Практика № 13

5117

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

ред. А.В. Ефимов, Б.П. Демидович

Линейная алгебра и основы математического анализа

/ В.А. Болгов, Б.П. Демидович, А.В. Ефимов [и др.].

- М.: Высш. школа, - 3-е изд., испр. , 1993.

2. 89	2.65	2.67
	2.66	2.71
	2.68	2.80
	2.78	2.83

http://e-library.kai.ru/dsweb/Get/Resource-1488/776493_0001.pdf
М. А. Дараган, С. И. Дорофеева
Практикум по векторной алгебре и аналитической геометрии
(стр. 20-30)

http://e-library.kai.ru/dsweb/Get/Resource-152/%D0%9C54.pdf
Э. М. Исхаков
Аналитическая геометрия и линейная алгебра

Задача 1

Два вектора заданы координатами: $\overline{a} = (4, -2, -4)$; $\overline{b} = (6, -3, 2)$.

Найти:

1. Скалярное произведение $(\overline{a}, \overline{b})$;

2. Проекцию $\text{пр}_{\overline{b}}\, \overline{a}$;

3. Проекцию $\text{пр}_{\overline{a}}\, \overline{b}$;

4. Орт вектора $\overline{a}$;

5. Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

РЕШЕНИЕ.1. Скалярное произведение в координатах вычисляется по формуле :

$$(\overline{a}, \overline{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z,$$ где $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$; $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Поэтому

$$(\overline{a}, \overline{b}) = (4, -2, -4) \cdot (6, -3, 2) = 4 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 =$$
$$= 24 + 6 - 8 = 22;$$

2. Проекция вектора $\overline{a}$ на направление вектора $\overline{b}$ вычисляется по формуле :

$$\text{пр}_{\overline{b}}\, \overline{a} = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{b}|};$$ так как числитель $(\overline{a}, \overline{b})$ найден , вычислим длину вектора $\overline{b}$: $|\overline{b}| = \sqrt{{b_x}^2 + {b_y}^2 + {b_z}^2} =$

$$= \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7; \qquad \text{пр}_{\overline{b}}\, \overline{a} = \frac{22}{7}.$$

$\overline{a} = (4, -2, -4)$; $\overline{b} = (6, -3, 2)$; Найти : **3**. Проекцию $\text{пр}_{\overline{a}}\, \overline{b}$;

4. Орт вектора $\overline{a}$;

5. Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

3. Решение как в пункте 2 ,только теперь требуется вычислить длину вектора $\overline{a}$ и применить формулу :

$$\text{пр}_{\overline{a}}\, \overline{b} = \frac{(\overline{a}\,, \overline{b})}{|\overline{a}|}$$

Вычисляем :$|\overline{a}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$;

$$\text{пр}_{\overline{a}}\, \overline{b} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3};$$

4. Для вычисления орта вектора $\overline{a}$ надо умножить вектор $\overline{a}$ на число $\lambda = \frac{1}{|\overline{a}|} = \frac{1}{6}$

$$\frac{1}{6} \cdot \overline{a} = \frac{1}{6} \cdot (4, -2, -4) = \left(\frac{4}{6}, -\frac{2}{6}, -\frac{4}{6}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right);$$

5. Косинус угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ вычислим по формуле : $\cos\varphi = \dfrac{(\overline{a}\,, \overline{b})}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$,

$$\cos\varphi = \frac{22}{6 \cdot 7} = \frac{11}{21}; \quad \varphi = \arccos\frac{11}{21};$$

2.89

ДАНО: $\overline{a} = (2, 3, -1);\ \overline{b} = (1, -2, 3);\ \overline{c} = (x, y, z);$

$$\overline{c} \perp \overline{a}; \quad \overline{c} \perp \overline{b}; \quad \overline{c} \cdot \left(2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}\right) = -6$$

НАЙТИ: $\overline{c} = (x, y, z)$

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} \overline{c} \perp \overline{a} &\Leftrightarrow (\overline{c}, \overline{a}) = 0 \Leftrightarrow \\ \overline{c} \perp \overline{b} &\Leftrightarrow (\overline{c}, \overline{b}) = 0 \Leftrightarrow \\ \overline{c} \cdot \left(2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}\right) &= -6 \Leftrightarrow \end{aligned} \quad \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + z = -6 \end{cases}$$

Решим методом Гаусса

Прямой ход

$$P = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ \boxed{2} & 3 & -1 & 0 \\ \boxed{2} & -1 & 1 & -6 \end{array}\right) \times (-2) \; + \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{7} & -7 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -6 \end{array}\right) : 7$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & -5 & -6 \end{array}\right) \times (-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -6 \end{array}\right) : (-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \\ \hline \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \end{array}$$

$\text{rang } A = 3;$

$\text{rang } P = 3;$

Система **совместна**, случай 1.

$n = 3;$

Обратный ход

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y - z = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

$y = 3$

$x = -3$

ОТВЕТ: $\bar{c} = (\quad , \quad , \quad)$

Домашняя работа

На отдельном листе: (свой вариант РГР)

Найти

2. Угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$;

В тетради:

ЗАДАЧА. Доказать, что четырехугольник с вершинами

$$M(-3,5,6), N(1,-5,7), P(8,-3,-1), Q(4,7,-2)$$

есть КВАДРАТ.

2.65	2.67
2.66	2.71
2.68	2.80
2.78	2.83