Решение тригонометрических уравнений и их систем

Решение тригонометрических уравнений в большинстве случаев проводится

либо с **помощью замены переменной**,

либо **разложения на множители**,

но тот и другой способ применяются в разных вариантах в зависимости от вида конкретного уравнения.

Поэтому вам предлагается более **подробная классификация** типов тригонометрических уравнений и методов их решения

1. Замены с использованием основного тригонометрического тождества и формул косинуса двойного угла

- **Пример 1.** $2\cos^2 x + 5\,\mathrm{tg}\,x + 4 = 0$

Применим следствие из основного тождества

$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}$ и сделаем замену $t = \mathrm{tg}\,x$

$$\frac{2}{1+t^2} + 5t + 4 = 0$$

$$5t^3 + 4t^2 + 5t + 6 = 0$$

используя схему Горнера разложим на множители

$$(t+1)(5t^2 - t + 6) = 0$$

$$t = -1$$

$$\mathrm{tg}\,x = -1$$

$$\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{4} + \pi n}$$

1. Замены с использованием основного тригонометрического тождества и формул косинуса двойного угла

- **Пример 2.**

$$2\cos 2x - 4\sin x + 1 = 0$$

Используем формулу :$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и сделаем замену$t = \sin x$

$$2(1 - 2t^2) - 4t + 1 = 0$$

$$4t^2 + 4t - 3 = 0$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ или } t = -\frac{3}{2} \text{ посторонний корень } -1 \le t \le 1$$

Обратная замена:$\sin x = \frac{1}{2}$

$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$$

2.Однородные уравнения

Пример 3. $\mathbf{3 + 2\,sin\,6x - 10\,cos^2 3x = 0}$

Поскольку $3 = 3\sin^2 3x + 3\cos^2 3x$, и $\sin 6x = 2\sin 3x\cos 3x$

$$3\sin^2 3x + 4\sin 3x\cos 3x - 7\cos^2 3x = 0$$

Перед нами однородное уравнение, проверкой можно убедиться, что $cos\,3x \neq 0$, затем левую и правую часть уравнения можно разделить на $cos\,3x \neq 0$

$$3\,\mathrm{tg}^2 3x + 4\mathrm{tg}\,x - 7 = 0$$

Сделаем замену $t = tg3x$

$$3t^2 + 4t - 7 = 0$$

$$t = 1 \text{ или } t = -\frac{7}{3}$$

Обратная замена $tgx = 1$ или $\mathrm{tg}\,x = -\frac{7}{3}$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n \text{ или } x = -arc\,\mathrm{tg}\frac{7}{3} + \pi n, n \in Z$$

Ответ: $\boldsymbol{\frac{\pi}{4} + \pi n;\ -arc\,tg\frac{7}{3} + \pi n, n \in Z}$

3. Метод дополнительного угла

- Уравнения вида $\boldsymbol{a \sin kx + b \cos kx = c}$ *можно превратить в простейшее, если разделить обе части уравнения на* $\boldsymbol{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin kx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos kx = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin(kx+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (при \;\; a > 0)$$

3. Метод дополнительного угла

- **Пример 4.** $\mathbf{10\sin 2x - 24\cos 2x = 13}$

$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{100+576} = \sqrt{676} = 26$$

Разделим обе части уравнения на 26

$$\frac{5}{13}\sin 2x - \frac{12}{13}\cos 2x = \frac{1}{2}$$

Пусть $\alpha = \arcsin\frac{12}{13}$, тогда $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ и $\cos\alpha = \frac{5}{13}$

Уравнение принимает вид:

$$\sin 2x\cos\alpha - \cos 2x\sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin(2x-\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$2x - \alpha = (-1)^n\cdot\frac{\pi}{6} + \pi n$$

$$x = \frac{1}{2}arcsin\frac{12}{13} + (-1)^n\cdot\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n\in Z$$

Ответ: $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}arcsin\frac{12}{13} + (-1)^n\cdot\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n\in Z}$

4.Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

- **Пример 5.** $\boldsymbol{sin\,5x+\sin 3x+\cos 6x+\cos 8x=0}$

$$(sin\,5x+sin\,3x)+(cos\,6x+cos\,8x)=0$$

$$2\sin\frac{5x+3x}{2}\cos\frac{5x-3x}{2}+2\cos\frac{6x+8x}{2}\cos\frac{6x-8x}{2}=0$$

$$2\cos x(\sin 4x+\cos 7x)=0$$

$$\cos x=0 \text{ или } \sin 4x+\cos 7x=0$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n \text{ или } \sin 4x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-7x\right)=0$$

$$x=\pi+2\pi n \text{ или } 2\sin\frac{4x+\frac{\pi}{2}-7x}{2}\cos\frac{4x-\frac{\pi}{2}+7x}{2}=0$$

$$\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0 \text{ или } \cos\left(\frac{11x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3} \text{ или } x=\frac{3\pi}{22}+\frac{2\pi n}{11}, n\in Z$$

Ответ: $\pi+2\pi n, \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}; \frac{3\pi}{22}+\frac{2\pi n}{11}, n\in Z$

4.Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

- **Пример 6.** $3\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{10}\cos 13x$

Применим к левой части метод дополнительного угла

$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$$

$$\frac{3}{\sqrt{10}}\sin 5x + \frac{1}{\sqrt{10}}\cos 5x = \cos 13x, \text{ пусть } \alpha = \arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\sin\alpha\sin 5x + \cos\alpha\cos 5x = \cos 13x$$

$$\cos(5x-\alpha) - \cos 13x = 0$$

$$-2\sin\left(9x-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(-4x-\frac{\alpha}{2}\right) = 0$$

$$2\sin\left(9x-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(4x+\frac{\alpha}{2}\right) = 0$$

$$9x-\frac{\alpha}{2} = \pi n \text{ или } \quad 4x+\frac{\alpha}{2} = \pi n$$

$$x = \frac{\alpha}{18}+\frac{\pi n}{9} \text{ или } \quad x = -\frac{\alpha}{8}+\frac{\pi n}{4}$$

$$x = \frac{1}{18}\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{\pi n}{9} \text{ или } x = -\frac{1}{8}\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{\pi n}{4}$$

Ответ: $\frac{1}{18}\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{\pi n}{9}\,; -\frac{1}{8}\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{\pi n}{4}, n\in Z$

5.Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

- **Пример 7.** $\cos 7x + \sin 6x \sin x = 0$

$$\cos 7x + \frac{1}{2}(\cos(6x - x) - \cos(6x + x)) = 0$$

$$\cos 7x + \frac{1}{2}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos 7x = 0$$

$$\frac{1}{2}\cos 7x + \frac{1}{2}\cos 5x = 0$$

$$\cos 7x + \cos 5x = 0$$

$$2\cos\frac{7x + 5x}{2}\cos\frac{7x - 5x}{2} = 0$$

$$\cos 6x \cos x = 0$$

$$6x = \frac{\pi}{2} + \pi n \text{ или } \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6} \text{ или} x = \frac{\pi}{2} + \pi n\,, n \in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$; $\frac{\pi}{2} + \pi n\,, n \in Z$

5.Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

- **Пример 8.** $\boldsymbol{\sin 6x + 3\sin 4x \cos 2x = 0}$

$$\sin 6x + \frac{3}{2}(\sin 6x + \sin 2x) = 0$$

$$5\sin 6x + 3\sin 2x = 0$$

Можно преобразовать $\sin 6x = 3\sin 2x - 4\sin^3 2x$ и сделаем замену $\sin 2x = t,$ где $-1 \le t \le 1$

$$15t - 20t^3 + 3t = 0$$

$$9t - 10t^3 = 0$$

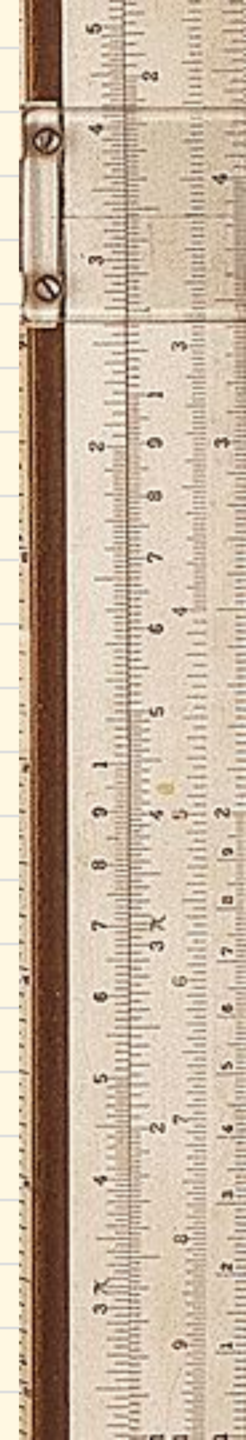
$$t = 0 \text{ или } t = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$$

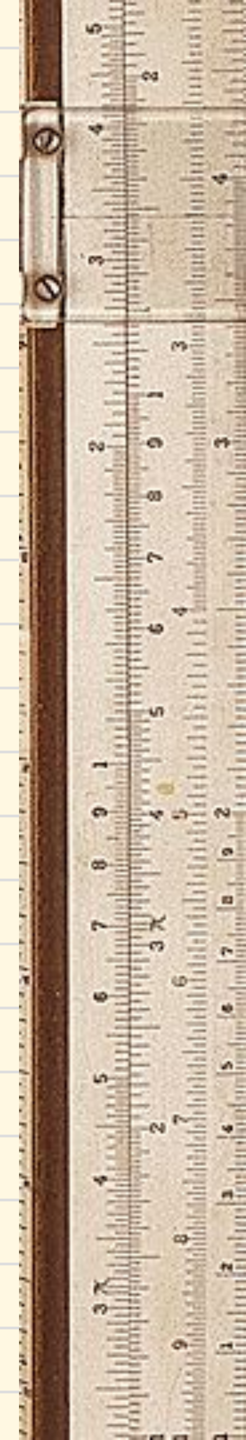
Сделаем обратную замену

$$\sin 2x = 0 \text{ или } \sin 2x = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ или } \sin 2x = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{\pi n}{2}} \text{ или } \boldsymbol{x = (-1)^n \cdot \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{\pi n}{2}} \text{ или } \boldsymbol{x = (-1)^n \cdot \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{\pi n}{2}}$$

Можно объединить две последние группы $\boldsymbol{\pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{\pi n}{2}}$





7.Понижение степени

7.Понижение степени

•

7.Понижение степени

Пример 11. $\cos^2 6x + \cos^2 2x + 2\cos^2 4x = 2$

Понизим степени тригонометрических функций, входящих в уравнение

$$\frac{1+\cos 12x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + 1 + \cos 8x = 2$$

$$(\cos 12x + \cos 4x) + 2\cos 8x = 0$$

$$2\cos 8x \cos 4x + 2\cos 8x = 0$$

$$2\cos 8x(\cos 4x + 1) = 0$$

$$\cos 8x = 0 \text{ или } \cos 4x = -1$$

$$8x = \frac{\pi}{2} + \pi n \text{ или } 4x = \pi + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8} \text{ или } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}\ ; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$

7.Понижение степени

Пример 12. $\sin^2 3x + \sin^2 6x = \frac{3}{2}$

При понижении степени первого слагаемого оно выразится через $\cos 6x$*, поэтому у второго слагаемого мы не будем понижать степень, а вместо этого применим основное тригонометрическое тождество*

$$\frac{1-\cos 6x}{2} + 1 - \cos^2 6x = \frac{3}{2}$$

Заменим $t = \cos 6x$

$$\frac{1-t}{2} + 1 - t^2 = \frac{3}{2}$$

$$2t^2 + t = 0$$

$$t = 0 \text{ или} t = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 6x = 0 \text{ или} \cos 6x = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6} \text{ или } x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$$

Ответ:$= -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$ или $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$

7.Понижение степени

7.Понижение степени

•

7.Понижение степени

8.Уравнения,содержащие тангенс и котангенс

-

8.Уравнения,содержащие тангенс и котангенс

- **Пример 16.** $\mathbf{20\,tg\,8x + 15\sin 8x + 2\,tg\,4x = 0}$

Используем универсальную тригонометрическую подстановку

$$\frac{40\,\mathrm{tg}\,4x}{1-\mathrm{tg}^2\,4x}+\frac{30\,\mathrm{tg}\,4x}{1+\mathrm{tg}^2\,4x}+2\,\mathrm{tg}\,4x=0$$

Заменим $t=\mathrm{tg}\,4x$

$$t\left(\frac{20}{1-t^2}+\frac{15}{1+t^2}+1\right)=0$$

$$t=0 \text{ или } \frac{20}{1-t^2}+\frac{15}{1+t^2}+1=0$$

$$\mathrm{tg}\,4x=0 \text{ или } t^4-5t^2-36=0$$

$$4x=\pi n \text{ или } t^2=9 \text{ или } \; t^2=-4<0 \text{ посторонний корень}$$

$$x=\frac{\pi n}{4} \text{ или } \mathrm{tg}\,4\,x=\pm 3$$

$$4x=\pm\,\mathrm{arctg}\,3+\pi n$$

$$x=\pm\frac{1}{4}arc\,\mathrm{tg}\,3+\pi n, n\in Z$$

Ответ: $\frac{\pi n}{4}$; $\quad \pm\frac{1}{4}arc\,\mathrm{tg}\,3+\pi n, \quad n\in Z$

8.Уравнения,содержащие тангенс и котангенс

- **Пример 17.** $$\frac{1+\cos^2 x}{1-\cos^2 x} = \cos 6x$$

Обратим внимание на то, что левую часть можно представить с помощью универсальной тригонометрической подстановки так

$$\frac{1}{\cos 2x} = \cos 6x$$

$$\cos 2x \cos 6x = 1$$

$$\frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 4x) = 1$$

$$\cos^2 4x - 1 + \cos 4x - 2 = 0$$

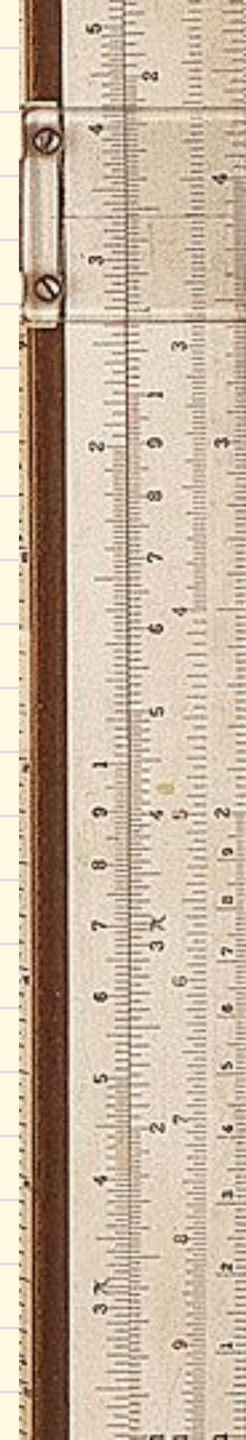
Заменим $t = \cos 4x$ $\qquad 2t^2 + t - 3 = 0$

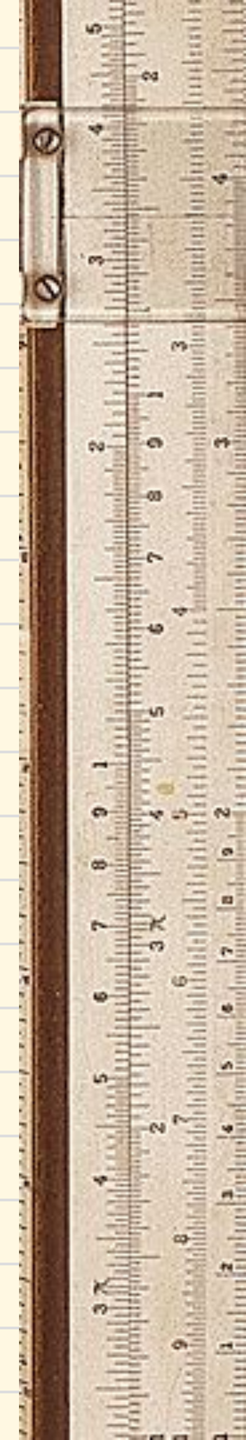
$$t = 1 \text{ или } \quad t = -\frac{3}{2} < -1 \text{ посторонний корень}$$

Обратная замена $\cos 4x = 1$

$$x = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z$$

Ответ: $\boldsymbol{\frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z}$





10. Иррациональные тригонометрические уравнения

При решении таких уравнений используются те же приемы, что и при решении алгебраических иррациональных уравнений.

Особое внимание требуется обращать на дополнительные ограничения на допустимые значения переменной (самая распространённая **ошибка** в задачах такого типа-**включение** в ответ посторонних корней)

10. Иррациональные тригонометрические уравнения

- **Пример 20.** $\sqrt{\frac{16}{25}+\cos^2 2x} = \sin 2x - \frac{1}{5}$

Уравнение имеет решение при выполнении условия $\sin 2x - \frac{1}{5} \geq 0$ *, так как покоренное выражение неотрицательно при любом значении переменной*

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\frac{16}{25}+\cos^2 2x = \sin^2 2x - \frac{2}{5}\sin 2x + \frac{1}{25}$$

$$\frac{16}{25}+(1-\sin^2 2x) = \sin^2 2x - \frac{2}{5}\sin 2x + \frac{1}{25}$$

$$\frac{8}{5} - 2\sin^2 2x + \frac{2}{5}\sin 2x = 0$$

$$5\sin^2 2x - \sin 2x - 4 = 0$$

Заменим $sin2x = t, -1 \leq t \leq 1,$ *получим* $5t^2 - t - 4 = 0$

$t = 1$ или $t = -\frac{4}{5} < \frac{1}{5}$ посторонний корень

Обратная замена: $sin\ 2x = 1,\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in z$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in z$

10. Иррациональные тригонометрические уравнения

Пример 21. $\sqrt{1+\sin 6x} = 3 - 2(\sin 3x + \cos 3x)$

Обратим внимание на то, что подкоренное выражение представляет полный квадрат: $1+\sin 6x = (\cos 3x + \sin 3x)^2$ *Поэтому уравнение принимает вид*

$$|\cos 3x + \sin 3x| = 3 - 2(\sin 3x + \cos 3x)$$

Сделаем замену $t = \cos 3x + \sin 3x$

$$|t| = 3 - 2t$$

А) $\begin{cases} t \geq 0 \\ t = 3 - 2t \end{cases}$ $t = 1$, Б) $\begin{cases} t < 0 \\ -t = 3 - 2t \end{cases}$, $t = 3$ посторонний корень

не соответствует условию раскрытия модуля

$$\cos 3x + \sin 3x = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in z$$

Ответ: $-\frac{\pi}{12} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ n \in z$

10. Иррациональные тригонометрические уравнения

Пример 22. $\left(\cos 2x + 7\cos x - 3\right)\sqrt{\operatorname{tg} x + \frac{1}{99}} = 0$

Ограничения на ОДЗ: $\operatorname{tg} x \geq -\frac{1}{99}$ *Учитывая это условие приравняем каждый множитель к нулю.*

А)$\cos 2x + 7\cos x - 3 = 0$ *или* $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{99}$

$2\cos^2 x - 1 + 7\cos x - 3 = 0$ *или* $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{99} + \pi n$

$2\cos^2 x + 7\cos x - 4 = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = -4$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq -\frac{1}{99} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Этим условиям удовлетворяют углы вида $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, *втра группа корней* $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ *определяет углы , лежащие в четвертой четверти , тангенс которых равен* $-\sqrt{3} < -\frac{1}{99}$

Ответ: $-\boldsymbol{arctg}\frac{1}{99} + \pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n$

11. Тригонометрические уравнения с модулем

Пример 23. $\boldsymbol{\sin 3x + |\sin x| = 0}$

- $\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \sin 3x + \sin x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 2\sin 2x \cos x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 4\sin x \cos^2 x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

- или $\begin{cases} \sin x < 0 \\ \sin 3x - \sin x = 0 \end{cases}$

или $\begin{cases} \sin x < 0 \\ 2\sin x \cos 2x = 0 \end{cases}$

или $\begin{cases} \sin x < 0 \\ 2\sin x(1 - 2\sin x) = 0 \end{cases}$

или $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2\sin^2 x = 1 \\ \sin x < 0 \end{cases}$

или $\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin x < 0 \end{cases}$

$x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{\ldots} + \pi n$

Ответ: $\boldsymbol{\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n}$

11. Тригонометрические уравнения с модулем

Пример 24. $|\sin 2x| + |\sin 3x| = 0$

Сумма модулей может равняться нулю только в том случае, если при одном и том же значении *x* оба подмодульных выражения равны нулю. Следовательно, нужно найти общие корни двух уравнений

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \sin 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi n}{3} \end{cases} (k, n \in \mathrm{Z})$$

Принципиально важно, что в решении указаны разные целочисленные параметры. Для общих корней должно выполняться равенство

$\frac{\pi k}{2} = \frac{\pi n}{3}$, откуда $k = \frac{2n}{3}$. Поскольку *к*-целое число, а дробь $\frac{2n}{3}$ должна быть сократимой, а это возможно если *n кратно трем,*

$k = 3m, m \in z$. *Тогда решение уравнения можно записать так:*

$x = \frac{\pi \cdot 3m}{18} = \frac{\pi m}{6}, m \in z$

Ответ: $\frac{\pi m}{6}, m \in z$

12. Тригонометрические системы уравнений

Вновь перед нами комбинированные задачи, в которых применяются известные из алгебры методы решения систем и способы решения тригонометрических уравнений.

Важно помнить, что при решении системы ответ каждого простейшего уравнения должен записываться с новым целочисленным параметром, который может принимать возможное значение независимо от ранее введенных параметров.

12. Тригонометрические системы уравнений

- **Пример 25.** $\begin{cases} \cos x + \dfrac{2}{\sin y} = 3 \\ \dfrac{\cos x}{\sin y} = 1 \end{cases}$

Заменим $m = \cos x$ и $t = \dfrac{1}{\sin y}$,

учитывая что $-1 \le m \le 1, t \ge 1$ и $t \le -1$, *получим систему уравнений*

$$\begin{cases} m + 2t = 3, \\ m \cdot t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 - 2t, \\ (3 - 2t) \cdot t = 1 \end{cases}$$

решая второе уравнение получаем, что $t = 1$ или $t = \frac{1}{2}$ (*не удовлетворяет условию*). *Сделаем обратную замену и получим*

$$\begin{cases} \sin y = 1, \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}, (n, k \in Z)$$

12. Тригонометрические системы уравнений

- **Пример 26.** $\begin{cases} \boldsymbol{\sin x \cos y = \frac{1}{4}} \\ \boldsymbol{\cos x \sin y = \frac{1}{4}} \end{cases}$

Применим метод алгебраического сложения: перейдем к системе уравнениями которой будут сумма и разность исходных уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = \frac{1}{2} \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = \frac{1}{2} \\ \sin(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \\ x - y = \pi k \end{cases}$$

Вновь сложим и вычтем уравнения:

$$\begin{cases} 2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi(n+k) \\ 2X = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi(n-k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(n+k) \\ y = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(n-k) \end{cases} \quad (n, k) \in z$$

Ответ: $\begin{cases} \boldsymbol{x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(n+k)} \\ \boldsymbol{y = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(n-k)} \end{cases} \quad \boldsymbol{(n, k) \in z}$

12. Тригонометрические системы уравнений

- **Пример 27.** $$\begin{cases} \dfrac{4}{\sin^2 2x} - \dfrac{3}{\sin^2 2y} = 2 \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\pi}{2} - x \\ \dfrac{4}{\sin^2 2x} - \dfrac{3}{\sin^2(\pi - 2x)} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{2} - x \\ \dfrac{4}{\sin^2 2x} - \dfrac{3}{\sin^2 2x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{2} - x \\ \dfrac{1}{\sin^2 2x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\pi}{2} - x \\ \dfrac{1 - \cos 4x}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{2} - x \\ \cos 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{2} - x \\ 4x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{2} - x \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4} \\ y = \dfrac{3\pi}{8} - \dfrac{\pi n}{4}, \end{cases} \quad n \in z$$

Ответ: $$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4} \\ y = \dfrac{3\pi}{8} - \dfrac{\pi n}{4}, \end{cases} \quad n \in z$$

12. Тригонометрические системы уравнений

- **Пример 28.** $\begin{cases} \cos^2 4x + \cos^2 2y = 1 \\ \cos^2 4x + \cos^2 4y = 1 \end{cases}$

Вычтем первое уравнение из второго и применим формулу понижения степени

$\cos^2 2y = \frac{1+\cos 4y}{2}$

$$\cos^2 4y - \frac{1+\cos 4y}{2} = 1$$

Заменим $t = \cos 4y : t^2 - \frac{1+t}{2} = 1, 2t^2 - t - 1 = 0, t = 1$*или*

$$Б) \begin{cases} 4y = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ \frac{1+\cos 8x}{2} = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4} \\ y = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{z} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} \\ y = \frac{\pi k}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4} \\ y = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{z} \end{cases} n, k \in z$