

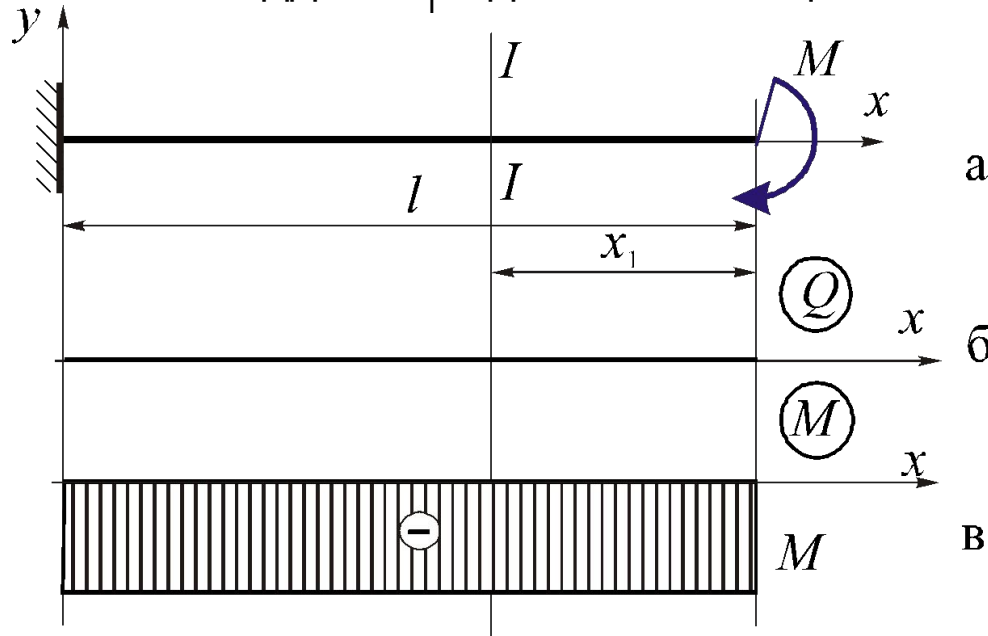
План:

1. Нормальні напруження при згині.
2. Розрахунок на міцність при згині та раціональні форми поперечних перерізів балок.
3. Дотичні напруження при згині. Формула Журавського.
4. Деформації при згині. Диференціальне рівняння зігнутої осі балки.

1. Нормальні напруження при згині.

Розглянемо жорстко закріплену балку, навантажену на вільному (консольному) кінці зовнішнім моментом M (рис. 1, а). Потрібно **визначити напруження**, що виникають у поперечних перерізах балки.

На віддалі x_1 від вільного кінця балки проведемо переріз $I-I$: $0 \leq x_1 \leq l$.



Поперечна сила в цьому перерізі:

$$Q(x_1) = 0.$$

Згинальний момент у перерізі:

$$M(x_1) = -M.$$

У перерізах балки поперечна сила дорівнює нулю (рис. 1, б), а згинальний момент є величиною сталою (рис. 1, в). Отже, балка перебуває в умовах **чистого згину**.

Рис. 1

У перерізі $I-I$, проведеному на віддалі x_1 (рис 1, а), виділимо нескінченно малий елемент площею dA з координатами (x, y) (рис. 2). Силова площина дії моменту M збігається з віссю y . Балка перебуває в умовах чистого згину, отже дотичні напруження τ дорівнюють нулю. Для просторової системи сил (рис. 2), що діє на вирізаний елемент балки, запишемо систему 6 рівнянь рівноваги:

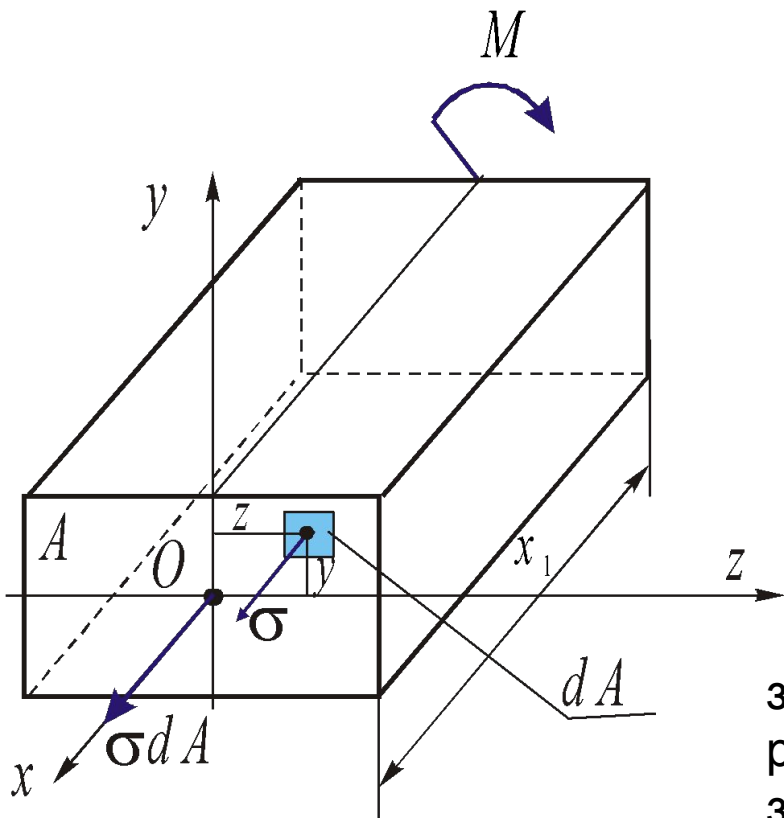


Рис. 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_{ix} = 0; \sigma \cdot dA = 0; \\ \Sigma F_{iy} = 0; \\ \Sigma F_{iz} = 0; \\ \Sigma M_x = 0; \\ \Sigma M_y = 0; \int_A \sigma \cdot z \cdot dA = 0; \\ \Sigma M_z = 0; -M(x) + \int_A \sigma \cdot y \cdot dA = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

$$(2)$$

Закон розподілу нормального напруження по загальній площі A перерізу невідомий. Тому з рівняння (1) не можна визначити σ . Отже, задачу про визначення нормальних напружень у перерізі балки розв'язати статично неможливо. Тому розглянемо геометричний бік задачі.

Геометричний бік задачі

Виділимо на балці двома близькими перерізами *I-I* та *II-II* елемент завдовжки dx та розглянемо його недеформований та деформований стан (рис. 3). Нехай нейтральний шар і поздовжня лінія балки збігаються. Волокно ab нейтрального шару прямолінійне до деформації перетворюється на дугу після деформації, проте не змінить своєї довжини dx . Перерізи *I-I* та *II-II* після деформації повернуться на кут $d\theta$, проте залишаться плоскими і нормальними до осі балки. Волокно a_1b_1 , розміщене на віддалі y від нейтрального шару, після деформації видовжиться в дугу a_1b_1 .

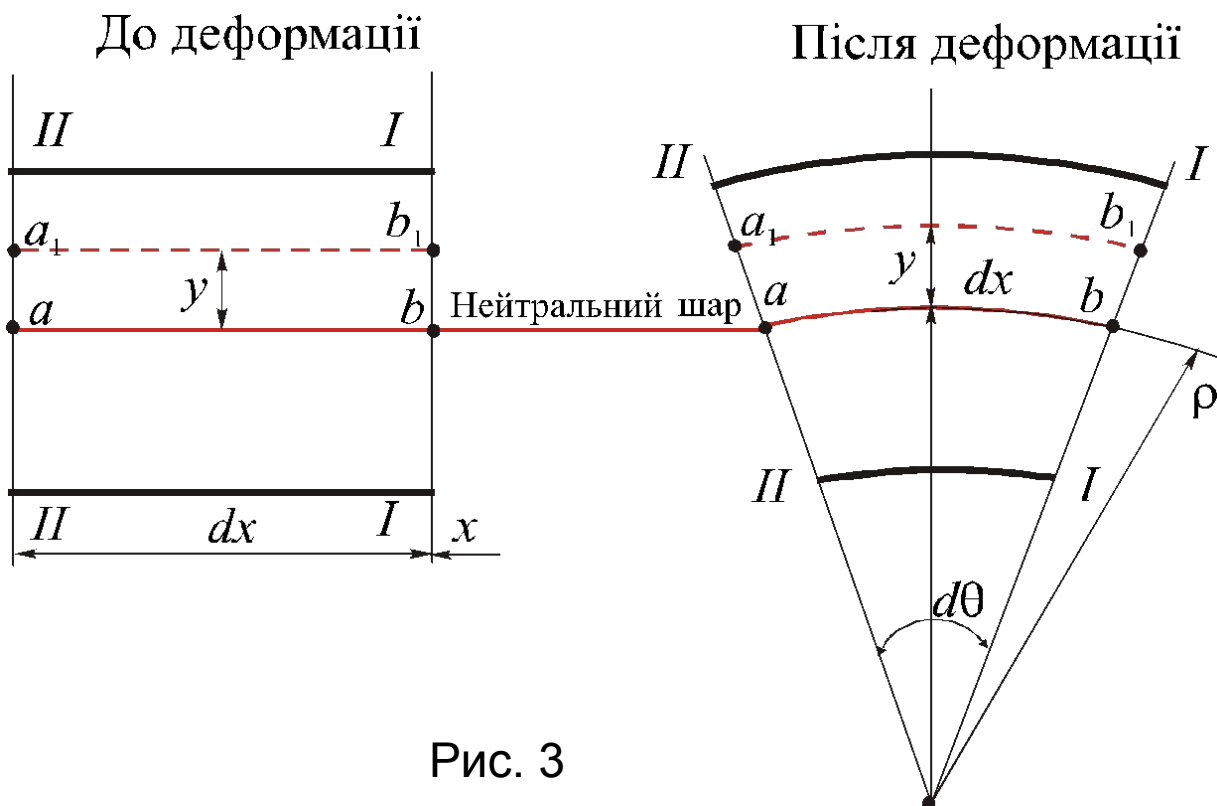


Рис. 3

Довжини дуг:

$$ab = \overset{\sphericalangle}{\rho} \cdot d\theta$$

$$a_1b_1 = (\overset{\sphericalangle}{\rho} + y)d\theta$$

де ρ – радіус кривизни нейтрального шару.

Абсолютне видовження волокна a_1b_1 :

$$\Delta l = a_1b_1 - ab = yd\theta$$

Відносна деформація волокна цього волокна

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{ab} = \frac{yd\theta}{\overset{\sphericalangle}{\rho}d\theta} = \frac{y}{\overset{\sphericalangle}{\rho}}. \quad (3)$$

На рівні нейтрального шару $y=0$, отже деформації теж дорівнюють нулю. Найбільші деформації виникають у точках, що якнайдалі віддалені від нейтрального шару. Долучимо ще фізичний бік задачі.

Оскільки волокно $a_1 b_1$ розтягується, то запишемо закон Гука для розтягання:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (4)$$

Об'єднуємо геометричний та фізичний бік задачі про визначення напружень:

$$\sigma = E \cdot \frac{y}{\rho}. \quad (5)$$

Для врахування статичного боку задачі, вираз (5) підставимо у рівняння (2):

$$-M(x) + \int_A E \frac{y}{\rho} y dA = 0, \quad -M(x) + \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = 0,$$

де $\int_A y^2 dA = I_z$ - осьовий момент інерції перерізу відносно осі z.

$$-M(x) + \frac{E}{\rho} I_z = 0.$$

Звідси закон Гука при згинанні:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{E \cdot I_z}. \quad (6)$$

Нормальні напруження

6

З формули (6) видно, чим більшим буде осьовий момент інерції балки, тим більшим буде радіус кривизни балки ρ . Отже, балка викривиться менше. Значення осьового моменту інерції характеризує здатність балки чинити опір згинанню залежно від розмірів та форми поперечного перерізу. Добуток EI_z називають жорсткістю балки при згинанні. Чим більший цей добуток, тим жорсткішою є балка, тим менше вона викривлюється при згинанні.

Після підстановки формули (6) у (5), отримаємо формулу для визначення нормальних напружень у будь-якій точці поперечного перерізу балки:

$$\sigma = \frac{M(x) \cdot y}{I_z} \quad (7)$$

Відповідно до (7) нормальні напруження в балці лінійно зростають по висоті перерізу з віддаленням від нейтрального шару (рис. 4). На нейтральній осі балки нормальні напруження дорівнюють нулю.

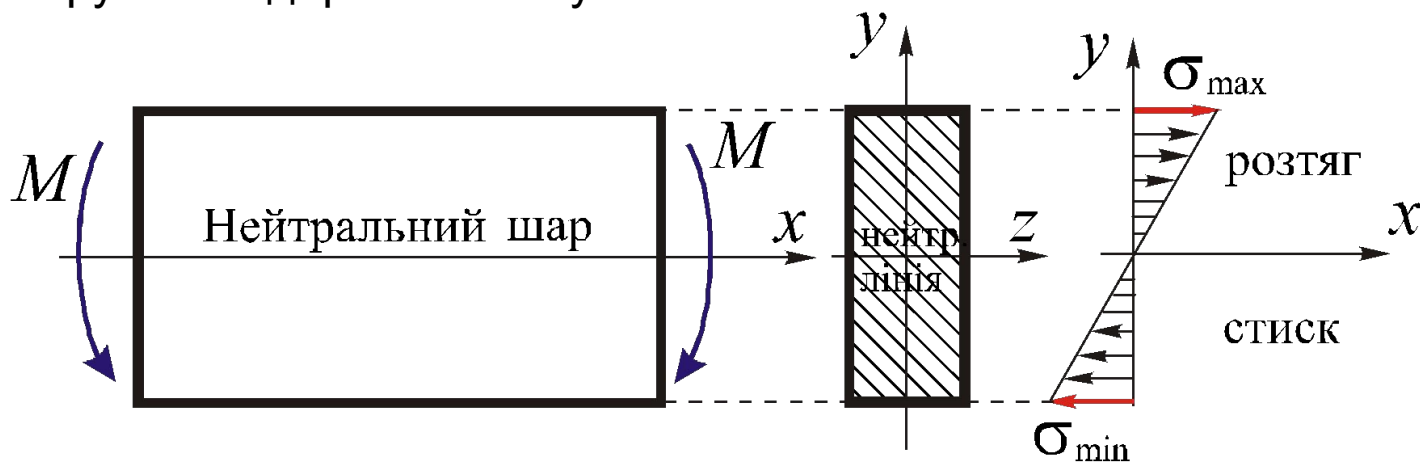


Рис. 4

Якщо врахувати, що осьовий момент опору перерізу відносно осі z дорівнює:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}},$$

то максимальні нормальні напруження, що виникають у крайніх точках перерізу, визначають за формулою:

$$\sigma_{\max} = \frac{M(x)}{W_z}. \quad (8)$$

Формули (6) – (8) отримані для чистого згину, використовують також для поперечного згину.

2. Розрахунок на міцність при згині та раціональні форми поперечних перерізів балок.

Розрахунок на міцність при згинанні проводять у небезпечних перерізах балок, тобто в тих перерізах, де виникають найбільші згинальні моменти. Умова міцності при згинанні має вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (9)$$

Виходячи з умови міцності (9), в розрахунках на міцність при згинанні розв'язують три типи задач.

1. Перевірка міцності балки. Визначають максимальне напруження та порівнюють з допустимим:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \pm 5\%.$$

Матеріал балки можна перенапружувати не більше, ніж на 5%.

2. Визначення розмірів поперечного перерізу балки. З формули (9) момент опору перерізу:

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}.$$

Для прямокутних перерізів: $W_z = \frac{bh^2}{6}$; для круглих перерізів: $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$.

3. Визначення допустимого найбільшого моменту для прогнозування витримувальної (несної) здатності конструкції:

$$M_{\max} \leq W_z \cdot [\sigma].$$

Розрахунок на міцність за нормальними напруженнями виконують для всіх без винятку балок.

З умови міцності визначають розміри поперечних перерізів балок. Найбільш раціональними будуть такі форми перерізів, для яких з найменшою затратою матеріалу, тобто з найменшою площею перерізу, досягається найбільше значення осевого моменту опору W_z . Це такі форми поперечних перерізів, де більша частина матеріалу якнайдалі віддалена від нейтральної осі z . Такими є стандартні прокатні профілі: двотавр, швелер, кутник (рис. 5).

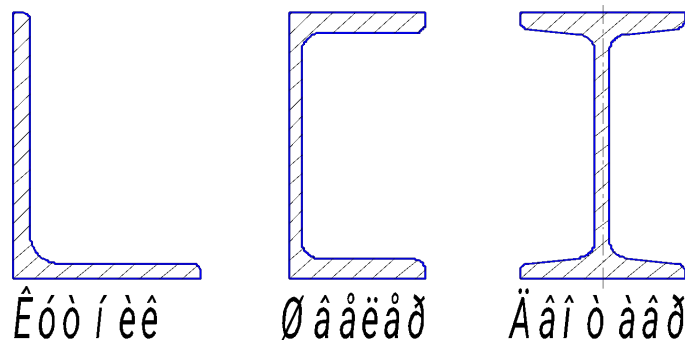


Рис. 5

3. Дотичні напруження при згині. Формула Журавського 10

У разі поперечного згинання в перерізах балки виникають нормальні та дотичні напруження, оскільки в поперечних перерізах діють поперечні сили $Q(x)$. Дотичні напруження визначають за формулою Журавського:

$$\tau = \frac{Q(x) \cdot S_z}{I_z \cdot b_0}, \quad (10)$$

де $Q(x)$ – внутрішня поперечна сила в перерізі з координатою x , S_z – статичний момент відносно нейтральної осі z відсіченої частини поперечного перерізу, яка лежить за шаром, паралельним до нейтральної осі, в якому підраховують τ , I_z – осьовий момент інерції всього перерізу; b_0 – ширина поперечного перерізу на рівні шару, в якому підраховують τ .

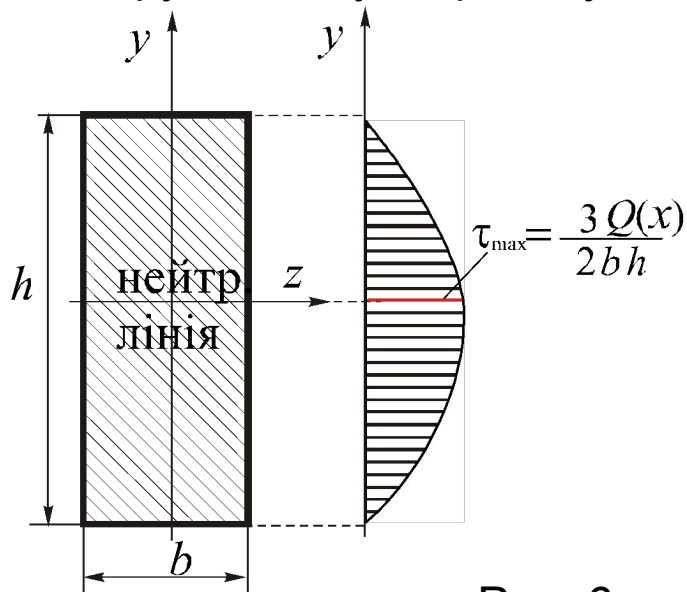


Рис. 6

У балці прямокутного поперечного перерізу дотичні напруження по висоті перерізу змінюються за квадратичним законом (рис. 6). Найбільшого значення дотичні напруження досягають на рівні нейтральної лінії. Величина дотичних напружень, що виникають при поперечному згинанні, є значно меншою, ніж величина нормальних напружень.

Перевірку міцності за дотичними напруженнями при згинанні виконують для таких балок: 1) коротких і високих, коли $l \leq 8h$; 2) дерев'яних; 3) завантажених великими зосередженими силами біля опор.

Умова міцності при згинанні за дотичними напруженнями має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_z^{\max}}{I_z b_0} \leq [\tau], \quad (11)$$

де Q_{\max} - найбільша поперечна сила; S_z^{\max} - найбільше значення статичного моменту площі перерізу відносно осі z .

Отже, на зовнішніх шарах балки, де нормальні напруження досягають максимуму, дотичні напруження дорівнюють нулю, а на нейтральній осі, де дотичні напруження досягають максимуму, нормальні напруження дорівнюють нулю.

Диференціальне рівняння зігнутої осі балки.

Під дією зовнішнього навантаження балка викривляється. Перерізи балки переміщуються перпендикулярно до початкової прямої осі балки і водночас повертаються (рис. 7). Переміщення центра ваги перерізу в напрямі, перпендикулярному до осі балки, називають *прогином балки*. Найбільший прогин балки називають стрілою прогину і позначають f . Кут, на який переріз повертається відносно свого початкового положення, називають кутом повороту перерізу. Прогини та кути повороту є переміщеннями перерізів балки при згинанні.

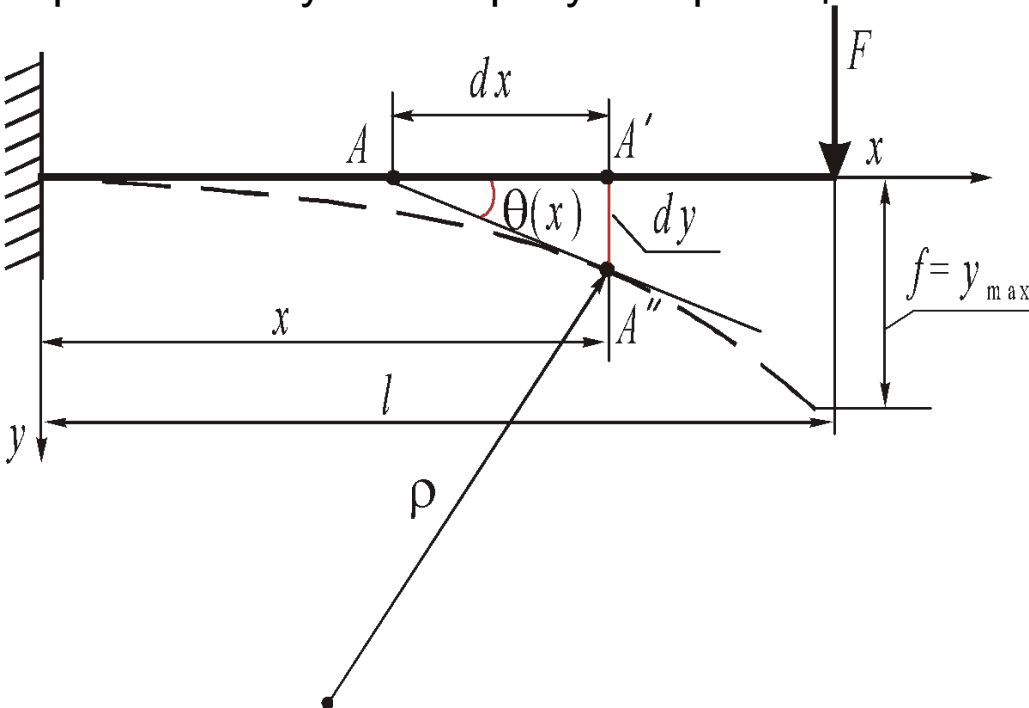


Рис. 7

Кут повороту перерізу дорівнює куту між дотичною в даній точці до зігнутої осі та прямою віссю балки (рис. 7). Вважаючи деформації нескінченно малими, з трикутника $AA'A''$ отримаємо:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{AA'}{AA''} = \frac{dy}{dx}.$$

Зважаючи на малість кута повороту, можна записати: $\theta \approx \frac{dy}{dx}$. (12)

Кут повороту перерізу при згині є першою похідною від прогину балки по довжині балки. Для визначення деформацій балки використаємо рівняння (6), яке зв'язує кривизну осі балки зі згинальним моментом і жорсткістю перерізу. Ураховуючи рівняння кривизни плоскої кривої:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{отримаємо:} \quad \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EI_z}. \quad (13)$$

Диференціальне рівняння (13) є точним диференціальним рівнянням зігнутої осі балки. Якщо знехтувати в знаменнику квадратом першої похідної, то отримаємо наближене диференціальне рівняння зігнутої осі балки:

$$\pm \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z}. \quad (14)$$

Інтегрування наближеного диференціального рівняння (14) не представляє труднощів.