

Практика № 13

5117

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

ред. А.В. Ефимов, Б.П. Демидович

Линейная алгебра и основы математического анализа

/ В.А. Болгов, Б.П. Демидович, А.В. Ефимов [и др.].

- М.: Высш. школа, - 3-е изд., испр. , 1993.

2.89

2.65

2.67

2.66

2.71

2.68

2.80

2.78

2.83

http://e-library.kai.ru/dsweb/Get/Resource-1488/776493_0001.pdf

М. А. Дараган, С. И. Дорофеева

Практикум по векторной алгебре и аналитической геометрии

(стр. 20-30)

<http://e-library.kai.ru/dsweb/Get/Resource-152/%D0%9C54.pdf>

Э. М. Исхаков

Аналитическая геометрия и линейная алгебра

Задача 1

Два вектора заданы координатами: $\bar{a} = (4, -2, -4)$; $\bar{b} = (6, -3, 2)$.

Найти:

1. Скалярное произведение (\bar{a}, \bar{b}) ;
2. Проекцию пр \bar{b} \bar{a} ;
3. Проекцию пр \bar{a} \bar{b} ;
4. Орт вектора \bar{a} ;
5. Угол между векторами \bar{a} и \bar{b} .

РЕШЕНИ

Е.1. Скалярное произведение в координатах вычисляется по формуле :

$(\bar{a}, \bar{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$, где $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$; $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Поэтом

$$\begin{aligned} (\bar{a}, \bar{b}) &= (4, -2, -4) \cdot (6, -3, 2) = 4 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 = & \text{у} \\ &= 24 + 6 - 8 = 22; \end{aligned}$$

2. Проекция вектора \bar{a} на направление вектора \bar{b} вычисляется по формуле :

$$\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{b}|}; \text{ так как числитель } (\bar{a}, \bar{b}) \text{ найден, вычислим длину}$$

вектора \bar{b} : $|\bar{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} =$

$$= \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7; \quad \text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{22}{7}.$$

$\bar{a} = (4, -2, -4)$; $\bar{b} = (6, -3, 2)$; Найти : 3. Проекцию пр \bar{a} \bar{b} ;

4. Орт вектора \bar{a} ;

5. Угол между векторами \bar{a} и \bar{b} .

3. Решение как в пункте 2, только теперь требуется вычислить длину вектора \bar{a} и применить формулу :

$$\text{пр}_{\bar{a}} \bar{b} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}|}$$

Вычисляем: $|\bar{a}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$;

$$\text{пр}_{\bar{a}} \bar{b} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3};$$

4. Для вычисления орта вектора \bar{a} надо умножить вектор \bar{a} на число $\lambda = \frac{1}{|\bar{a}|} = \frac{1}{6}$

$$\frac{1}{6} \cdot \bar{a} = \frac{1}{6} \cdot (4, -2, -4) = \left(\frac{4}{6}, -\frac{2}{6}, -\frac{4}{6}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right);$$

5. Косинус угла между векторами \bar{a} и \bar{b} вычислим по формуле : $\cos \varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$,

$$\cos \varphi = \frac{22}{6 \cdot 7} = \frac{11}{21}; \quad \varphi = \arccos \frac{11}{21};$$

2.89

ДАНО $\bar{a} = (2, 3, -1)$; $\bar{b} = (1, -2, 3)$; $\bar{c} = (x, y, z)$;

:

$$\bar{c} \perp \bar{a}; \quad \bar{c} \perp \bar{b}; \quad \bar{c} \cdot (2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}) = -6$$

НАЙТ $\bar{c} = (x, y, z)$

**И:
РЕШЕНИ
Е.**

$$\begin{cases} \bar{c} \perp \bar{a} \Leftrightarrow (\bar{c}, \bar{a}) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - z = 0 \\ \bar{c} \perp \bar{b} \Leftrightarrow (\bar{c}, \bar{b}) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3z = 0 \\ \bar{c} \cdot (2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}) = -6 \Leftrightarrow 2x - y + z = -6 \end{cases}$$

Решим
методом
Гаусса

**Прямой
ход**

$$P = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times (-2) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -6 \end{array} \right) : 7$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times (-3) \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ : (-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$x \quad y \quad z$

$$\text{rang } A = 3;$$

$$\text{rang } P = 3;$$

$$n = 3;$$

Система **совместна**,
случай 1.

Обратный ход

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y - z = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$y = 3$$

$$x = -3$$

ОТВЕ $\bar{c} = (\quad , \quad , \quad)$

Г:

Домашняя работа

На отдельном листе: (свой вариант РГР)

Найти

2. Угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$;

В тетради:

ЗАДАЧА. Доказать, что четырехугольник с вершинами

$M(-3, 5, 6), N(1, -5, 7), P(8, -3, -1), Q(4, 7, -2)$

есть КВАДРАТ.

2.65

2.66

2.68

2.78

2.67

2.71

2.80

2.83