

# Тригонометрические уравнения 2

Иррациональные уравнения

Уравнения с модулем

Системы уравнений

Неравенства

## Основные формулы тригонометрии

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

# Начнем с... систем (nm)

$$\begin{cases} \sin \pi x = 0, \\ \sin \pi y = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = k \\ y = n \end{cases}$$

# ЯСНО ВИДНО

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \cos 2x - \cos 2y = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(x) + \cos(y) = 1 \\ \cos(2x) - \cos(2y) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(x) + \cos(y) = 1 \\ 1 - 2\sin^2(x) - 2\cos^2(y) + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(x) + \cos(y) = 1 \\ 2\sin^2(x) - 2\cos^2(y) = -1 \end{cases}$$

$$\sin(x) = a, \cos(y) = b$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a - 2b = -1 \end{cases}$$

$$\sin(x) + \cos(y) = \cos(2x) - \cos(2y) = 2\sin(x+y) * \sin(y-x)$$

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{3}{4}, \\ \sin x \sin y = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(x) * \cos(y) = 3/4 \\ \sin(x) * \sin(y) = -1/4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(x) * \cos(y) - \sin(x) * \sin(y) = 1 \\ \cos(x) * \cos(y) + \sin(x) * \sin(y) = 1/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(x+y) = 1 \\ \cos(x-y) = 1/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2\pi n \\ x - y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi(n+k) \\ y = \mp \frac{\pi}{6} + \pi(n-k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi p \\ y = \mp \frac{\pi}{6} + \pi q \end{cases}$$

# Сведение к тригонометрической единице

$$\begin{cases} \sin y = 5 \sin x, \\ 3 \cos x + \cos y = 2. \end{cases}$$

11

$$\begin{cases} \sin(y) = 5 \sin(x) \\ (5 * \sin(x))^2 + (2 - 3 \cos(x))^2 = 2 \end{cases}$$

$$25 * (1 - t^2) + (2 - 3t)^2 = 2$$

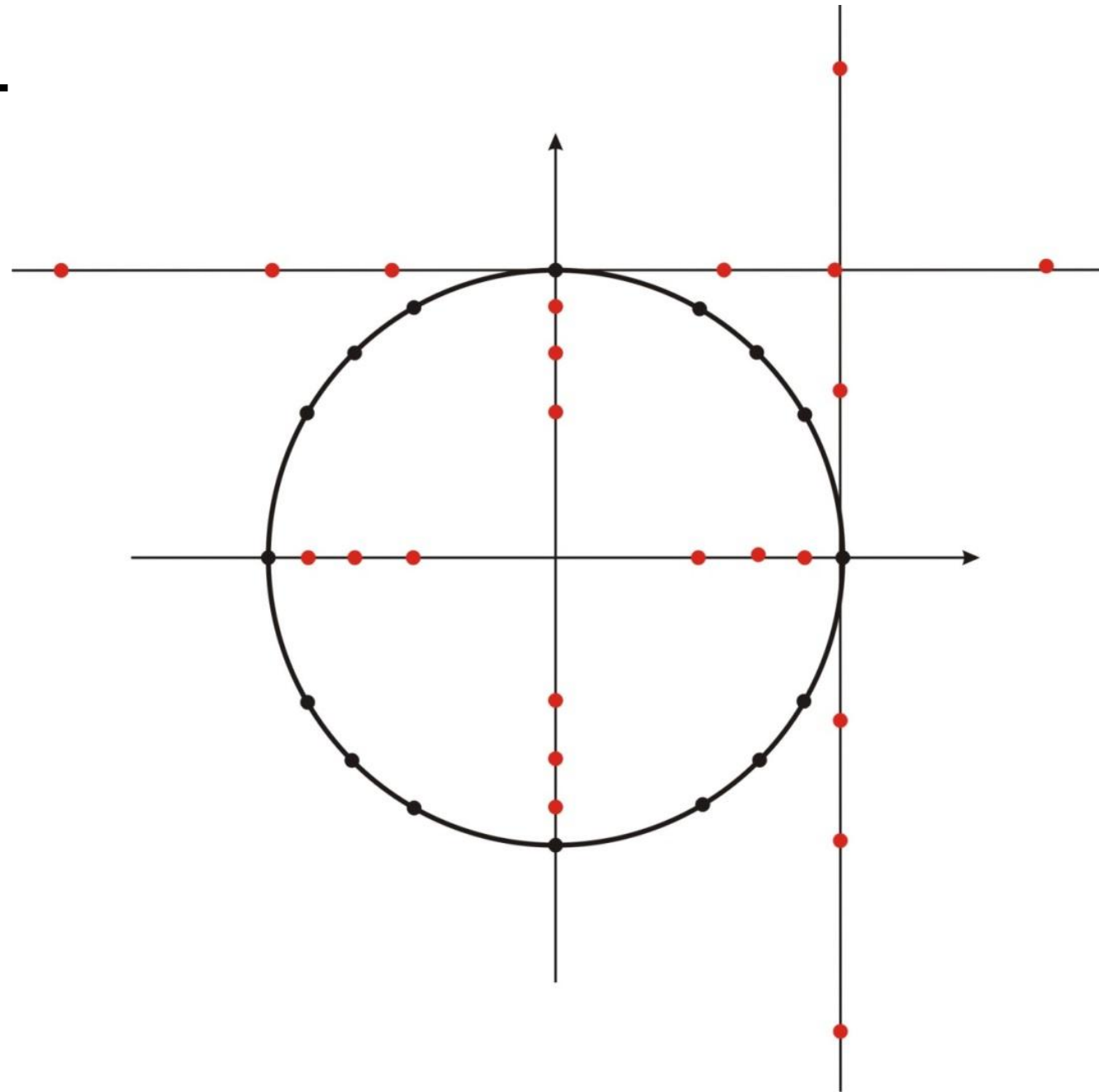
$$25 - 25t^2 + 4 - 12t + 9t^2 = 2$$

$$16t^2 + 12t - 27 = 0$$

# Неравенства и круг

$$\sin x < -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} x \leq 2.$$



$$\sqrt[4]{\frac{7 - \cos 4x}{2}} > -2 \cos x.$$

$$\left[ \begin{cases} -2 \cos(x) > 0 \\ \frac{7 - \cos(4x)}{2} > (2 \cos(x))^4 \end{cases} \right.$$

$$\left[ \begin{cases} -2 \cos(x) < 0 \\ \frac{7 - \cos(4x)}{2} > 0 \end{cases} \right.$$

$$\left[ \begin{cases} -2 \cos(x) > 0 \\ \frac{7 - \cos(4x)}{2} > (2 \cos(x))^4 \\ -2 \cos(x) < 0 \end{cases} \right.$$

$$\frac{7 - (2 \cos^2(2x) - 1)}{2} > (2 \cos(x))^4$$

$$\cos x = t$$

$$\frac{7 - (2(2t^2 - 1)^2 - 1)}{2} > (2t)^4$$

$$7 - (8t^4 - 8t^2 + 1) > 32t^4$$

$$0 > 40t^4 - 8t^2 - 6$$

$$\left[ \begin{cases} -1 < t < 1 \\ \left[ \begin{cases} -2t > 0 \\ 0 > 40t^4 - 8t^2 - 6 \end{cases} \right. \\ -2t < 0 \end{cases} \right.$$

# Проверка почему? За что?

$$\operatorname{arctg} 3x = \arccos 8x.$$

$\cos(\alpha)$

$$3x = \frac{\sin(\arccos(8x))}{8x}$$

$$3x = \frac{\sqrt{1-64x^2}}{8x}$$

$$\sin() = \pm\sqrt{1-\cos^2()}?$$

$$(24x^2)^2 = 1-64x^2$$

$$9(8x^2)^2 + 8 \cdot 8x^2 - 1 = 0$$

$$9t^2 + 8t - 1 = 0$$

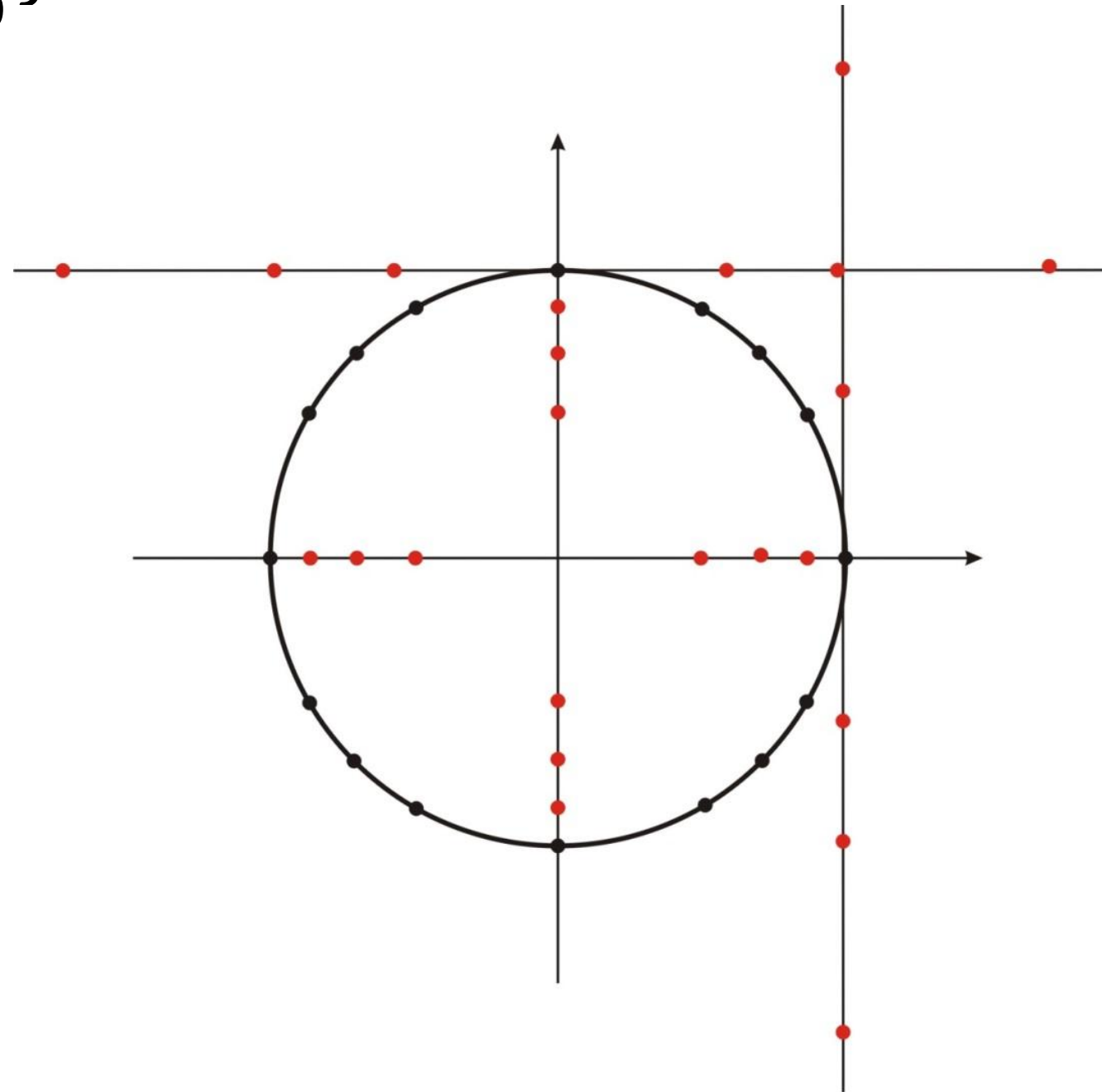
*не находим*

$$t = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{9} = 8x^2$$

$$x = \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{-1}{6\sqrt{2}}$$





# На счет ОДЗ...

Пример 29. При каких значениях параметра  $a$ , уравнение  $(x - a) \arccos(x + 3) = 0$  имеет единственное решение?

$$\begin{cases} x - a = 0 \\ \arccos(x + 3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a \\ x = -2 \end{cases}$$

1сл

~~одно~~ решение

2сл

$$a \neq -2$$

$$-4 \leq a < -2$$

2 корня

$$x = 2$$

$$x = a$$

неуд ОДЗ

корень

ОДЗ

$$-1 \leq x + 3 \leq 1$$

$$-4 \leq x \leq -2$$

# KB12

$$\sin(x) + \cos(x) = \cos(2x) * (1 - 2 * \sin(2x))$$

$$\sin(x) + \cos(x) = (\cos^2 x - \sin^2 x) * (1 - 4 * \sin(x) * \cos(x))$$

$$(\sin(x) + \cos(x)) * \{(\cos(x) - \sin(x)) * [1 - 4 * \sin(x) * \cos(x)] - 1\} = 0$$

$$\left[ \begin{array}{l} \sin(x) + \cos(x) = 0 \\ (\cos(x) - \sin(x)) * (1 - 4 * \sin(x) * \cos(x)) - 1 = 0 \end{array} \right.$$

# Формула универсальной подстановки

$$t = \operatorname{tg}(x/2)$$

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2}\right) * \left(1 - 4 * \frac{1-t^2}{1+t^2} * \frac{2t}{1+t^2}\right) - 1 &= \frac{1-2t-t^2}{1+t^2} * \frac{(1+t^2) - 8t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} - \frac{(1+t^2)^3}{(1+t^2)^3} = \\ &= - \frac{2t(1+t)(5+t(-12+t(6+t(4+t))))}{(1+t^2)^3} \end{aligned}$$

(вообщерешения мож но заметить выше, остаток показать, что решений не *имеет*)