1.3. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей. Интегрирование рациональной дроби

- **Определение 1.3.** Дробно – рациональной (или просто рациональной) функцией называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

n – степень многочлена в числителе, m - степень многочлена в знаменателе

- **Определение 1.4.** Рациональная функция называется правильной дробью, если порядок многочлена числителя строго меньше порядка многочлена в знаменателе.
- **Лемма 1.1.** Любую рациональную функцию можно представить в виде многочлена (целая часть) плюс правильная дробь. $\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$, где $R(x)$ – многочлен, дробь $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ - правильная.

Дробно – рациональная функция

Привести неправильную дробь к правильному виду: $\dfrac{x^4-5x+9}{x-2}$

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-5x+9 & x-2 \\
\underline{-\;x^4-2x^3\qquad} & \boxed{x^3+2x^2+4x+3} \\
2x^3-5x+9 & \\
\underline{-\;2x^3-4x^2\qquad} & \\
4x^2-5x+9 & \\
\underline{-\;4x^2-8x\quad} & \\
3x+9 & \\
\underline{-\;3x-6} & \\
\boxed{15} &
\end{array}
$$

$$\frac{x^4-5x+9}{\boxed{x-2}}=\boxed{x^3+2x^2+4x+3}+\frac{\boxed{15}}{\boxed{x-2}}$$

Теорема 1.2. Пусть $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ правильная рациональная дробь с вещественными коэффициентами, знаменатель которой имеет вид

$$Q(x) = (x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\ldots(x-b_m)^{\beta_m}(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\lambda_2}\ldots(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}.$$

Тогда для этой дроби справедливо следующее разложение на сумму простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_1^1}{x-b_1} + \frac{B_2^1}{(x-b_1)^2} + \cdots + \frac{B_{\beta_1}^1}{(x-b_1)^{\beta_1}} + \cdots + \frac{B_1^m}{x-b_m} + \frac{B_2^m}{(x-b_m)^2} + \cdots + \frac{B_{\beta_m}^m}{(x-b_m)^{\beta_m}}$$
$$+ \frac{M_1^1x+N_1^1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_2^1x+N_2^1}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \frac{M_{\lambda_1}^1x+N_{\lambda_1}^1}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}} + \cdots + \frac{M_1^nx+N_1^n}{x^2+p_nx+q_n}$$
$$+ \frac{M_2^nx+N_2^n}{(x^2+p_nx+q_n)^2} + \cdots + \frac{M_{\lambda_n}^nx+N_{\lambda_n}^n}{(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}}$$

В этом разложении числа, стоящие в числителе, некоторые вещественные постоянные, часть из которых может быть равна нулю.

Интегрирование простейших дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей:

$\boxed{\text{I}}$ $$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = \boxed{A\ln|x-a| + C}$$

$\boxed{\text{II}}$ $$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k} d(x-a) =$$

$$= \boxed{\frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C}$$

$\boxed{\text{III}}$ $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$$

Интегрирование дроби 3 типа рассмотрим на примере.

$$\int \frac{3x+1}{[x^2+2x]+10}\,dx = \int \frac{3x+1}{(x^2+2x+1)+9}\,dx =$$

$$= \int \frac{3x+1}{(x+1)^2+9}\,dx = \left| \begin{array}{l} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9}\,dt =$$

$$= \int \frac{3t-2}{t^2+9}\,dt = 3\int \frac{t\,dt}{t^2+9} - 2\int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{3}{2}\int \frac{d\left(t^2+9\right)}{t^2+9} -$$

$$-\frac{2}{3}\,arctg\,\frac{t}{3} = \frac{3}{2}\ln\left|t^2+9\right| - \frac{2}{3}\,arctg\,\frac{t}{3} + C =$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+10\right| - \frac{2}{3}\,arctg\,\frac{x+1}{3} + C}$$

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

$$2na^2 J_{n+1} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n-1)J_n$$

$$J_1 = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$$

Метод неопределенных коэффициентов

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$$

$$\int \frac{x}{x^3-3x+2}dx$$

$$\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)}$$

- **Теорема 1.3.** Всякая рациональная дробь интегрируется в элементарных функциях.

1.4. Интегрирование некоторых иррациональностей

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\gamma}\right)dx$$

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^{m}$$

m – общий знаменатель дробей α,…,γ.

$$\int\frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

- Подстановки Эйлера
- А) $a > 0$,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x$$

- Б) $c > 0$,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

2. Определенный интеграл

Коши (1823) ввел с доступной в то время строгостью понятие интеграла непрерывной функции как предела суммы. Риман (1854), просто как попутное замечание в своей диссертации, посвященной тригонометрическим рядам, определил интеграл для более общего класса функций. Далее мы рассмотрим теорию Римана и ее обобщения, принадлежащие Дюбуа-Реймону и Дарбу. Еще более общие теории, которые мы будем рассматривать позднее, принадлежат Лебегу (1902 г.) .

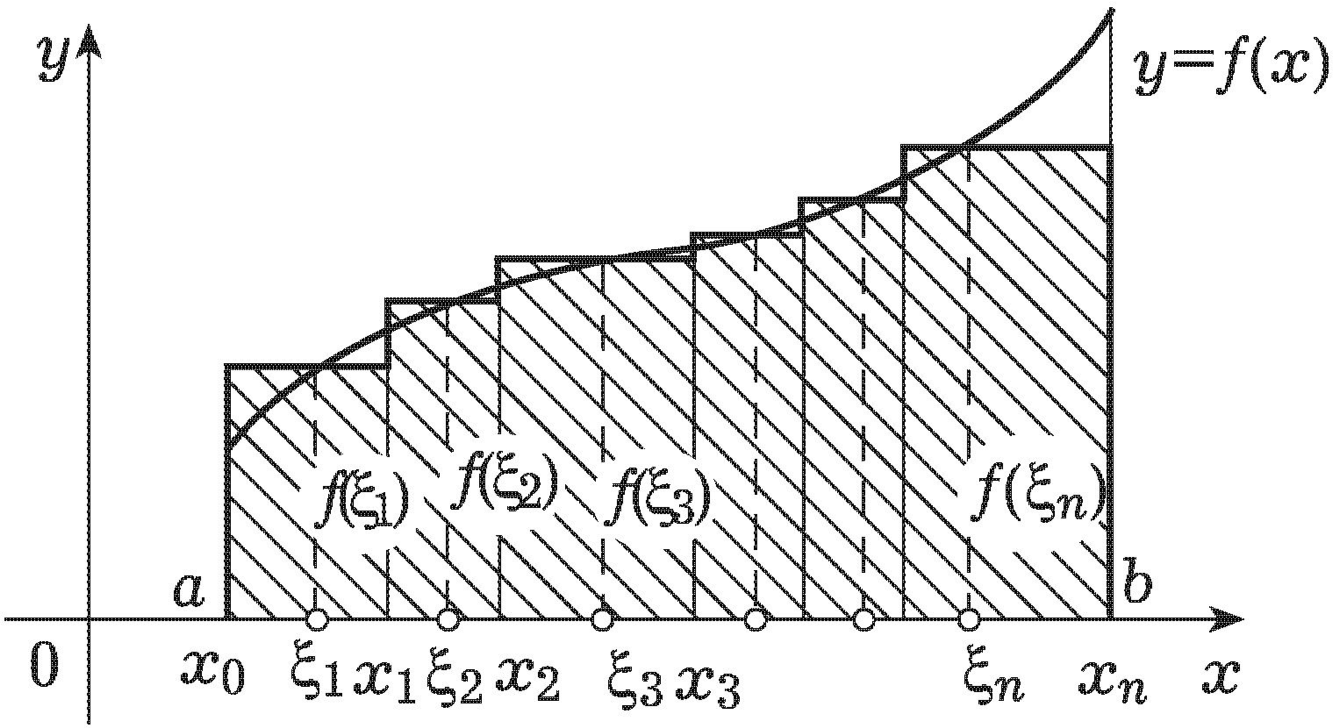
2.1. Интеграл Римана. Интегральные суммы. Интегрируемость

- Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$. Разбиением отрезка $[a, b]$ называется набор точек $\Delta=\{a=x_0< x_1<\ldots< x_n=b\}$. Обозначим через ξ набор промежуточных точек для Δ, $\xi=\{\xi_k\}$, $\xi_k\in[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots,n-1$. Интегральной суммой для набора f, Δ, ξ называется выражение

$$\sigma(f,\Delta,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

- Величина $\lambda(\Delta) = \max\limits_k(x_{k+1} - x_k)$ называется *диаметр разбиения* Δ, точки x_k называются узлами разбиения.

$$\sigma(f,\Delta,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$$



- **Определение 2.1.** Число I называется пределом интегральных сумм $\sigma(f, \mathit{\Delta}, \xi)$ при $\lambda(\Delta) \to 0$; если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число δ, что для любого разбиения Δ отрезка $[a, b]$, диаметр разбиения которого меньше δ: $\lambda(\Delta) < \delta$, независимо от выбора точек ξ_i на отрезках $[x_k, x_{k+1}]$, выполняется неравенство

$$|\,\sigma(f, \mathit{\Delta}, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Определение 2.2. Функция $f(x)$ называется интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a, b]$, если существует конечный предел I интегральных сумм этой функции при $\lambda(\Delta) \to 0$. Указанный предел I называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается следующим образом:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(\Delta)\to 0} \sigma(f, \Delta, \xi)$$

- **Теорема 2.1.** Если функция интегрируема, то она ограничена.

- **Замечание.** Ограниченность функции не гарантирует ее интегрируемость по Риману

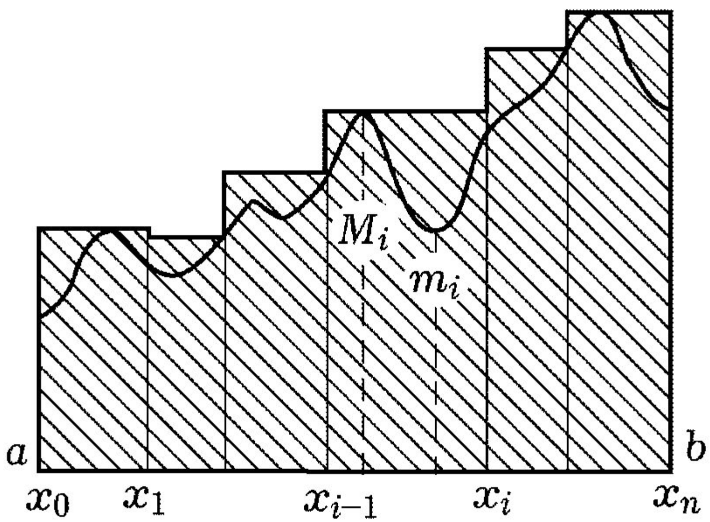
2.2. Суммы Дарбу и их свойства

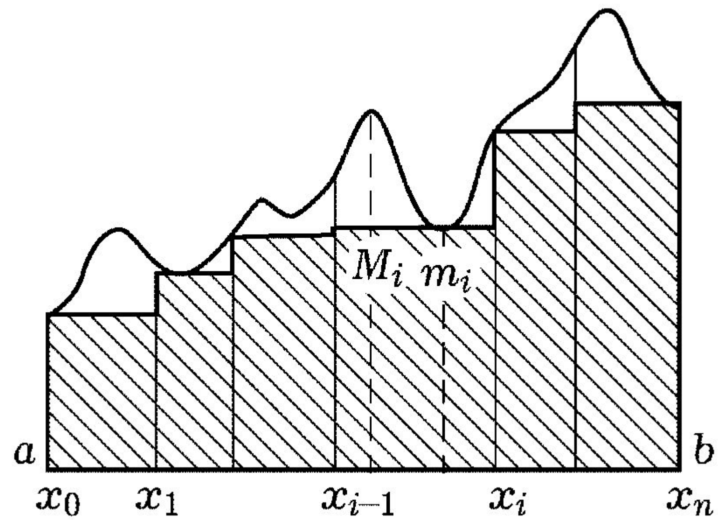
- Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$ и $\Delta=\{a=x_0< x_1<\ldots< x_n=b\}$ разбиением отрезка $[a, b]$. Нижней суммой Дарбу называется сумма

$$s(f,\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k\,, m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

Верхней суммой Дарбу называется сумма

$$S(f,\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k\,, M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$$


a
b
M_i
m_i
x_0
x_1
x_{i-1}
x_i
x_n


a
b
M_i
m_i
x_0
x_1
x_{i-1}
x_i
x_n

- **Определение 2.3.** Если разбиение Δ_2 получено из разбиения Δ_1 добавлением некоторого числа узлов, то говорят, что разбиение Δ_2 следует за разбиением Δ_1 (или Δ_2 является размельчением Δ_1), при этом пишут $\Delta_1 < \Delta_2$.

- **Свойства сумм Дарбу:**
- 1) Для любого разбиения Δ и набора промежуточных точек $\xi \in \Delta$ имеют место соотношения
  - $s(f, \Delta) \le (f, \Delta, \xi) \le S(f, \Delta).$
- 2) Если $\Delta_1 < \Delta_2$ два разбиения данного отрезка, то
  - $s(f, \Delta_1) \le s(f, \Delta_2), S(f, \Delta_2) \le S(f, \Delta_1).$
- 3) Для любых разбиений Δ_1, Δ_2 данного отрезка справедливо неравенство
  - $s(f, \Delta_1) \le S(f, \Delta_2).$
- 4) Множество {S} верхних сумм данной функции $f(x)$ для всевозможных разбиений отрезка $[a, b]$ ограничено снизу. Множество {s} нижних сумм ограничено сверху.

- **5)** Пусть разбиение Δ_1 отрезка $[a, b]$ получено из разбиения Δ добавлением к последнему p новых точек, и пусть s*, S* и s, S — соответственно нижние и верхние суммы разбиений Δ_1 и Δ. Тогда для разностей $S - S^*$ и $s^* - s$ может быть получена оценка, зависящая от максимальной длины λ частичных сегментов разбиения Δ, числа p добавленных точек и точных верхней и нижней граней M и m функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Именно,
  - $S - S^* \leq (M - m)p\lambda$, $s^* - s \leq (M - m)p\lambda$.

Определение 2.4. Нижним интегралом называется точная верхняя грань нижних сумм Дарбу

$\bar{I}= \sup s(f, \Delta)$.

Верхняя грань берется во всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$.

Аналогично определяется верхний интеграл, как точная нижняя грань верхних сумм Дарбу

$\underline{I}= \inf S(f, \Delta)$.

- **Теорема 2.2.** Для любого разбиения Δ данного отрезка справедливы неравенства

  - $s(f,\Delta) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S(f,\Delta)$.

- **Лемма Дарбу.** Верхний и нижний интегралы Дарбу от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ являются соответственно пределами верхних и нижних сумм при $\lambda \to 0$.