

1.3. РАЗЛОЖЕНИЕ ПРАВИЛЬНОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ НА СУММУ ПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ

➡ **Определение 1.3.** Дробно – рациональной (или просто рациональной) функцией называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

n – степень многочлена в числителе, m – степень многочлена в знаменателе

- **Определение 1.4.** Рациональная функция называется правильной дробью, если порядок многочлена числителя строго меньше порядка многочлена в знаменателе.
- **Лемма 1.1.** Любую рациональную функцию можно представить в виде многочлена (целая часть) плюс правильная дробь. $\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$, где $R(x)$ – многочлен, дробь $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ – правильная.

ДРОБНО - РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Привести неправильную дробь к правильному виду:

$$\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 5x + 9 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{x^4 - 2x^3} \quad \boxed{x^3 + 2x^2 + 4x + 3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x + 9 \\ \underline{2x^3 - 4x^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 5x + 9 \\ \underline{4x^2 - 8x} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x + 9 \\ \underline{3x - 6} \end{array}$$

$\boxed{15}$

$$\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = \boxed{x^3 + 2x^2 + 4x + 3} + \frac{\boxed{15}}{\boxed{x - 2}}$$

Теорема 1.2. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ правильная рациональная дробь с вещественными коэффициентами, знаменатель которой имеет вид

$$Q(x) = (x - b_1)^{\beta_1} (x - b_2)^{\beta_2} \dots (x - b_m)^{\beta_m} (x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{\lambda_2} \dots (x^2 + p_nx + q_n)^{\lambda_n}.$$

Тогда для этой дроби справедливо следующее разложение на сумму простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{B_1^1}{x - b_1} + \frac{B_2^1}{(x - b_1)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_1}^1}{(x - b_1)^{\beta_1}} + \dots + \frac{B_1^m}{x - b_m} + \frac{B_2^m}{(x - b_m)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_m}^m}{(x - b_m)^{\beta_m}} \\ & + \frac{M_1^1x + N_1^1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{M_2^1x + N_2^1}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{M_{\lambda_1}^1x + N_{\lambda_1}^1}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1}} + \dots + \frac{M_1^nx + N_1^n}{x^2 + p_nx + q_n} \\ & + \frac{M_2^nx + N_2^n}{(x^2 + p_nx + q_n)^2} + \dots + \frac{M_{\lambda_n}^nx + N_{\lambda_n}^n}{(x^2 + p_nx + q_n)^{\lambda_n}} \end{aligned}$$

В этом разложении числа, стоящие в числителе, некоторые вещественные постоянные, часть из которых может быть равна нулю.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей:

$$\boxed{\text{I}} \quad \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \boxed{A \ln|x-a| + C}$$

$$\boxed{\text{II}} \quad \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) =$$
$$= \boxed{\frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C}$$

$$\boxed{\text{III}} \quad \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx$$

Интегрирование дроби 3 типа рассмотрим на примере.



$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+1}{(x^2+2x)+10} dx &= \int \frac{3x+1}{(x^2+2x+1)+9} dx = \\
&= \int \frac{3x+1}{(x+1)^2+9} dx = \left. \begin{array}{l} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9} dt = \\
&= \int \frac{3t-2}{t^2+9} dt = 3 \int \frac{t dt}{t^2+9} - 2 \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{3}{2} \int \frac{d(t^2+9)}{t^2+9} - \\
&\quad - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} = \frac{3}{2} \ln|t^2+9| - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \\
&= \frac{3}{2} \ln|x^2+2x+10| - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C
\end{aligned}$$

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

$$2na^2 J_{n+1} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1)J_n$$

$$J_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

Метод неопределенных коэффициентов

□
$$\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx$$

$$\int \frac{x}{x^3 - 3x + 2} dx$$

$$\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2 + x + 1)}$$

□ Теорема 1.3. Всякая рациональная дробь интегрируется в элементарных функциях.

1.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\alpha, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\gamma\right) dx$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$$

m – общий знаменатель дробей α, \dots, γ .

$$\int \frac{x^3 \sqrt{2+x}}{x + \sqrt[3]{2+x}} dx$$

□

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

○ Подстановки Эйлера

○ А) $a > 0$,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{ax}$$

○ Б) $c > 0$,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Коши (1823) ввел с доступной в то время строгостью понятие интеграла непрерывной функции как предела суммы. Риман (1854), просто как попутное замечание в своей диссертации, посвященной тригонометрическим рядам, определил интеграл для более общего класса функций. Далее мы рассмотрим теорию Римана и ее обобщения, принадлежащие Дюбуа-Реймону и Дарбу. Еще более общие теории, которые мы будем рассматривать позднее, принадлежат Лебегу (1902 г.) .

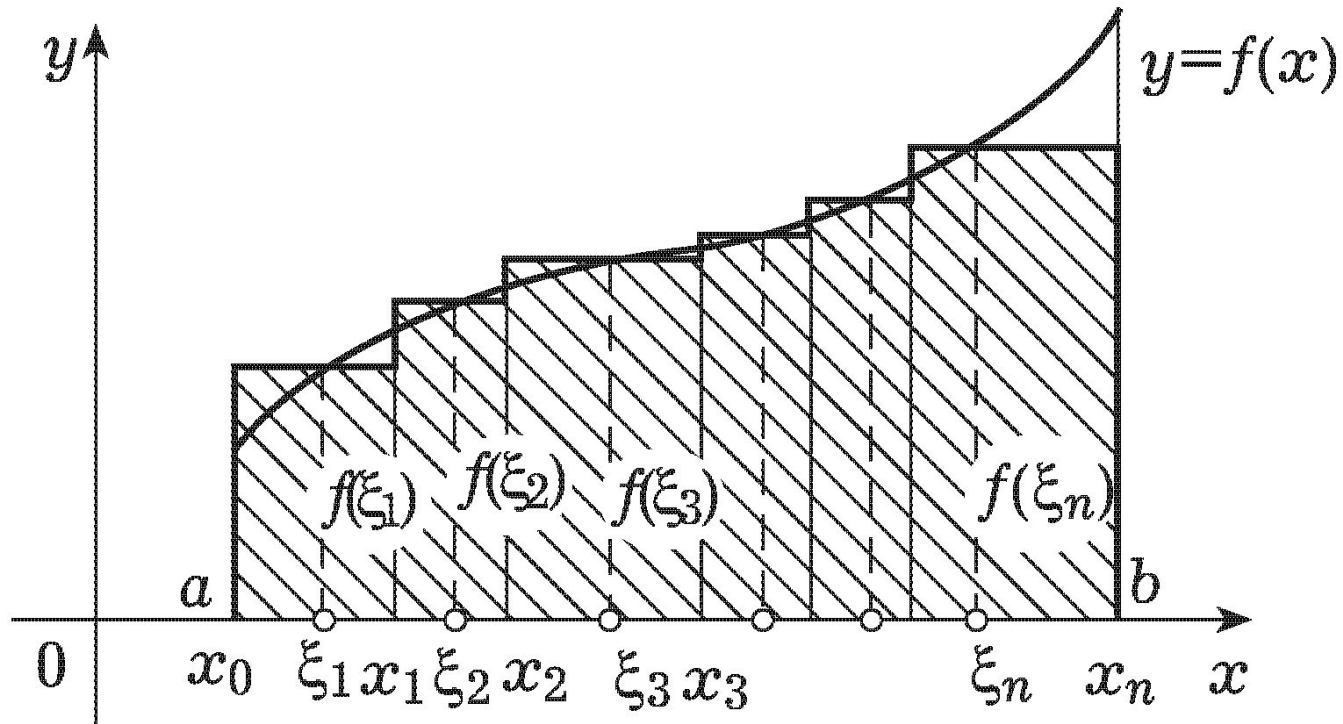
□ ○ 2.1. Интеграл Римана. Интегральные суммы. Интегрируемость

- Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$. Разбиением отрезка $[a, b]$ называется набор точек $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$. Обозначим через ξ набор промежуточных точек для Δ , $\xi = \{\xi_k\}$, $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Интегральной суммой для набора f , Δ , ξ называется выражение

$$\sigma(f, \Delta, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

- Величина $\lambda(\Delta) = \max_k (x_{k+1} - x_k)$ называется *диаметр разбиения* Δ , точки x_k называются узлами разбиения.

$$\sigma(f, \Delta, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$



□ **Определение 2.1.** Число I называется пределом интегральных сумм $\sigma(f, \Delta, \xi)$ при $\lambda(\Delta) \rightarrow 0$; если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число δ , что для любого разбиения Δ отрезка $[a, b]$, диаметр разбиения которого меньше δ : $\lambda(\Delta) < \delta$, независимо от выбора точек ξ_i на отрезках $[x_k, x_{k+1}]$, выполняется неравенство

$$| \sigma(f, \Delta, \xi) - I | < \varepsilon.$$

▣ **Определение 2.2.** Функция $f(x)$ называется интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a, b]$, если существует конечный предел I интегральных сумм этой функции при $\lambda(\Delta) \rightarrow 0$. Указанный предел I называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается следующим образом:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \sigma(f, \Delta, \xi)$$

- ▣ **Теорема 2.1.** Если функция интегрируема, то она ограничена.
- ▣ **Замечание.** Ограниченность функции не гарантирует ее интегрируемость по Риману

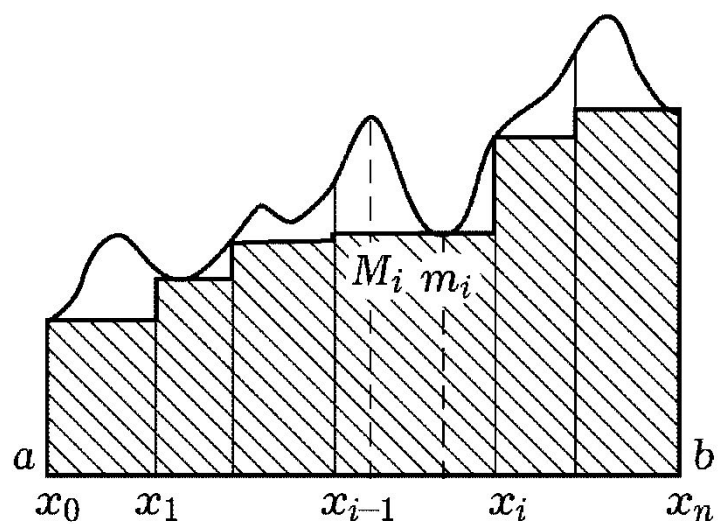
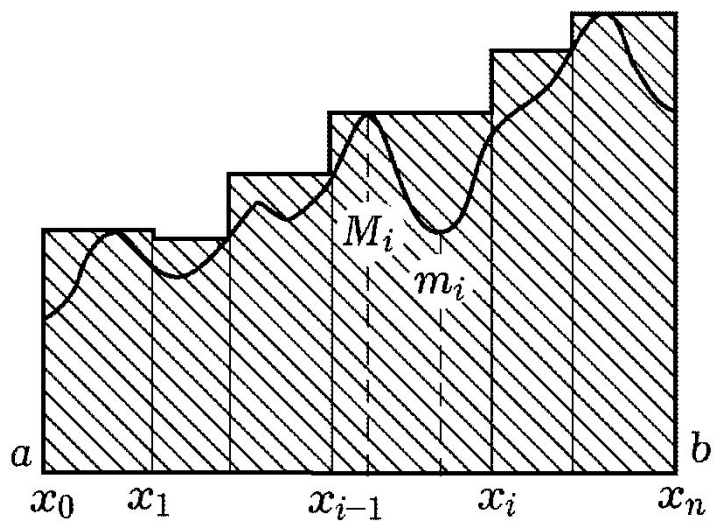
2.2. Суммы Дарбу и их свойства

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$ и $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ разбиением отрезка $[a, b]$. Нижней суммой Дарбу называется сумма

$$s(f, \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

Верхней суммой Дарбу называется сумма

$$S(f, \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$$



- **Определение 2.3.** Если разбиение Δ_2 получено из разбиения Δ_1 добавлением некоторого числа узлов, то говорят, что разбиение Δ_2 следует за разбиением Δ_1 (или Δ_2 является размельчением Δ_1), при этом пишут $\Delta_1 < \Delta_2$.

○ Свойства сумм Дарбу:

- 1) Для любого разбиения Δ и набора промежуточных точек $\xi \in \Delta$ имеют место соотношения

$$\circ s(f, \Delta) \leq (f, \Delta, \xi) \leq S(f, \Delta).$$

- 2) Если $\Delta_1 < \Delta_2$ два разбиения данного отрезка, то

$$\circ s(f, \Delta_1) \leq s(f, \Delta_2), S(f, \Delta_2) \leq S(f, \Delta_1).$$

- 3) Для любых разбиений Δ_1, Δ_2 данного отрезка справедливо неравенство

$$\circ s(f, \Delta_1) \leq S(f, \Delta_2).$$

- 4) Множество $\{S\}$ верхних сумм данной функции $f(x)$ для всевозможных разбиений отрезка $[a, b]$ ограничено снизу. Множество $\{s\}$ нижних сумм ограничено сверху.

□ 5) Пусть разбиение Δ_1 отрезка $[a, b]$ получено из разбиения Δ добавлением к последнему p новых точек, и пусть s^*, S^* и s, S — соответственно нижние и верхние суммы разбиений Δ_1 и Δ . Тогда для разностей $S - S^*$ и $s^* - s$ может быть получена оценка, зависящая от максимальной длины λ частичных сегментов разбиения Δ , числа p добавленных точек и точных верхней и нижней граней M и m функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Именно,

$$\square S - S^* \leq (M - m)p\lambda, \quad s^* - s \leq (M - m)p\lambda.$$

Определение 2.4. Нижним интегралом называется точная верхняя грань нижних сумм Дарбу

$$\bar{I} = \sup s(f, \Delta).$$

Верхняя грань берется во всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$.

Аналогично определяется верхний интеграл, как точная нижняя грань верхних сумм Дарбу

$$\underline{I} = \inf S(f, \Delta).$$

Теорема 2.2. Для любого разбиения Δ данного отрезка справедливы неравенства

$$s(f, \Delta) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S(f, \Delta).$$

□ **Лемма Дарбу.** Верхний и нижний интегралы Дарбу от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ являются соответственно пределами верхних и нижних сумм при $\lambda \rightarrow 0$.