

Лекция 1.4.Новая. Равносильные преобразования.

I. Основные равносильности.

- 1) $x \& x \equiv x$ $(x \& x \& \dots \& x \equiv x)$ }
2) $x \vee x \equiv x$ $(x \vee x \vee \dots \vee x \equiv x)$ } – законы идемпотентности;
- 3) $x \& 1 \equiv x;$
4) $x \vee 1 \equiv 1;$
5) $x \& 0 \equiv 0;$
6) $x \vee 0 \equiv x;$
7) $x \& \bar{x} \equiv 0$ – закон противоречия;
8) $x \vee \bar{x} \equiv 1$ – закон исключенного третьего;
9) $\bar{\bar{x}} \equiv x$ – закон снятия двойного отрицания;
10) $x \& (y \vee x) \equiv x$ }
11) $x \vee (y \& x) \equiv x$ } – законы поглощения.

II. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие.

1) $x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x);$

2) $x \rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y;$

3) $\overline{x \& y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$

4) $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \& \bar{y}$

5) $x \& y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}};$

6) $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \& \bar{y}}.$

III. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики.

- 1) $x \& y \equiv y \& x$ – коммутативность конъюнкции;
- 2) $x \vee y \equiv y \vee x$ – коммутативность дизъюнкции;
- 3) $x \& (y \& z) \equiv (x \& y) \& z$ – ассоциативность конъюнкции;
- 4) $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ – ассоциативность дизъюнкции;
- 5) $x \& (y \vee z) \equiv (x \& y) \vee (x \& z)$ – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции;
- 6) $x \vee (y \& z) \equiv (x \vee y) \& (x \vee z)$ – дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции.

<i>Основные равносиль- ности.</i>	<i>Равносильности, выражающие одни операции через другие.</i>	<i>основные законы алгебры логики</i>
$\left. \begin{array}{l} 1) \& x \& \dots \& x \equiv x \\ 2) x \vee x \vee \dots \vee x \equiv x \\ 3) x \& 1 \equiv x; \\ 4) x \vee 1 \equiv 1; \\ 5) x \& 0 \equiv 0; \\ 6) x \vee 0 \equiv x; \\ 7) x \& \bar{x} \equiv 0 \\ 8) x \vee \bar{x} \equiv 1 \\ 9) \bar{\bar{x}} \equiv x \\ 10) x \& (y \vee x) \equiv x \\ 11) x \vee (y \& x) \equiv x \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 1) x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x); \\ 2) x \rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y; \\ 3) \overline{x \& y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \\ 4) \overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \& \bar{y} \\ 5) x \& y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}; \\ 6) x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \& \bar{y}}. \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 1) x \& y \equiv y \& x - \\ 2) x \vee y \equiv y \vee x - \\ 3) x \& (y \& z) \equiv (x \& y) \& z \\ 4) x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z \\ 5) x \& (y \vee z) \equiv (x \& y) \vee (x \& z) \\ 6) x \vee (y \& z) \equiv (x \vee y) \& (x \vee z) \end{array} \right\}$

Формулы логики высказываний (как и алгебраические) подчиняются следующим законам:

- 1) рефлексивным $A \equiv A$ для любой формулы A ;
- 2) симметричным, то есть, если $A \equiv B$, $B \equiv A$ для любых формул A и B ;
- 3) транзитивным, то есть, если $A \equiv B$ и $B \equiv C$, то $A \equiv C$ для любых формул A , B , C .

Используя равносильности I, II, III и их свойства, можно часть формул алгебры логики или всю формулу заменить равносильной ей формулой. Равносильные преобразования формул применяются для приведения формул к заданному виду, для упрощения формул.

Рассмотрим некоторые наиболее распространенные соглашения о записи формул.

1. Не заключать в скобки формулу или часть ее, стоящую под знаком отрицания, то есть писать $\overline{p \vee q} \& r$ вместо $\overline{(p \vee q)} \& r$. **Операция инверсии является наиболее приоритетной среди основных операций.**

2. Считать, что знак конъюнкции связывает аргументы формулы «сильнее» знаков дизъюнкции, импликации и эквиваленции, то есть писать

$p \& q \vee r$ вместо $(p \& q) \vee r$;

$p \rightarrow q \& r$ вместо $p \rightarrow (q \& r)$;

$p \& q \leftrightarrow r \& s$ вместо $(p \& q) \leftrightarrow (r \& s)$.

3. Считать, что знак дизъюнкции связывает сильнее знаков импликации и эквиваленции, то есть писать

$p \vee q \rightarrow r$ вместо $(p \vee q) \rightarrow r$;

$p \leftrightarrow q \vee r$ вместо $p \leftrightarrow (q \vee r)$.

4. Считать, что знак импликации связывает сильнее, чем знак эквиваленции, то есть писать

$p \rightarrow q \leftrightarrow r$ вместо $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$.

5. Опускать внешние скобки, то есть скобки, которые заключают внутри себя все остальные символы, составляющие формулу. Так, формулу $(p \& (q \rightarrow r))$ писать $p \& (q \rightarrow r)$.

Соглашения 1-5, а также опускание знака конъюнкции, значительно упрощают запись формул.

Например, формула

$$(((p \& q) \vee r) \rightarrow ((\bar{p} \vee q) \rightarrow \bar{r})),$$

записанная с учетом этих соглашений, будет выглядеть так:

$$pq \vee r \rightarrow (\bar{p} \vee q \rightarrow \bar{r}).$$

При чтении формула может быть названа по «последней» операции, знак которой слабее всех остальных знаков операций, входящих в формулу. Так, записанная выше формула представляет собой импликацию.

Пример. Доказать равносильность $\overline{p \rightarrow q} \equiv p \& \bar{q}$.

Решение. Для доказательства равносильности подвергнем левую часть формулы равносильным преобразованиям: $\overline{p \rightarrow q} \equiv \overline{\bar{p} \vee q} \equiv \bar{\bar{p}} \& \bar{q} \equiv p \& \bar{q}$. По шагам использовались следующие равносильности: II.2, II.4, I.9. Таким же образом вы должны оформлять индивидуальные задания, указывая номер формулы над знаком тождественности.

Пример. Необходимо упростить формулу:

$$(x \rightarrow x) \rightarrow x;$$

Ответ: X.

Кроме представленных функций существуют и две дополнительные: штрих Шеффера и штрих Лукасевича или стрелка Пирса.

Штрихом Шеффера двух высказываний x и y называют новое высказывание, обозначаемое $x|y$ « x не совместно с y », которое ложно только тогда, когда оба данные высказывания истинны. Все основные операции над высказываниями можно выразить через штрих Шеффера.

$$x | y \equiv \overline{x \& y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y};$$

$$\overline{x} \equiv x | x; \quad x \& y \equiv (x | y) | (x | y);$$

$$x \vee y \equiv (x | x) | (y | y).$$

Таблица истинности $x \downarrow y$

x	y	$x \& y$	$\overline{x \& y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Штрихом Лукасевича (стрелкой Пирса) двух высказываний x и y называется новое высказывание $x \downarrow y$ «ни x , ни y », которое истинно, когда оба данные высказывания ложны. Операции над высказываниями можно выразить через штрих Лукасевича.

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y}, \quad \bar{x} \equiv x \downarrow x; \quad x \vee y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y); \quad x \& y = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$$

Таблица истинности $x \downarrow y$

x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$
0	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

Индивидуальное задание 1.

С помощью равносильных преобразований упростить формулу

и доказать равносильность через таблицу истинности

1. $(x \rightarrow x) \rightarrow y$.	9. $(\overline{x \vee y})(y \vee \bar{y})(y \vee z)$.
2. $\overline{\bar{x} \bar{y}} \vee (x \rightarrow y) \& x$.	10. $x(x \vee y)(x \vee z)$.
3. $(x \leftrightarrow y) \& (x \vee y)$.	11. $x_1x_2 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1 \vee x_1x_4$.
4. $(x \rightarrow y) \& (y \rightarrow z) \rightarrow (z \rightarrow x)$.	12. $(\overline{\bar{x} \& \bar{y}} \vee \bar{x}) \& x \vee \overline{\bar{x}y}$.
5. $x \vee (\bar{x} \& y)$	13. $(\overline{xy} \vee \bar{x}yz) \rightarrow (\bar{x} \vee \overline{xy} \vee \bar{y})$.
6. $xy \vee \bar{x}y \vee \overline{xy}$	14. $(yz \vee \bar{x})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.
7. $x \rightarrow (y \rightarrow z)$	15. $\overline{\bar{x} \vee y} \vee (\bar{z} \rightarrow x) \& \bar{y}x$.
8. $(x \vee y) \& (z \vee t)$	16. $\overline{\bar{x} \vee y} \rightarrow (\bar{z} \rightarrow \bar{x})$

$$17. \overline{(x \& \bar{y}) \vee (\bar{y} \& z)} .$$

$$18. (\bar{x} \& \overline{\bar{y}} \rightarrow \bar{x}) \& \overline{\overline{x \vee xy}} .$$

$$19. xyz \vee x\overline{yz} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y} .$$

$$20. p\bar{q} \vee p\bar{r} \vee qr \vee q \vee r$$

$$21. pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q} .$$

$$22. (p \rightarrow q)(q \rightarrow \bar{p}) .$$

$$23. (p \rightarrow \bar{q}) \vee \overline{p \vee q}$$

$$24. \overline{\bar{p}\bar{q}} \vee (p \rightarrow q)p .$$

$$25. pq \vee \bar{p}q \vee \overline{pq} .$$

$$26. p\bar{q} \vee \bar{p}q \vee \overline{pq} .$$

$$27. (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})(bc \vee \bar{a}) .$$

$$28. (\overline{\overline{ab} \vee c}) \rightarrow (ab \vee \bar{a}bc) .$$

$$29. (x \& y) \vee (x \& z) \& x \vee (y \& x) .$$

$$30. x \& (y \vee x) \& (x \rightarrow y) \& (x \rightarrow y) \vee \overline{x \vee \bar{y}}$$