

Лекция 1.4.Новая. Равносильные преобразования.

I. Основные равносильности.

- 1) $x \& x \equiv x$ $(x \& x \& \dots \& x \equiv x)$
 - 2) $x \vee x \equiv x$ $(x \vee x \vee \dots \vee x \equiv x)$
- } – законы идемпотентности;
- 3) $x \& 1 \equiv x$;
 - 4) $x \vee 1 \equiv 1$;
 - 5) $x \& 0 \equiv 0$;
 - 6) $x \vee 0 \equiv x$;
 - 7) $x \& \bar{x} \equiv 0$ – закон противоречия;
 - 8) $x \vee \bar{x} \equiv 1$ – закон исключенного третьего;
 - 9) $\bar{\bar{x}} \equiv x$ – закон снятия двойного отрицания;
 - 10) $x \& (y \vee x) \equiv x$
 - 11) $x \vee (y \& x) \equiv x$
- } – законы поглощения.

II. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие.

$$1) x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x);$$

$$2) x \rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y;$$

$$3) \overline{x \& y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \left\{$$

$$4) \overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \& \bar{y} \left. \right\} \text{ — закон де Моргана;}$$

$$5) x \& y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}};$$

$$6) x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \& \bar{y}}.$$

III. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики.

1) $x \& y \equiv y \& x$ – коммутативность конъюнкции;

2) $x \vee y \equiv y \vee x$ – коммутативность дизъюнкции;

3) $x \& (y \& z) \equiv (x \& y) \& z$ – ассоциативность конъюнкции;

4) $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ – ассоциативность дизъюнкции;

5) $x \& (y \vee z) \equiv (x \& y) \vee (x \& z)$ – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции;

6) $x \vee (y \& z) \equiv (x \vee y) \& (x \vee z)$ – дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции.

<i>Основные равносильности.</i>	<i>Равносильности, выражающие</i>	
	<i>одни операции через другие.</i>	<i>основные законы алгебры логики</i>
$\left. \begin{array}{l} 1) x \& \dots \& x \equiv x \\ 2) x \vee x \vee \dots \vee x \equiv x \end{array} \right\}$ $3) x \& 1 \equiv x;$ $4) x \vee 1 \equiv 1;$ $5) x \& 0 \equiv 0;$ $6) x \vee 0 \equiv x;$ $7) x \& \bar{x} \equiv 0$ $8) x \vee \bar{x} \equiv 1$ $9) \bar{\bar{x}} \equiv x$ $\left. \begin{array}{l} 10) x \& (y \vee x) \equiv x \\ 11) x \vee (y \& x) \equiv x \end{array} \right\}$	$1) x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x);$ $2) x \rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y;$ $\left. \begin{array}{l} 3) \overline{x \& y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \\ 4) \overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \& \bar{y} \end{array} \right\}$ $5) x \& y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}};$ $6) x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \& \bar{y}}.$	$1) x \& y \equiv y \& x \text{ —}$ $2) x \vee y \equiv y \vee x \text{ —}$ $3) x \& (y \& z) \equiv (x \& y) \& z$ $4) x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ $5) x \& (y \vee z) \equiv (x \& y) \vee (x \& z)$ $6) x \vee (y \& z) \equiv (x \vee y) \& (x \vee z)$

Формулы логики высказываний (как и алгебраические) подчиняются следующим законам:

- 1) рефлексивным $A \equiv A$ для любой формулы A ;
- 2) симметричным, то есть, если $A \equiv B$, $B \equiv A$ для любых формул A и B ;
- 3) транзитивным, то есть, если $A \equiv B$ и $B \equiv C$, то $A \equiv C$ для любых формул A , B , C .

Используя равносильности I, II, III и их свойства, можно часть формул алгебры логики или всю формулу заменить равносильной ей формулой. Равносильные преобразования формул применяются для приведения формул к заданному виду, для упрощения формул.

Рассмотрим некоторые наиболее распространенные соглашения о записи формул.

1. Не заключать в скобки формулу или часть ее, стоящую под знаком отрицания, то есть писать $\overline{p \vee q} \& r$ вместо $\overline{(p \vee q)} \& r$. **Операция инверсии является наиболее приоритетной среди основных операций.**

2. Считать, что знак конъюнкции связывает аргументы формулы «сильнее» знаков дизъюнкции, импликации и эквиваленции, то есть писать

$$p \& q \vee r \text{ вместо } (p \& q) \vee r;$$

$$p \rightarrow q \& r \text{ вместо } p \rightarrow (q \& r);$$

$$p \& q \leftrightarrow r \& s \text{ вместо } (p \& q) \leftrightarrow (r \& s).$$

3. Считать, что знак дизъюнкции связывает сильнее знаков импликации и эквиваленции, то есть писать

$p \vee q \rightarrow r$ вместо $(p \vee q) \rightarrow r$;

$p \leftrightarrow q \vee r$ вместо $p \leftrightarrow (q \vee r)$.

4. Считать, что знак импликации связывает сильнее, чем знак эквиваленции, то есть писать

$p \rightarrow q \leftrightarrow r$ вместо $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$.

5. Опускать внешние скобки, то есть скобки, которые заключают внутри себя все остальные символы, составляющие формулу. Так, формулу $(p \& (q \rightarrow r))$ писать $p \& (q \rightarrow r)$.

Соглашения 1-5, а также опускание знака конъюнкции, значительно упрощают запись формул.

Например, формула

$$(((p \& q) \vee r) \rightarrow ((\bar{p} \vee q) \rightarrow \bar{r})),$$

записанная с учетом этих соглашений, будет выглядеть так:

$$pq \vee r \rightarrow (\bar{p} \vee q \rightarrow \bar{r}).$$

При чтении формула может быть названа по «последней» операции, знак которой слабее всех остальных знаков операций, входящих в формулу. Так, записанная выше формула представляет собой импликацию.

Пример. Доказать равносильность $\overline{p \rightarrow q} \equiv p \& \bar{q}$.

Решение. Для доказательства равносильности подвергнем левую часть формулы равносильным преобразованиям: $\overline{p \rightarrow q} \equiv \overline{\bar{p} \vee q} \equiv \bar{\bar{p}} \& \bar{q} \equiv p \& \bar{q}$. По шагам использовались следующие равносильности: П.2, П.4, I.9. Таким же образом вы должны оформлять индивидуальные задания, указывая номер формулы над знаком тождественности.

Пример. Необходимо упростить формулу:

$$(x \rightarrow x) \rightarrow x;$$

Ответ: X.

Кроме представленных функций существуют и две дополнительные: штрих Шеффера и штрих Лукасевича или стрелка Пирса.

Штрихом Шеффера двух высказываний x и y называют новое высказывание, обозначаемое $x|y$ « x не совместно с y », которое ложно только тогда, когда оба данные высказывания истинны. Все основные операции над высказываниями можно выразить через штрих Шеффера.

$$x|y \equiv \overline{x \& y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y};$$

$$\bar{x} \equiv x|x; \quad x \& y \equiv (x|y)|(x|y);$$

$$x \vee y \equiv (x|x)|(y|y).$$

Таблица истинности $x|y$

x	y	$x \& y$	$\overline{x \& y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Штрихом Лукасевича (стрелкой Пирса) двух высказываний x и y называется новое высказывание $x \downarrow y$ «ни x , ни y », которое истинно, когда оба данные высказывания ложны. Операции над высказываниями можно выразить через штрих Лукасевича.

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y}; \quad \bar{x} \equiv x \downarrow x; \quad x \vee y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y); \quad x \& y = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$$

Таблица истинности $x \downarrow y$

x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$
0	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

Индивидуальное задание 1.

С помощью равносильных преобразований упростить формулу

и доказать равносильность через таблицу истинности

1. $(x \rightarrow x) \rightarrow y$.

2. $\overline{\bar{x}\bar{y}} \vee (x \rightarrow y) \& x$.

3. $(x \leftrightarrow y) \& (x \vee y)$.

4. $(x \rightarrow y) \& (y \rightarrow z) \rightarrow (z \rightarrow x)$.

5. $x \vee (\bar{x} \& y)$

6. $xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}$

7. $x \rightarrow (y \rightarrow z)$

8. $(x \vee y) \& (z \vee t)$

9. $\overline{(x \vee \bar{y})(y \vee \bar{y})(y \vee z)}$.

10. $x(x \vee y)(x \vee z)$.

11. $x_1x_2 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1 \vee x_1x_4$.

12. $\overline{(\bar{x} \& \bar{y} \vee \bar{x})} \& \overline{x \vee \bar{x}y}$.

13. $\overline{(xy \vee \bar{x}yz)} \rightarrow (\bar{x} \vee \overline{xy \vee \bar{y}})$.

14. $(yz \vee \bar{x})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.

15. $\overline{\bar{x} \vee y} \vee (\bar{z} \rightarrow x) \& \bar{y}x$.

16. $\overline{\bar{x} \vee y} \rightarrow (\bar{z} \rightarrow \bar{x})$

$$17. \overline{(x \& \bar{y}) \vee (y \& z)}.$$

$$18. \overline{(\bar{x} \& \bar{y} \rightarrow \bar{x})} \& \overline{x \vee \bar{x}y}.$$

$$19. xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}.$$

$$20. p\bar{q} \vee p\bar{r} \vee qr \vee q \vee r$$

$$21. pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q}.$$

$$22. (p \rightarrow q)(q \rightarrow \bar{p}).$$

$$23. (p \rightarrow \bar{q}) \vee \overline{p \vee q}$$

$$24. \overline{\bar{p}\bar{q}} \vee (p \rightarrow q)p.$$

$$25. pq \vee \bar{p}q \vee \overline{pq}.$$

$$26. p\bar{q} \vee \bar{p}q \vee \overline{p\bar{q}}.$$

$$27. (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})(bc \vee \bar{a}).$$

$$28. \overline{(\bar{a}\bar{b} \vee c)} \rightarrow (ab \vee \bar{a}bc).$$

$$29. (x \& y) \vee (x \& z) \& x \vee (y \& x).$$

$$30. x \& (y \vee x) \& (x \rightarrow y) \& (x \rightarrow y) \vee \overline{x \vee \bar{y}}$$