

## *Лекция 1.4.Новая. Равносильные преобразования.*

### *I. Основные равносильности.*

- 1)  $x \& x \equiv x$      $(x \& x \& \dots \& x \equiv x)$
  - 2)  $x \vee x \equiv x$      $(x \vee x \vee \dots \vee x \equiv x)$
- } – законы идемпотентности;
- 3)  $x \& 1 \equiv x$ ;
  - 4)  $x \vee 1 \equiv 1$ ;
  - 5)  $x \& 0 \equiv 0$ ;
  - 6)  $x \vee 0 \equiv x$ ;
  - 7)  $x \& \bar{x} \equiv 0$  – закон противоречия;
  - 8)  $x \vee \bar{x} \equiv 1$  – закон исключенного третьего;
  - 9)  $\bar{\bar{x}} \equiv x$  – закон снятия двойного отрицания;
  - 10)  $x \& (y \vee x) \equiv x$
  - 11)  $x \vee (y \& x) \equiv x$
- } – законы поглощения.

*II. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие.*

$$1) x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x);$$

$$2) x \rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y;$$

$$3) \overline{x \& y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \left\{$$

$$4) \overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \& \bar{y} \left. \right\} \text{ — закон де Моргана;}$$

$$5) x \& y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}};$$

$$6) x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \& \bar{y}}.$$

### *III. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики.*

- 1)  $x \& y \equiv y \& x$  – коммутативность конъюнкции;
- 2)  $x \vee y \equiv y \vee x$  – коммутативность дизъюнкции;
- 3)  $x \& (y \& z) \equiv (x \& y) \& z$  – ассоциативность конъюнкции;
- 4)  $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$  – ассоциативность дизъюнкции;
- 5)  $x \& (y \vee z) \equiv (x \& y) \vee (x \& z)$  – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции;
- 6)  $x \vee (y \& z) \equiv (x \vee y) \& (x \vee z)$  – дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции.

<i>Основные равносильности.</i>	<i>Равносильности, выражающие</i>	
	<i>одни операции через другие.</i>	<i>основные законы алгебры логики</i>
$\left. \begin{array}{l} 1) x \& \dots \& x \equiv x \\ 2) x \vee x \vee \dots \vee x \equiv x \\ 3) x \& 1 \equiv x; \\ 4) x \vee 1 \equiv 1; \\ 5) x \& 0 \equiv 0; \\ 6) x \vee 0 \equiv x; \\ 7) x \& \bar{x} \equiv 0 \\ 8) x \vee \bar{x} \equiv 1 \\ 9) \bar{\bar{x}} \equiv x \\ 10) x \& (y \vee x) \equiv x \\ 11) x \vee (y \& x) \equiv x \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 1) x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x); \\ 2) x \rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y; \\ 3) \overline{x \& y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \\ 4) \overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \& \bar{y} \\ 5) x \& y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}; \\ 6) x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \& \bar{y}}. \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 1) x \& y \equiv y \& x \text{ —} \\ 2) x \vee y \equiv y \vee x \text{ —} \\ 3) x \& (y \& z) \equiv (x \& y) \& z \\ 4) x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z \\ 5) x \& (y \vee z) \equiv (x \& y) \vee (x \& z) \\ 6) x \vee (y \& z) \equiv (x \vee y) \& (x \vee z) \end{array} \right\}$

Формулы логики высказываний (как и алгебраические) подчиняются следующим законам:

- 1) рефлексивным  $A \equiv A$  для любой формулы  $A$ ;
- 2) симметричным, то есть, если  $A \equiv B$ ,  $B \equiv A$  для любых формул  $A$  и  $B$ ;
- 3) транзитивным, то есть, если  $A \equiv B$  и  $B \equiv C$ , то  $A \equiv C$  для любых формул  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

*Используя равносильности I, II, III и их свойства, можно часть формул алгебры логики или всю формулу заменить равносильной ей формулой. Равносильные преобразования формул применяются для приведения формул к заданному виду, для упрощения формул.*

Рассмотрим некоторые наиболее распространенные соглашения о записи формул.

1. Не заключать в скобки формулу или часть ее, стоящую под знаком отрицания, то есть писать  $\overline{p \vee q} \& r$  вместо  $\overline{(p \vee q)} \& r$ . **Операция инверсии является наиболее приоритетной среди основных операций.**

2. Считать, что знак конъюнкции связывает аргументы формулы «сильнее» знаков дизъюнкции, импликации и эквиваленции, то есть писать

$$p \& q \vee r \text{ вместо } (p \& q) \vee r;$$

$$p \rightarrow q \& r \text{ вместо } p \rightarrow (q \& r);$$

$$p \& q \leftrightarrow r \& s \text{ вместо } (p \& q) \leftrightarrow (r \& s).$$

3. Считать, что знак дизъюнкции связывает сильнее знаков импликации и эквиваленции, то есть писать

$p \vee q \rightarrow r$  вместо  $(p \vee q) \rightarrow r$ ;

$p \leftrightarrow q \vee r$  вместо  $p \leftrightarrow (q \vee r)$ .

4. Считать, что знак импликации связывает сильнее, чем знак эквиваленции, то есть писать

$p \rightarrow q \leftrightarrow r$  вместо  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$ .

5. Опускать внешние скобки, то есть скобки, которые заключают внутри себя все остальные символы, составляющие формулу. Так, формулу  $(p \& (q \rightarrow r))$  писать  $p \& (q \rightarrow r)$ .

*Соглашения 1-5, а также опускание знака конъюнкции, значительно упрощают запись формул.*

Например, формула

$$(((p \& q) \vee r) \rightarrow ((\bar{p} \vee q) \rightarrow \bar{r})),$$

записанная с учетом этих соглашений, будет выглядеть так:

$$pq \vee r \rightarrow (\bar{p} \vee q \rightarrow \bar{r}).$$

При чтении формула может быть названа по «последней» операции, знак которой слабее всех остальных знаков операций, входящих в формулу. Так, записанная выше формула представляет собой импликацию.



**Пример.** Доказать равносильность  $\overline{p \rightarrow q} \equiv p \& \bar{q}$ .

*Решение.* Для доказательства равносильности подвергнем левую часть формулы равносильным преобразованиям:  $\overline{p \rightarrow q} \equiv \overline{\bar{p} \vee q} \equiv \bar{\bar{p}} \& \bar{q} \equiv p \& \bar{q}$ . По шагам использовались следующие равносильности: П.2, П.4, I.9. Таким же образом вы должны оформлять индивидуальные задания, указывая номер формулы над знаком тождественности.

**Пример.** Необходимо упростить формулу:

$$(x \rightarrow x) \rightarrow x;$$

*Ответ:* X.

Кроме представленных функций существуют и две дополнительные: штрих Шеффера и штрих Лукасевича или стрелка Пирса.

**Штрихом Шеффера** двух высказываний  $x$  и  $y$  называют новое высказывание, обозначаемое  $x|y$  « $x$  не совместно с  $y$ », которое ложно только тогда, когда оба данные высказывания истинны. Все основные операции над высказываниями можно выразить через штрих Шеффера.

$$x | y \equiv \overline{x \& y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y};$$

$$\bar{x} \equiv x | x; \quad x \& y \equiv (x | y) | (x | y);$$

$$x \vee y \equiv (x | x) | (y | y).$$

Таблица истинности  $x|y$

$x$	$y$	$x \& y$	$\overline{x \& y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
$0$	$0$	$0$	$1$	$1$
$1$	$0$	$0$	$1$	$1$
$0$	$1$	$0$	$1$	$1$
$1$	$1$	$1$	$1$	$1$

**Штрихом Лукасевича (стрелкой Пирса) двух высказываний  $x$  и  $y$  называется новое высказывание  $x \downarrow y$  «ни  $x$ , ни  $y$ », которое истинно, когда оба данные высказывания ложны. Операции над высказываниями можно выразить через штрих Лукасевича.**

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y}; \quad \bar{x} \equiv x \downarrow x; \quad x \vee y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y); \quad x \& y = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$$

# Таблица истинности $x \downarrow y$

$x$	$y$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$
0	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

## Индивидуальное задание 1.

С помощью равносильных преобразований упростить формулу

и доказать равносильность через таблицу истинности

1.  $(x \rightarrow x) \rightarrow y$ .

2.  $\overline{\bar{x}\bar{y}} \vee (x \rightarrow y) \& x$ .

3.  $(x \leftrightarrow y) \& (x \vee y)$ .

4.  $(x \rightarrow y) \& (y \rightarrow z) \rightarrow (z \rightarrow x)$ .

5.  $x \vee (\bar{x} \& y)$

6.  $xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}$

7.  $x \rightarrow (y \rightarrow z)$

8.  $(x \vee y) \& (z \vee t)$

9.  $\overline{(x \vee \bar{y})(y \vee \bar{y})(y \vee z)}$ .

10.  $x(x \vee y)(x \vee z)$ .

11.  $x_1x_2 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1 \vee x_1x_4$ .

12.  $\overline{(\bar{x} \& \bar{y} \vee \bar{x})} \& \overline{x \vee \bar{x}y}$ .

13.  $\overline{(xy \vee \bar{x}yz)} \rightarrow (\bar{x} \vee \overline{xy \vee \bar{y}})$ .

14.  $(yz \vee \bar{x})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$ .

15.  $\overline{\bar{x} \vee y} \vee (\bar{z} \rightarrow x) \& \bar{y}x$ .

16.  $\overline{\bar{x} \vee y} \rightarrow (\bar{z} \rightarrow \bar{x})$

$$17. \overline{(x \& \bar{y}) \vee (y \& z)}.$$

$$18. \overline{(\bar{x} \& \bar{y} \rightarrow \bar{x}) \& x \vee \overline{xy}}.$$

$$19. xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}.$$

$$20. p\bar{q} \vee p\bar{r} \vee qr \vee q \vee r$$

$$21. pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q}.$$

$$22. (p \rightarrow q)(q \rightarrow \bar{p}).$$

$$23. (p \rightarrow \bar{q}) \vee \overline{p \vee q}$$

$$24. \overline{\bar{p}\bar{q}} \vee (p \rightarrow q)p.$$

$$25. pq \vee \bar{p}q \vee \overline{pq}.$$

$$26. p\bar{q} \vee \bar{p}q \vee \overline{p\bar{q}}.$$

$$27. (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})(bc \vee \bar{a}).$$

$$28. \overline{(\bar{a}\bar{b} \vee c)} \rightarrow (ab \vee \bar{a}bc).$$

$$29. (x \& y) \vee (x \& z) \& x \vee (y \& x).$$

$$30. x \& (y \vee x) \& (x \rightarrow y) \& (x \rightarrow y) \vee \overline{x \vee \bar{y}}$$