примера (способ 2)

Разбиваем на три задачи: $K_N = K_{N-1} + K_{N-5} + K_{N/2}$

Задача №1: $4 \rightarrow 11$

Задача №2: $11 \rightarrow 18$

Задача №3: $18 \rightarrow 24$

Перемножаем найденные

результаты: $4 \rightarrow$

11							
4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	2	3	5	6

Количество программ:

6

Решение примера (способ 2)

Задача №2: 11 →

$$K_N = K_{N-1} + K_{N-5} + K_{N/2}$$

11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	1	1	1	2	3	4

Количество программ:

⁴Задача №3: 18 →

18	19	20	21	22	23	24
1	1	1	1	1	2	3

Количество программ:

³Перемножаем полученные результаты: $6 * 4 * 3 = 72$

Самостоятельно

Самостоятельно

2.1) Исполнитель Июнь15 преобразует число на экране. У исполнителя есть две команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая умножает его на

2. Программа для исполнителя Июнь15 – это последовательность команд.

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 2 результатом является число 34 и при этом **траектория вычислений содержит число 12?**

2.2) Исполнитель Июнь16 преобразует число на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 2
3. Умножить на 2

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 3 результатом является число 13 и при этом **траектория вычислений содержит число 10?**

Задача 3

Задача 3

Исполнитель Июнь16 преобразует число на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 2
3. Умножить на 2

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 3 результатом является число 13 и при этом **траектория вычислений не содержит число 8?**

Решение задачи 3

Если в условии сказано, что траектория программы **НЕ** содержит число X , то:

- 1) при решении с помощью таблицы у X ставим 0;
- 2) при решении подстановкой сразу пишем, что $K(X) = 0$.

Больше никаких отличий от обычного решения нет.

Решение задачи 3

Т.к. исполнитель имеет команды:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 2
3. Умножить на 2

и траектория не содержит число 8, то:

$K(1) = 1$, $K(2) = 1$, $K(8) = 0$, для остальных чисел

$K(N) = K(N - 1) + K(N - 2)$, если N – нечётное

$K(N) = K(N - 1) + K(N - 2) + K(N / 2)$, если N – чётное

Решение с помощью таблицы:

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	2	4	6	0	6	8	14	26	40

Ответ: 40

Самостоятельно

Самостоятельно

3.1) Исполнитель Июнь16 преобразует число на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 2
3. Умножить на 2

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 2 результатом является число 12 и при этом траектория вычислений **не содержит число 10**?

3.2) Исполнитель Июнь16 преобразует число на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 2
3. Умножить на 3

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 2 результатом является число 16 и при этом траектория вычислений **не содержит число 14**?

ОТВЕТЫ

3.1) 43 $K_N = K_{N-1} + K_{N-2} + K_{N/2}$ $2 \rightarrow 12$ **-10**

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	3	4	8	12	23	35	0	35	43

3.2) 175 $K_N = K_{N-1} + K_{N-2} + K_{N/3}$ $2 \rightarrow 16$ **-14**

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	3	6	9	15	25	40	65	107	172	0	175	175

Самостоятельно

4.1) Исполнитель R17 преобразует число, записанное на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 2
3. Умножить на 2

Программа для исполнителя R17 – это последовательность команд.

Сколько существует таких программ, которые исходное число 1 преобразуют в число 12 и при этом траектория вычислений программы содержит число 7 и число 10?

4.2) Исполнитель R17 преобразует число, записанное на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 2
3. Умножить на 3

Программа для исполнителя R17 – это последовательность команд.

Сколько существует таких программ, которые исходное число 2 преобразуют в число 15 и при этом траектория вычислений программы содержит число 4 и число 11?

ОТВЕТЫ

4.1) **180**

$$K_N = K_{N-1} + K_{N-2} + K_{N/2}$$

1 → 12

+7 и +10

1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	7	10	20	30
			7	8	9	10
			1	1	2	3
				10	11	12
				1	1	2

1 → 7

7 → 10

10 → 12

Перемножаем **$30 * 3 * 2 = 180$**

4.2) 210

$$K_N = K_{N-1} + K_{N-2} + K_{N/3}$$

2 → 15

+4 и +7

2	3	4
1	1	2

2 → 4

4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	5	8	13	21

4 → 11

11	12	13	14	15
1	1	2	3	5

11 → 15

Перемножаем $2 * 21 * 5 = 210$

Самостоятельно

5.1) Исполнитель Май18 преобразует число на экране. У исполнителя есть две команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 3

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 2 результатом является число 18 и при этом траектория вычислений **содержит число 9 и не содержит число 14?**

5.2) Исполнитель Калькулятор преобразует число на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2
3. Умножить на 3

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 5 результатом является число 52 и при этом траектория вычислений **содержит число 15 и не содержит число 29?**

ОТВЕТЫ

5.1) 63

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	1	2	3	4	6	9	9	9	18	27	0	18	45	45	63

5.2) 75

5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	0
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52			
5	5	10	10	15	15	20	20	25	25	30	30	35	35	40	45	50	50	60	60	65	70	75			

Задача 4

Задача 4

У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1

2. прибавь 3

Сколько есть программ, которые число 7 преобразуют в число 20 и при этом **последняя команда 1?**

Решение задачи 4

Число, которые программа должна получить, - 20. Последняя команда 1, значит, 20 было получено из 19: $19 + 1$.

Количество программ, дающих 20, равно $K(20) = K(19)$.

Т.е. для решения задачи надо найти $K(19)$.

Решение с помощью таблицы:

7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60

$$K(20) = K(19) = 60$$

Это ответ.

Самостоятельно

Самостоятельно

4.1) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 3

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 15 и в которых **последняя команда 2**?

ОТВЕТЫ

4.1) 41

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41

Задача 5

Задача 5

Исполнитель Калькулятор преобразует целое число, записанное на экране. У исполнителя две команды, каждой команде присвоен номер:

1. Прибавь 1
2. Умножь на 2

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая увеличивает это число в 2 раза.

Сколько существует программ, которые число 3 преобразуют в число 20 и в которых предпоследняя команда 1?

Решение задачи

5

В условии сказано, что предпоследняя команда **1**.

Последняя команда может быть любой – **либо 1, либо 2**.

Это означает, что нужно рассмотреть и получить количество всех команд вида «*11» и «*12».

Звездочка означает любую последовательность команд.

Решение задачи 5

Если две последние команды «**11**», то к числу 20 можно прийти :

$$\text{от числа } X \Rightarrow (X+1)+1=20; \Rightarrow X = 18$$

Это значит, что нам нужно получить

количество программ, преобразующих 3 в 18.

Решение задачи 5

Если две последние команды «12»,

то к числу 20 можно прийти :

$$\text{от числа } Y \Rightarrow (Y+1)*2=20; \Rightarrow Y=9$$

Это значит, что нам нужно получить

количество программ, преобразующих 3 в

9.

И сложить эти два результата.

Число N могло быть получено одной из двух операций:

- увеличением на 1 числа $N-1$;
- умножением на 2 числа $N/2$ (только для четных N)

Общая рекуррентная формула: $K_N = K_{N-1} + K_{N/2}$

Если N нечетное, то считаем, что $K_{N/2} = 0$.

$$K_N = K_{N-1} + K_{N/2}$$

3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	2	2	3	3

$$K_9 = K_8 = 3$$

$$K_8 = K_7 + K_4 = 3$$

$$K_7 = K_6 = 2$$

$$K_6 = K_5 + K_3 = 2$$

$$K_5 = K_4 = 1$$

$$K_4 = K_3 + K_2 = 1$$

$$K_3 = 1$$

Количество программ $3 \rightarrow 9$
равно **3**

$$K_N = K_{N-1} + K_{N/2}$$

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	1	2	2	3	3	4	4	6	6	8	8	11	11	14

Количество программ $3 \rightarrow 18$ равно **14**

$$3 \rightarrow 9 = 3$$

$$3 \rightarrow 18 = 14$$

Всего : $3 + 14 = 17$ программ

Ответ:

17

Самостоятельно

Самостоятельно

5.1) Исполнитель Калькулятор преобразует целое число, записанное на экране. У исполнителя две команды, каждой команде присвоен номер:

1. Прибавь 1

2. Умножь на 2

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая увеличивает это число в 2 раза. Сколько существует программ, которые число 5 преобразуют в число 32 и в которых **предпоследняя команда 1?**

5.2) Исполнитель Калькулятор преобразует целое число, записанное на экране. У исполнителя две команды, каждой команде присвоен номер:

1. Прибавь 1

2. Прибавь 2

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая увеличивает – на 2. Сколько существует программ, которые число 3 преобразуют в число 18 и в которых **предпоследняя команда 2?**

ОТВЕТЫ

5.1) 28

5.2) 377