Лекция 1.4.Новая. Равносильные преобразования.

I. Основные равносильности.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ x \& x \equiv x \quad (x \& x \& \ldots \& x \equiv x) \\ 2)\ x \vee x \equiv x \quad (x \vee x \vee \ldots \vee x \equiv x) \end{array}\right\} \text{– законы идемпотентности;}$$

3) $x \& 1 \equiv x$;

4) $x \vee 1 \equiv 1$;

5) $x \& 0 \equiv 0$;

6) $x \vee 0 \equiv x$;

7) $x \& \bar{x} \equiv 0$ – закон противоречия;

8) $x \vee \bar{x} \equiv 1$ – закон исключенного третьего;

9) $\bar{\bar{x}} \equiv x$ – закон снятия двойного отрицания;

$$\left.\begin{array}{l} 10)\ x \& (y \vee x) \equiv x \\ 11)\ x \vee (y \& x) \equiv x \end{array}\right\} \text{– законы поглощения.}$$

II. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие.

1) $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \,\&\, (y \to x)$;

2) $x \to y \equiv \bar{x} \vee y$;

3) $\overline{x \,\&\, y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$

4) $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \,\&\, \bar{y}$

$\left.\begin{array}{l} 3) \ \overline{x \,\&\, y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \\ 4) \ \overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \,\&\, \bar{y} \end{array}\right\}$ – закон де Моргана;

5) $x \,\&\, y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$;

6) $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \,\&\, \bar{y}}$.

III. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики.

1) $x \& y \equiv y \& x$ – коммутативность конъюнкции;

2) $x \vee y \equiv y \vee x$ – коммутативность дизъюнкции;

3) $x \& (y \& z) \equiv (x \& y) \& z$ – ассоциативность конъюнкции;

4) $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ – ассоциативность дизъюнкции;

5) $x \& (y \vee z) \equiv (x \& y) \vee (x \& z)$ – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции;

6) $x \vee (y \& z) \equiv (x \vee y) \& (x \vee z)$ – дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции.

Основные равносильности.	Равносильности, выражающие	
	одни операции через другие.	основные законы алгебры логики
1) $\& x \& \ldots \& x \equiv x)$ 2) $x \vee x \vee \ldots \vee x \equiv x)$ 3) $x \& 1 \equiv x;$ 4) $x \vee 1 \equiv 1;$ 5) $x \& 0 \equiv 0;$ 6) $x \vee 0 \equiv x;$ 7) $x \& \bar{x} \equiv 0$ 8) $x \vee \bar{x} \equiv 1$ 9) $\bar{\bar{x}} \equiv x$ 10) $x \& (y \vee x) \equiv x$ 11) $x \vee (y \& x) \equiv x$	1) $x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x);$ 2) $x \rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y;$ 3) $\overline{x \& y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$ 4) $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \& \bar{y}$ 5) $x \& y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}};$ 6) $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \& \bar{y}}.$	1) $x \& y \equiv y \& x$ 2) $x \vee y \equiv y \vee x$ 3) $x \& (y \& z) \equiv (x \& y) \& z$ 4) $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ 5) $x \& (y \vee z) \equiv (x \& y) \vee (x \& z)$ 6) $x \vee (y \& z) \equiv (x \vee y) \& (x \vee z)$

Формулы логики высказываний (как и алгебраические) подчиняются следующим законам:

1) рефлексивным $A \equiv A$ для любой формулы A;

2) симметричным, то есть, если $A \equiv B$, $B \equiv A$ для любых формул A и B;

3) транзитивным, то есть, если $A \equiv B$ и $B \equiv C$, то $A \equiv C$ для любых формул A, B, C.

Используя равносильности I, II, III и их свойства, можно часть формул алгебры логики или всю формулу заменить равносильной ей формулой. Равносильные преобразования формул применяются для приведения формул к заданному виду, для упрощения формул.

Рассмотрим некоторые наиболее распространенные соглашения о записи формул.

1. Не заключать в скобки формулу или часть ее, стоящую под знаком отрицания, то есть писать $\overline{p \vee q} \mathbin{\&} r$ вместо $\overline{(p \vee q)} \mathbin{\&} r$. **Операция инверсии является наиболее приоритетной среди основных операций.**

2. Считать, что знак конъюнкции связывает аргументы формулы «сильнее» знаков дизъюнкции, импликации и эквиваленции, то есть писать

$p \mathbin{\&} q \vee r$ вместо $(p \mathbin{\&} q) \vee r$;

$p \to q \mathbin{\&} r$ вместо $p \to (q \mathbin{\&} r)$;

$p \mathbin{\&} q \leftrightarrow r \mathbin{\&} s$ вместо $(p \mathbin{\&} q) \leftrightarrow (r \mathbin{\&} s)$.

3. Считать, что знак дизъюнкции связывает сильнее знаков импликации и эквиваленции, то есть писать

$p \vee q \to r$ вместо $(p \vee q) \to r$;

$p \leftrightarrow q \vee r$ вместо $p \leftrightarrow (q \vee r)$.

4. Считать, что знак импликации связывает сильнее, чем знак эквиваленции, то есть писать

$p \to q \leftrightarrow r$ вместо $(p \to q) \leftrightarrow r$.

5. Опускать внешние скобки, то есть скобки, которые заключают внутри себя все остальные символы, составляющие формулу. Так, формулу $(p \,\&\, (q \to r))$ писать $p \,\&\, (q \to r)$.

Соглашения 1-5, а также опускание знака конъюнкции, значительно упрощают запись формул.

Например, формула

$$(((p \& q) \vee r) \to ((\bar{p} \vee q) \to \bar{r})),$$

записанная с учетом этих соглашений, будет выглядеть так:

$$pq \vee r \to (\bar{p} \vee q \to \bar{r}).$$

При чтении формула может быть названа по «последней» операции, знак которой слабее всех остальных знаков операций, входящих в формулу. Так, записанная выше формула представляет собой импликацию.

Пример. Доказать равносильность $\overline{p \to q} \equiv p \& \overline{q}$.

Решение. Для доказательства равносильности подвергнем левую часть формулы равносильным преобразованиям: $\overline{p \to q} \equiv \overline{\overline{p} \vee q} \equiv \overline{\overline{p}} \& \overline{q} \equiv p \& \overline{q}$. По шагам использовались следующие равносильности: II.2, II.4, I.9. Таким же образом вы должны оформлять индивидуальные задания, указывая номер формулы над знаком тождественности.

Пример. Необходимо упростить формулу:

$(x \to x) \to x;$

Ответ: X.

Кроме представленных функций существуют и две дополнительные: штрих Шеффера и штрих Лукасевича или стрелка Пирса.

Штрихом Шеффера двух высказываний x и y называют новое высказывание, обозначаемое $x|y$ «x не совместно с y», которое ложно только тогда, когда оба данные высказывания истинны. Все основные операции над высказываниями можно выразить через штрих Шеффера.

$$x \mid y \equiv \overline{x \,\&\, y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y};$$

$$\bar{x} \equiv x \mid x; \quad x \,\&\, y \equiv (x \mid y) \mid (x \mid y);$$

$$x \vee y \equiv (x \mid x) \mid (y \mid y).$$

Таблица истинности $x|y$

x	y	$x\&y$	$\overline{x\&y}$	$\bar{x}\vee\bar{y}$
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Штрихом Лукасевича (стрелкой Пирса) двух высказываний x и y называется новое высказывание $x\downarrow y$ «ни x, ни y», которое истинно, когда оба данные высказывания ложны. Операции над высказываниями можно выразить через штрих Лукасевича.

$$x\downarrow y=\overline{x\vee y};\ \ \bar{x}\equiv x\downarrow x;\ \ x\vee y=(x\downarrow y)\downarrow(x\downarrow y);\ \ x\,\&\,y=(x\downarrow x)\downarrow(y\downarrow y)$$

Таблица истинности $x \downarrow y$

x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$
0	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

Индивидуальное задание 1.

С помощью равносильных преобразований упростить формулу
и доказать равносильность через таблицу истинности

1. $(x \to x) \to y$.	9. $(\overline{x \vee \bar{y}})(y \vee \bar{y})(y \vee z)$.
2. $\overline{\bar{x}\,\bar{y}} \vee (x \to y)\,\&\,x$.	10. $x(x \vee y)(x \vee z)$.
3. $(x \leftrightarrow y)\,\&\,(x \vee y)$.	11. $x_1x_2 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1 \vee x_1x_4$.
4. $(x \to y)\,\&\,(y \to z) \to (z \to x)$.	12. $(\overline{\bar{x}\,\&\,\bar{y}} \vee \bar{x})\,\&\,\overline{x \vee \overline{\bar{x}y}}$.
5. $x \vee (\bar{x}\,\&\,y)$	13. $(\overline{xy} \vee \bar{x}yz) \to (\bar{x} \vee \overline{xy \vee \bar{y}})$.
6. $xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}$	14. $(yz \vee \bar{x})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.
7. $x \to (y \to z)$	15. $\overline{\bar{x} \vee y} \vee (\bar{z} \to x)\,\&\,\bar{y}x$.
8. $(x \vee y)\,\&\,(z \vee t)$	16. $\overline{\bar{x} \vee y} \to (\bar{z} \to \bar{x})$

17. $\overline{(x \,\&\, \bar{y}) \vee (y \,\&\, z)}$.

18. $(\overline{\bar{x} \,\&\, \bar{y}} \rightarrow \bar{x}) \,\&\, \overline{x \vee \overline{\overline{xy}}}$.

19. $xyz \vee x\overline{yz} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}$.

20. $p\bar{q} \vee p\bar{r} \vee qr \vee q \vee r$

21. $pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q}$.

22. $(p \rightarrow q)(q \rightarrow \bar{p})$.

23. $(p \rightarrow \bar{q}) \vee \overline{p \vee q}$

24. $\overline{\bar{p}\,\bar{q}} \vee (p \rightarrow q)p$.

25. $pq \vee \bar{p}q \vee \overline{pq}$.

26. $p\bar{q} \vee \bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q}$.

27. $(\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})(bc \vee \bar{a})$.

28. $\overline{(\overline{ab} \vee c)} \rightarrow (ab \vee \bar{a}bc)$.

29. $(x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, z) \,\&\, x \vee (y \,\&\, x)$.

30. $x \,\&\, (y \vee x) \,\&\, (x \rightarrow y) \,\&\, (x \rightarrow y) \vee \overline{x \vee \bar{y}}$