02.12.20.

Тема:
Логарифмические уравнения и неравенства.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://infourok.ru/videouroki/1227
https://infourok.ru/videouroki/1228

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Логарифмические уравнения

Решить уравнение

$$\log_2 (x + 1) + \log_2 (x + 3) = 3. \qquad (1)$$

Предположим, что x — такое число, при котором равенство (1) является верным, т. е. x — корень уравнения (1).

Тогда по свойству логарифма верно равенство

$$\log_2 ((x + 1)(x + 3)) = 3. \qquad (2)$$

Из этого равенства по определению логарифма получаем

$$(x + 1)(x + 3) = 8, \qquad (3)$$

$x^2 + 4x + 3 = 8$, т. е. $x^2 + 4x - 5 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -5$.

Так как уравнение (3) является следствием исходного уравнения, то необходима проверка. Проверим, являются ли числа 1 и -5 корнями уравнения (1). Подставляя в левую часть исходного уравнения $x = 1$, получаем $\log_2 (1 + 1) + \log_2 (1 + 3) = \log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3$, т. е. $x = 1$ — корень уравнения (1).

При $x = -5$ числа $x + 1$ и $x + 3$ отрицательны, и поэтому левая часть уравнения (1) не имеет смысла, т. е. $x = -5$ не является корнем этого уравнения.

Ответ $x = 1$. ◁

Замечание. Решение уравнения (1) можно заменить решением равносильной ему системы

$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x + 3 > 0, \\ \log_2 ((x + 1)(x + 3)) = 3. \end{cases}$$

Задача 2 Решить уравнение $\log_2 (1 - x) = 3 - \log_2 (3 - x)$.

▶ Перенесём логарифм из правой части в левую:

$$\log_2 (1 - x) + \log_2 (3 - x) = 3,$$

откуда

$$\log_2 ((1 - x)(3 - x)) = 3,$$
$$(1 - x)(3 - x) = 8.$$

Решая это уравнение, получаем $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. Число $x_1 = 5$ не является корнем исходного уравнения, так как при $x = 5$ левая и правая части уравнения теряют смысл. Проверка показывает, что число $x = -1$ является корнем исходного уравнения.

Ответ $x = -1$. ◁

Задача 3 Решить уравнение

$$\lg (2x^2 - 4x + 12) = \lg x + \lg (x + 3).$$

▶ По свойству логарифмов

$$\lg (2x^2 - 4x + 12) = \lg (x^2 + 3x),$$

откуда (по теореме § 18) $2x^2 - 4x + 12 = x^2 + 3x$, $x^2 - 7x + 12 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. Проверка показывает, что оба значения x являются корнями исходного уравнения.

Ответ $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. ◁

Задача 4 Решить уравнение $\log_7 (3x + 4) = \log_7 (5x + 8)$.

▶ Приравнивая выражения, стоящие под знаком логарифма, получаем $3x + 4 = 5x + 8$, откуда $x = -2$.

левая и правая части исходного уравнения не имеют смысла.

Ответ Корней нет. ◁

Логарифмические неравенства

При изучении логарифмической функции рассматривались неравенства вида $\log_a x < b$ и $\log_a x \geqslant b$. Приведём примеры решения более сложных логарифмических неравенств. Обычный способ решения таких неравенств заключается в переходе от них к более простому неравенству или системе неравенств, имеющей то же самое множество решений, т. е. к равносильному неравенству или к равносильной системе неравенств.

Задача 1 Решить неравенство

$$\lg (x + 1) \leqslant 2. \qquad (1)$$

▶ Правая часть данного неравенства имеет смысл при всех значениях x, а левая часть — при $x + 1 > 0$, откуда $x > -1$, т. е. $x > -1$ — область определения неравенства (1).

Исходное неравенство запишем так:

$$\lg (x + 1) \leqslant \lg 100. \qquad (2)$$

Так как $10 > 1$, то $x + 1 \leqslant 100$, откуда $x \leqslant 99$. Учитывая область определения исходного неравенства, получаем $-1 < x \leqslant 99$. ◁

Задача 2 Решить неравенство

$$\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 2) \leqslant 1. \qquad (3)$$

▶ Логарифмическая функция определена при положительных значениях аргумента, поэтому левая часть неравенства имеет смысл при $x - 3 > 0$ и $x - 2 > 0$.

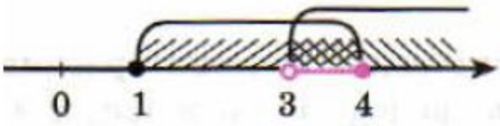
Следовательно, областью определения этого неравенства является промежуток $(3; +\infty)$. По свойствам логарифма неравенство (3) при $x > 3$ равносильно неравенству

$$\log_2 (x - 3) (x - 2) \leqslant \log_2 2. \qquad (4)$$

Логарифмическая функция с основанием 2 возрастающая. Поэтому при $x > 3$ неравенство (4) выполняется, если $(x-3)(x-2) \leqslant 2$.

Таким образом, исходное неравенство (3) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}(x-3)(x-2) \leqslant 2, \\ x > 3.\end{cases}$$



43

Решая первое неравенство этой системы, получаем $x^2 - 5x + 4 \leqslant 0$, откуда $1 \leqslant x \leqslant 4$. Совмещая отрезок $[1; 4]$ с промежутком $(3; +\infty)$, получаем $3 < x \leqslant 4$ (рис. 43). ◁

Практическая часть.

337 Решить уравнение

1) $\log_2 (x-5) + \log_2 (x+2) = 3$;

2) $\log_3 (x-2) + \log_3 (x+6) = 2$;

3) $\lg (x+\sqrt{3}) + \lg (x-\sqrt{3}) = 0$;

338 1) $\lg (x-1) - \lg (2x-11) = \lg 2$;

2) $\lg (3x-1) - \lg (x+5) = \lg 5$;

339 1) $\frac{1}{2} \lg (x^2+x-5) = \lg (5x) + \lg \frac{1}{5x}$;

355 Решить неравенство

1) $\log_3 (x+2) < 3$; 2) $\log_8 (4-2x) \geqslant 2$;

356 1) $\lg x > \lg 8 + 1$; 2) $\lg x > 2 - \lg 4$;